# DS1

**Avertissements**

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit**.

## Problème 1 - Sommes partielles de séries divergentes

- Dans tout le problème, on dit qu'une suite réelle $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ vérifie la propriété $(P)$ si :

$$(P) : \begin{cases} \bullet \text{ la suite } (a_n)_{n \geqslant n_0} \text{ est bornée et à termes strictement positifs,} \\ \bullet \text{ la série } \sum a_n \text{ diverge.} \end{cases}$$

On note alors : $\forall n \geqslant n_0$, $A_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$, et lorsque cela est possible : $b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{a_k}{A_k}$.

- Dans tout le problème, on admettra et on pourra librement utiliser le résultat suivant, que l'on nomme **Théorème (T)** :

> Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites réelles **à termes strictement positifs**.
>
> **Si** $\begin{cases} \textbf{\textit{a)}}\ u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \\ \textbf{\textit{b)}}\ \text{la série } \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$.

***1.*** Montrer que le théorème (T) s'applique aux suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$

En déduire : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

*Démonstration.*

- Vérifions que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ vérifient les hypothèses ***a)*** et ***b)*** du théorème (T).

***a)*** Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Ainsi :

$$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} = u_n$$

***b)*** De plus, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 1$). Elle est donc divergente.

On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

$$\boxed{\text{Le théorème (T) s'applique aux suites } (u_n) \text{ et } (v_n).}$$

- D'après le théorème (T) :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k \qquad \textit{i.e.} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} = \ln(n+1)$$

Or : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. En effet :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

***2.*** On pose cette fois, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 :

$$w_n = \frac{1}{n\ln(n)} \qquad \text{et} \qquad x_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$$

***a)*** Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} x_n$ diverge et : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

*Démonstration.*

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\sum_{k=2}^{n} x_k = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln\big(\ln(k+1)\big) - \ln\big(\ln(k)\big)\Big) = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(\ln(n+1)\big) = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} x_k = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi la série } \sum_{n\geqslant 2} x_n \text{ est divergente.}}$$

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\begin{aligned} x_n &= \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(n)\big) \\ &= \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 0$. D'où :

$$\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(n)} = \frac{1}{n\ \ln(n)} = w_n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n.}$$

□

***b)*** En déduire, à l'aide du théorème (T), que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge et :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

*Démonstration.*

- D'après le théorème (T) :

$$\sum_{k=2}^{n} w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} x_k \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} x_k$$

Or la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} x_k\right)$ est divergente d'après la question précédente. Comme deux suites équivalentes ont même nature, on en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)}\right)$ est divergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ \ln(n)} \text{ est divergente.}}$$

- De plus, toujours d'après la question précédente, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$ :

$$\sum_{k=2}^{n} x_k = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)$$

Or : $\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$. En effet, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} &= \frac{\ln\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} - \frac{\ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \\
&= \frac{\ln\left(\ln(n)\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} - \frac{\ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \\
&= \frac{\ln\big(\ln(n)\big) + \ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} - \frac{\ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \\
&= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} - \frac{\ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big).}$$

□

***3.*** Retrouver les résultats de la question ***2.b)*** à l'aide d'une comparaison série-intégrale, sans utiliser le théorème (T).

*Démonstration.*

- Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $x \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{lccccc} & k & \leqslant & x & \leqslant & k+1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k\ \ln(k)} & \geqslant & \dfrac{1}{x\ \ln(x)} & \geqslant & \dfrac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)} \end{array} \quad \textit{(par décroissance de la fonction } x \mapsto \dfrac{1}{x\ \ln(x)} \textit{ sur } ]1, +\infty[\textit{)}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ \ln(k)}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\, dx & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)}\, dx \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dfrac{1}{k\ \ln(k)} & & \Big[\ \ln\big(|\ln(x)|\big)\ \Big]_k^{k+1} & & \dfrac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obient : } \forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \frac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)} \leqslant \ln\big(\ln(k+1)\big) - \ln\big(\ln(k)\big) \leqslant \frac{1}{k\ \ln(k)}.}$$

**Commentaire**

Vérifions que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ \ln(x)}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

- La fonction $f$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ car elle est l'inverse $f = \dfrac{1}{g}$ où la fonction $g : x \mapsto x\ \ln(x)$ :
  - × est dérivable sur $]1, +\infty[$,
  - × ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.
- Soit $x \in ]1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}}{\big(x\ \ln(x)\big)^2} = \frac{\ln(x) + 1}{\big(x\ \ln(x)\big)^2}$$

Comme $x > 1$, on obtient : $f'(x) \leqslant 0$. La fonction $f$ est donc décroissante sur $]1, +\infty[$.

- Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On somme les encadrements précédents pour $k$ variant de 2 à $n$ :

$$\begin{array}{lccccc} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \Big(\ln\big(\ln(k+1)\big) - \ln\big(\ln(k)\big)\Big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \\ \text{donc} & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ \ln(k+1)} & \leqslant & \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \quad \textit{(par sommation télescopique)} \\ \text{d'où} & \displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k\ \ln(k)} & \leqslant & \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \end{array}$$

- Tout d'abord, avec l'inégalité de droite :

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2)) = +\infty$. Par théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ \ln(k)} = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ \ln(n)} \text{ est divergente.}}$$

- Ensuite, on rappelle l'inégalité de gauche :

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \quad \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k\ \ln(k)} \ \leqslant\ \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)$$

Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$. On obtient donc :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \ \leqslant\ \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)$$

D'où :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \ \leqslant\ \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ \ln(2)}$$

Ainsi, en reprenant l'inégalité de droite, on obtient l'encadrement suivant :

$$\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \ \leqslant\ \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ \ln(2)}$$

De plus, comme $n \geqslant 3$, on sait : $\ln\big(\ln(n)\big) > 0$. D'où :

$$\frac{\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \ \leqslant\ \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)}}{\ln\big(\ln(n)\big)} \ \leqslant\ \frac{\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ \ln(2)}}{\ln\big(\ln(n)\big)}$$

Or on a déjà démontré : $\ln\big(\ln(n+1)\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$. Alors :

× d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$

× d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ \ln(2)}}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)}}{\ln\big(\ln(n)\big)} = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big).}$$

□

*4.* Étude de la suite $(b_n)$ sur deux exemples.

***a)*** On note dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$.

***(i)*** Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie satisfait à la propriété $(P)$.

*Démonstration.*

- La suite $(a_n)$ est la suite constante égale à 1. Elle est donc bornée et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$.
- De plus : $a_n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$.
  Ainsi, la série $\sum a_n$ est (grossièrement) divergente.

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ satisfait donc à la propriété } (P).}$$

□

***(ii)*** À l'aide de la question ***1***, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

- Ensuite, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$ :

$$b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k} = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

- Or, d'après ***1.*** : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Alors :

$$b_n = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} \times \ln(n) = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} b_n = 1.}$$

□

***b)*** On note dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n}$.

***(i)*** Vérifier que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi définie satisfait à la propriété $(P)$.

*Démonstration.*

- On remarque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < a_n \leqslant 1$$

  La suite $(a_n)$ est donc bornée et à termes strictement positifs.
- Comme précisé en question ***1.***, la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. Autrement dit, la série $\sum a_n$ est divergente.

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ satisfait donc à la propriété } (P).}$$

□

***(ii)*** À l'aide du théorème (T) et des questions ***1*** et ***2***, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$ :

$$b_n \ = \ \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k} \ = \ \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,A_k}$$

  où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
  On cherche alors à déteminer un équivalent de $(b_n)$.

- Pour déterminer un équivalent de $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,A_k}\right)$, on applique le théorème (T) aux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \qquad u_n = \frac{1}{n\ \ln(n)} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n\,A_n}$$

  Vérifions que ces suites satisfont bien aux hypothèses du théorème (T).
  × D'après la question ***1.*** : $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Donc :

$$v_n \ = \ \frac{1}{n\,A_n} \ \underset{n\to+\infty}{\sim} \ \frac{1}{n\ \ln(n)} \ = \ u_n$$

  × De plus, d'après la question ***2.b)***, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ est divergente.
  D'après le théorème (T) :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} v_k \qquad \textit{i.e.} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(A_k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)}$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(A_k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)}}$$

- Il reste à déterminer un équivalent de $\big(\ln(A_n)\big)$. Démontrons : $\ln(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$.
  Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\frac{\ln(A_n)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \ = \ \frac{\ln\left(\ln(n) \times \frac{A_n}{\ln(n)}\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \ = \ \frac{\ln\big(\ln(n)\big) + \ln\left(\frac{A_n}{\ln(n)}\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \ = \ 1 + \frac{\ln\left(\frac{A_n}{\ln(n)}\right)}{\ln\big(\ln(n)\big)}$$

  Or, d'après la question ***1.*** : $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Donc : $\frac{A_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où : $\ln\left(\frac{A_n}{\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Ainsi :

$$\frac{\ln(A_n)}{\ln\big(\ln(n)\big)} \ \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ 1 + 0 = 1$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \ln(A_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big).}$$

- On en déduit : $b_n = \frac{1}{\ln\big(A_n\big)} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln\big(\ln(n)\big)} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)}$.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{2.b)}} : \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big). \text{ On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} b_n = 1.}$$

□

***5.*** On revient au cas général et on considère une suite $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ qui satisfait à la propriété $(P)$.

***a)*** Montrer : $A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} A_{n-1}$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, pour tout $n \in [\![ n_0 + 1, +\infty [\![$ :

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} a_k} = \frac{\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} a_k + a_n}{\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} a_k} = 1 + \frac{a_n}{\sum\limits_{k=n_0}^{n-1} a_k} = 1 + \frac{a_n}{A_{n-1}}$$

- Or, la suite $(a_n)$ satisfait à la propriété $(P)$. Donc :
  × la suite $(A_n)$ diverge vers $+\infty$.
  En effet, comme la suite $(a_n)$ est à termes positifs, la suite $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k\right)$ est croissante. Seuls deux cas se présentent :
  - soit elle est majorée. Elle est donc convergente.
  - soit elle est non majorée. Elle diverge alors vers $+\infty$.

  Comme la série $\sum a_n$ est divergente, d'après la propriété $(P)$, c'est forcément le 2$^{\text{nd}}$ cas qui est vérifié. Ainsi la suite $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k\right)$ diverge vers $+\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = +\infty$.

  × la suite $(a_n)$ est bornée.

  On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{A_{n-1}} = 0$. Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} A_{n-1}.}$$

□

***b)*** Montrer : $\frac{a_n}{A_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

*Démonstration.*

- Soit $n \in [\![ n_0 + 1, +\infty [\![$. En effectuant les mêmes calculs qu'en question précédente, on obtient :

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{a_n}{A_{n-1}}\right)$$

- Or on a démontré en question précédente : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{A_{n-1}} = 0$. Ainsi :

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{a_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_{n-1}}$$

- Enfin, d'après la question précédente : $A_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} A_n$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}.}$$

□

***c)*** Déterminer alors la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \dfrac{a_n}{A_n}$.

*Démonstration.*
On remarque :

× tout d'abord : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\dfrac{a_n}{A_n} \geqslant 0$

× ensuite, d'après la question précédente : $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$

× la série $\sum \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$ est une série divergente. En effet, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) \;=\; \sum_{k=n_0}^{n} \Big(\ln(A_k) - \ln(A_{k-1})\Big) \;=\; \ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

*(la démonstration de l'assertion « $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$ » a été effectuée en question **5.a)**)*

$$\boxed{\text{Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série } \sum \frac{a_n}{A_n} \text{ est divergente.}}$$

□

***d)*** À l'aide du théorème (T) et des questions précédentes, déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

*Démonstration.*

- On sait :

  × d'après ***5.b)*** : $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

  × d'après ***5.c)***, la série $\sum \dfrac{a_n}{A_n}$ est divergente.

  Alors, d'après le théorème (T) :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)$$

- De plus, d'après les calculs de la question précédente, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) \;=\; \ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1})$$

  Or : $\ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n)$. En effet :

$$\frac{\ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1})}{\ln(A_n)} \;=\; 1 - \frac{\ln(A_{n_0-1})}{\ln(A_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \textit{(car : } \ln(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\textit{)}$$

  On obtient :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n) - \ln(A_{n_0-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(A_n)$$

- Ainsi :

$$b_n \;=\; \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=n_0}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(A_n)} \times \ln(A_n) \;=\; 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} b_n = 1.}$$

□

***6.*** Au vu des résultats précédents, que pensez-vous de la véracité de l'énoncé suivant :

« Pour toute série divergente $\sum u_n$ à termes strictement positifs, il existe une série divergente $\sum v_n$ à termes strictement positifs tels que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. »

*Indication : on pourra commencer par considérer le cas où la suite $(u_n)$ est bornée, et dans le cas contraire considérer la suite $(u'_n)$ où $u'_n = \min\{u_n, 1\}$.*

*Démonstration.*

- Si $(u_n)$ est bornée, alors :
  - × la suite $(u_n)$ est bornée et à termes strictement positifs,
  - × la série $\sum u_n$ est divergente.

  On est donc dans le cadre d'application de la question ***5.*** On en déduit, en particulier, que la série $\sum \dfrac{u_n}{U_n}$ est divergente, où l'on note $(U_n)$ la suite définie par : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $U_n = \sum\limits_{k=n_0}^{+\infty} u_k$.

  On pose alors $(v_n)$ la suite définie par : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$ : $v_n = \dfrac{u_n}{U_n}$. On obtient :
  - × la série $\sum v_n$ est divergente,
  - × la série $\sum v_n$ est à termes strictement positifs (car : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_n > 0$),
  - × $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$. En effet :

  $$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{U_n}}{u_n} = \frac{u_n}{U_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{U_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  car, comme démontré en question ***5.a)***, puisque la suite $(u_n)$ est à termes positifs et la série $\sum u_n$ divergente, la suite $(U_n)$ est croissante et diverge vers $+\infty$.

  $$\boxed{\text{La proposition de l'énoncé est donc vraie lorsque la suite } (u_n) \text{ est de plus bornée.}}$$

- Si $(u_n)$ n'est pas bornée, on note $(u'_n)$ la suite définie par : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u'_n = \min(u_n, 1)$.

  La suite $(u'_n)$ est alors bornée par construction. On cherche à lui appliquer la propriété de l'énoncé (qu'on a démontré être vérifiée dans le cas bornée dans le point précédente).
  - × La série $\sum u'_n$ est bien à termes strictement positifs, car : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_n > 0$.
  - × La suite $(u'_n)$ est bornée.
  - × Démontrons que la série $\sum u'_n$ est divergente. Pour cela, on va prouver : $\lim\limits_{n\to+\infty} u'_n \neq 0$.
    - Tout d'abord, comme la suite $(u_n)$ n'est pas bornée mais minorée par 0, on en déduit qu'elle n'est pas majorée. Il existe donc une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui ne comporte que des termes supérieurs à 1. Par construction, la suite $(u'_{\varphi(n)})$ est donc constante égale à 1.
    - Puisque la suite $(u'_n)$ admet une sous-suite $(u'_{\varphi(n)})$ qui converge vers 1, on en déduit que $(u'_n)$ ne converge pas vers 0.
      *N.B. : En effet, en raisonnant par l'absurde, si la suite $(u'_n)$ converge vers 0, alors toutes ses sous-suites convergent vers 0.*

  Avec ces trois hypothèses, par propriété de l'énoncé dans le cas bornée, il existe une suite $(v_n)$ telle que :
  - × la série $\sum v_n$ est divergente et à termes strictement positifs,
  - × $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$.

Pour conclure que la propriété de l'énoncé est vraie, il reste seulement à démontrer qu'on a aussi : $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
Par construction de $(u'_n)$, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ :

$$\begin{array}{lrcll} & 0 < u'_n & \leqslant & u_n & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{u'_n} & \geqslant & \dfrac{1}{u_n} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{v_n}{u'_n} & \geqslant & \dfrac{v_n}{u_n} & \textit{(car } v_n > 0\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$ :

$$0 < \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{v_n}{u'_n}$$

Or :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u'_n} = 0$ (car $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$).

Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$ est convergente et de limite nulle. Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \qquad \text{donc} \qquad v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

$$\boxed{\text{La proposition de l'énoncé est donc vraie.}}$$

□

**Commentaire**

Détaillons la propriété : « la suite $(u_n)$ n'est pas majorée, donc il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui ne comporte que des termes supérieurs à 1 ».

- Comme la suite $(u_n)$ n'est pas majorée, elle n'est pas non plus majorée par 1 à partir d'un certain rang. Ainsi, la propriété suivante est vérifiée :

$$\texttt{NON}(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant 1)$$

Autrement dit :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \geqslant N,\ u_{n_0} > 1$$

L'idée pour construire la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de termes tous supérieurs à 1, est d'appliquer cette proposition à différentes valeurs de $N$.

× Pour $N = 1$, il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que : $u_{n_1} > 1$.

× Pour $N = n_1 + 1$, il existe $n_2 \geqslant n_1 + 1$ tel que : $u_{n_2} > 1$.
*(notons qu'on a : $n_1 < n_2$)*

× Pour $N = n_2 + 1$, il existe $n_3 \geqslant n_2 + 1$ tel que : $u_{n_3} > 1$.
*(notons qu'on a : $n_2 < n_3$)*

× $\cdots$

× Pour $N = n_{k-1} + 1$, il existe $n_k \geqslant n_{k-1} - 1$ tel que : $u_{n_k} > 1$.
*(notons qu'on a : $n_{k-1} < n_k$)*

× $\cdots$

**Commentaire**

- On construit ainsi une fonction :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & k & \mapsto & n_k \end{array}$$

Par construction : $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$.
La fonction $\varphi$ est donc strictement croissante. Ainsi la suite $(u_{\varphi(n)})$ est :

× une sous-suite de $(u_n)$,

× telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(k)} > 1$.

On a donc bien construit une sous-suite de $(u_n)$ de termes supérieurs à 1.

## Problème 2 - Étude d'une suite de racines de polynômes

On note, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $P_n$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

### PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes $P_n$

***1. a)*** Calculer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, les limites de $P_n$ en $+\infty$ et $-\infty$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} P_n(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} \\ & = & \dfrac{(-x)^0}{0!} + \dfrac{(-x)^1}{1!} + \cdots + \dfrac{(-x)^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ & = & 1 - x + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}$$

- On en déduit : $P_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} P_n(x) = -\infty.}$$

- De même : $P_n(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{x \to +\infty} P_n(x) = +\infty.}$$

□

***b)*** En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, le polynôme $P_n$ admet au moins une racine réelle.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $P_n$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale.

Alors toute valeur comprise entre $\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$ est atteinte par la fonction $P_n$ sur $]-\infty,+\infty[$.
Or $0 \in \,]-\infty,+\infty[$, donc 0 admet (au moins) un antécédent par $P_n$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, } P_n \text{ admet au moins une racine réelle.}}$$

**Commentaire**

- On applique dans cette question le théorème des valeurs intermédiaires (TVI). On rappelle qu'il s'énonce de la manière suivante :

  | |
  |---|
  | Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$.<br>Alors toute valeur de $f(I)$ est atteinte par la fonction $f$ sur $I$. |

  Autrement dit :
  $$\forall c \in f(I),\ \exists x \in I,\ c = f(x)$$
  Ainsi, dans notre cas où $f = P_n$ et $I = \,]-\infty,+\infty[$, on obtient :
  $$\forall c \in P_n(]-\infty,+\infty[),\ \exists x \in \,]-\infty,+\infty[,\ c = P_n(x)$$
  Or, comme $\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = -\infty$, on obtient : $P_n(]-\infty,+\infty[) = \,]-\infty,+\infty[$. On en déduit :
  $$\forall c \in \,]-\infty,+\infty[,\ \exists x \in \,]-\infty,+\infty[,\ c = P_n(x)$$
  Or $0 \in \,]-\infty,+\infty[$. Il existe donc $x \in \,]-\infty,+\infty[$ tel que : $P_n(x) = 0$ (ce que l'on cherchait à démontrer).
- L'utilisation du TVI est relativement fréquente. Notons cependant que lorsqu'on cherche à démontrer l'existence d'un point d'annulation d'une fonction $f$ (continue sur un intervalle $I$), il est fréquent qu'on se place sur un intervalle de stricte monotonie de $f$ afin d'invoquer le théorème de la bijection. Plus précisément :
  × Si la fonction $f$ est continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, alors :
  $$\forall c \in f(I),\ \exists! x \in I,\ c = f(x)$$
  Ainsi, si $c \in f(I)$, l'équation $f(x) = c$ admet une **unique** solution dans $I$.
  × Si on sait seulement que la fonction $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors :
  $$\forall c \in f(I),\ \exists x \in I,\ c = f(x)$$
  Ainsi, si $c \in f(I)$, l'équation $f(x) = c$ admet **au moins** une solution dans $I$.

□

***2. a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $P_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a de plus :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}$$

Par linéarité de la dérivée, on obtient :

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= 0 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{k \times (-1) \times (-x)^{k-1}}{k!} \\
&= -\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{\cancel{k}\ (-x)^{k-1}}{\cancel{k} \times (k-1)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} + \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{(-1)^{2n+1}\ x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\
&= -\left(P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) && \textit{(car : } (-1)^{2n+1} = -1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

□

***b)*** En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, les racines de $P_n$ ne sont pas racines de $P_n'$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que $x_0$ est une racine de $P_n$.
Démontrons par l'absurde que $x_0$ n'est pas racine de $P_n'$.
Supposons que $x_0$ est racine de $P_n'$.

- D'après la question précédente :

$$P_n'(x_0) = -P_n(x_0) - \frac{x_0^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or $x_0$ est :

× racine de $P_n$. D'où : $P_n(x_0) = 0$.

× racine de $P_n'$. D'où : $P_n'(x_0) = 0$.

On obtient alors :

$$\underset{0}{\underset{\shortparallel}{P_n'(x_0)}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{-P_n(x_0)}} - \frac{x_0^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ainsi : $-\dfrac{x_0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. Donc : $x_0^{2n+1} = 0$. Et finalement : $x_0 = 0$.
On vient donc de démontrer que la seule racine possible de $P_n$ et $P_n'$ est 0.

- Vérifions si 0 est effectivement racine de $P_n$.

$$\begin{array}{rcl} P_n(0) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-0)^k}{k!} \ = \ 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{0^k}{k!} \\ & = & 1+0 \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{(car : } \forall k \in N^*,\ 0^k = 0\textit{)} \end{array}$$

On en déduit : $P_n(0) \neq 0$. Donc 0 n'est pas racine de $P_n$.

Absurde !

On en conclut que les racines de $P_n$ ne sont pas racines de $P'_n$. □

***3. a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$.

*<u>Indication</u> : on pensera à découper l'expression de $P_n$ en deux sommes : l'une ne comportant que les termes d'indice pair, l'autre ne comportant que les termes d'indice impair.*

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} P_n(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} \ = \ \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{-x^k}{k!} \\ & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \left( \frac{x^{2p}}{(2p)!} - \frac{x^{2p+1}}{(2p+1) \times (2p)!} \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \left(1 - \frac{x}{2p+1}\right) \end{array}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)$. □

***b)*** En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, les racines réelles de $P_n$ appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1, 2n+1]$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On souhaite montrer que les solutions de l'équation $P_n(x) = 0$ appartiennent à l'intervalle $[1, 2n+1]$. Autrement dit, on souhaite démontrer :

$$\forall x \notin [1, 2n+1],\ P_n(x) \neq 0$$

- Soit $x \notin [1, 2n+1]$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in ]-\infty, 1[$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{array}{lll} & x < 1 & \\ \text{donc} & -\dfrac{x}{2k+1} > -\dfrac{1}{2k+1} & \textit{(car : } -(2k+1) < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \dfrac{x}{2k+1} > 1 - \dfrac{1}{2k+1} & \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{lll} \text{comme} & k \geqslant 0 & \\ \text{alors} & 2k+1 \geqslant 1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2k+1} \leqslant 1 & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } ]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \dfrac{1}{2k+1} \geqslant 1 - 1 = 0 & \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :

$$1 - \frac{x}{2k+1} \; > \; 0$$

Deux nouveaux cas se présentent :

- si $x \neq 0$, alors : $x^2 > 0$. Donc : $x^{2k} = (x^2)^k > 0$. D'où : $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} > 0$. Ainsi :

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) \; > \; 0$$

En sommant ces inégalités strictes pour $k$ variant de $0$ à $n$, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)}_{= P_n(x)} \; > \; 0$$

En particulier : $P_n(x) \neq 0$. On en déduit que $x$ n'est pas racine de $P_n$.

- si $x = 0$, on a déjà démontré en question ***2.b)*** qu'alors $x$ n'est pas racine de $P_n$.

  × si $x \in ]2n+1, +\infty[$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{array}{lll} & x > 2n+1 & \\ \text{donc} & -\dfrac{x}{2k+1} < -\dfrac{2n+1}{2k+1} & \textit{(car : } -(2k+1) < 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 1 - \dfrac{x}{2k+1} < 1 - \dfrac{2n+1}{2k+1} & \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{lll} \text{comme} & k \leqslant n & \\ \text{alors} & 2k+1 \leqslant 2n+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{2k+1} \geqslant \dfrac{1}{2n+1} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } ]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{d'où} & \dfrac{2n+1}{2k+1} \geqslant \dfrac{2n+1}{2n+1} = 1 & \textit{(car : } 2n+1 \geqslant 0\textit{)} \\ \text{ainsi} & 1 - \dfrac{2n+1}{2k+1} \leqslant 1 - 1 = 0 & \end{array}$$

On en déduit, par transitivité :

$$1 - \frac{x}{2k+1} \ < \ 0$$

De plus, comme : $x > 2n+1 > 0$, on en déduit : $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!} > 0$. D'où :

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right) \ < \ 0$$

En sommant ces inégalités strictes pour $k$ variant de 0 à $n$, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{x}{2k+1}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ P_n(x)}} \ < \ 0$$

En particulier : $P_n(x) \neq 0$. On en déduit que $x$ n'est pas racine de $P_n$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré que les racines de } P_n \text{ appartiennent à l'intervalle } [1, 2n+1].}$$

□

***4. a)*** Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P''_{n+1}(x) = P_n(x) \end{cases}$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question ***2.a)*** :

$$\begin{aligned}
P'_{n+1}(x) &= -P_{n+1}(x) - \frac{x^{2(n+1)+1}}{\big(2(n+1)+1\big)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{2(n+1)+1} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} + \frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-x)^{2n+3}}{(2n+3)!}\right) - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \\
&= -\left(P_n(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \cancel{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}\right) - \cancel{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}} \\
&= -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P'_{n+1}(x) = -P_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}$$

- La fonction $P_{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le point précédent :

$$\begin{array}{rcll} P''_{n+1}(x) & = & \left(P'_{n+1}\right)'(x) \ = \ -P'_n(x) - (2n+2)\,\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} & \textit{(par linéarité de la dérivée)} \\ & = & -P'_n(x) - \cancel{(2n+2)}\,\dfrac{x^{2n+1}}{\cancel{(2n+2)}\ (2n+1)!} & \\ & = & -\left(-P_n(x) - \cancel{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right) - \cancel{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} & \textit{(d'après \textbf{2.a)})} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ P''_{n+1}(x) = P_n(x).}$$

□

***b)*** Montrer par récurrence que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la fonction $P_n$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté $u_n$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\quad \mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} P_n \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R} \\ P_n \text{ s'annule une unique fois sur } \mathbb{R} \text{ en un réel } u_n \end{array} \right.$ .

▸ **Initialisation** :

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P_0(x) \ = \ \sum_{k=0}^{2\times 0+1} \frac{(-x)^k}{k!} \ = \ \sum_{k=0}^{1} \frac{(-x)^k}{k!} \ = \ 1 - x$$

  On sait déjà que $P_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'_0(x) = -1 < 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P_0 \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P_0(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P_0 \text{ s'annule uniquement en } u_0 = 1.}$$

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

$\left( \text{c'est-à-dire } \left\{ \begin{array}{l} P_{n+1} \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R} \\ P_{n+1} \text{ s'annule une unique fois sur } \mathbb{R} \text{ en un réel } u_{n+1} \end{array} \right. \right)$.

- Par hypothèse de récurrence, la fonction $P_n$ s'annule une unique fois en $u_n$.
  Comme de plus (toujours par hypothèse de récurrence), la fonction $P_n$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :
  × $\forall x \in \left]-\infty, u_n\right[$, $P_n(x) > P_n(u_n) = 0$
  × $\forall x \in \left]u_n, +\infty\right[$, $P_n(x) < P_n(u_n) = 0$
  On sait également, d'après ***4.a)*** :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P''_{n+1}(x) = P_n(x)$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour la fonction $P'_{n+1}$.

| $x$ | $-\infty$ | $u_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $P''_{n+1}(x) = P_n(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| Variations de $P'_{n+1}$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

- Toujours d'après ***4.a)*** :

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(u_n) &= -P_n(u_n) - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &= 0 - \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \end{aligned}$$

Or $2n+2$ est pair, donc : $u_n^{2n+2} \geqslant 0$. D'où : $\dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0$. Ainsi : $P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$.

On en déduit :

× comme $P'_{n+1}$ est strictement croissante sur $]-\infty, u_n[$ :

$$\forall x \in \,]-\infty, u_n[, \ P'_{n+1}(x) < P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$$

× comme $P'_{n+1}$ est strictement décroissante sur $]u_n, +\infty[$ :

$$\forall x \in \,]u_n, +\infty[, \ P'_{n+1}(x) < P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{u_n\}, \ P'_{n+1}(x) < 0 \quad \text{et} \quad P'_{n+1}(u_n) \leqslant 0$$

$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } P'_{n+1} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$

Avec la question ***1.a)***, on obtient le tableau de variations suivant pour la fonction $P_{n+1}$ :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $P'_{n+1}(x)$ | $-$ | |
| Variations de $P_{n+1}$ | $+\infty$ $\searrow$ | $-\infty$ |

- La fonction $P_{n+1}$ est donc :

× continue sur $\mathbb{R}$,

× strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction $P_{n+1}$ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $P_{n+1}(\,]-\infty, +\infty[\,)$ où :

$$P_{n+1}(\,]-\infty, +\infty[\,) = \left] \lim_{x \to +\infty} P_{n+1}(x), \lim_{x \to -\infty} P_{n+1}(x) \right[ = \,]-\infty, +\infty[$$

Or $0 \in \,]-\infty, +\infty[$. L'équation $P_{n+1}(x) = 0$ admet donc une unique solution $u_{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La fonction } P_{n+1} \text{ admet bien un unique point d'annulation } u_{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $P_n$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en un unique réel $u_n$. □

***5. a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right)$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(u_n) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_n^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{u_n}{2k+1}\right) && \text{(d'après } \mathbf{3.a)}\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_n^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{u_n}{2k+1}\right) + \frac{u_n^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\left(1 - \frac{u_n}{2(n+1)+1}\right) \\
&= P_n(u_n) + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right) \\
&= 0 + \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right) && \text{(car } u_n \text{ est racine de } P_n \text{ d'après } \mathbf{4.b)}\text{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)}$$ □

***b)*** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de $u_{n+1}$ : $P_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.
- D'après la question précédente :

$$P_{n+1}(u_n) = \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \frac{u_n}{2n+3}\right)$$

× Tout d'abord : $\dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0$.

× De plus, d'après ***3.b)*** : $u_n \in [1, 2n+1]$. Ainsi :

$$\begin{array}{lccccc}
 & 1 & \leqslant & u_n & \leqslant & 2n+1 \\
\text{donc} & \dfrac{1}{2n+3} & \leqslant & \dfrac{u_n}{2n+3} & \leqslant & \dfrac{2n+1}{2n+3} \quad \text{(car : } 2n+3 > 0\text{)} \\
\text{d'où} & 1 - \dfrac{1}{2n+3} & \geqslant & 1 - \dfrac{u_n}{2n+3} & \geqslant & 1 - \dfrac{2n+1}{2n+3}
\end{array}$$

Or : $1 - \dfrac{2n+1}{2n+3} = \dfrac{\cancel{2n} + 3 - (\cancel{2n} + 1)}{2n+3} = \dfrac{2}{2n+3} \geqslant 0$.

Ainsi, par transitivité :

$$1 - \frac{u_n}{2n+3} \geqslant 1 - \frac{2n+1}{2n+3} \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } P_{n+1}(u_n) \geqslant 0.}$$

- On obtient alors :
$$P_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \ \leqslant \ P_{n+1}(u_n)$$
Or, d'après la question ***4.b)***, la fonction $P_{n+1}$ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $P_{n+1}^{-1} : ]-\infty, +\infty[ \to ]-\infty, +\infty[$ est strictement décroissante sur $]-\infty, +\infty[$. En appliquant $P_{n+1}^{-1}$, on obtient alors :
$$\begin{array}{ccc} P_{n+1}^{-1}\big(P_{n+1}(u_{n+1})\big) & \geqslant & P_{n+1}^{-1}\big(P_{n+1}(u_n)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_{n+1} & & u_n \end{array}$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

**Commentaire**

- Cette question ***6.b)*** consiste en l'étude de la suite $(u_n)$. On parle ici de « suite implicite » car on n'a pas accès à la définition explicite de la suite $(u_n)$ mais simplement à la propriété qui permet de définir chacun de ses termes, à savoir :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P_n(x) = 0$

  On comprend alors que l'étude de $(u_n)$ va passer par l'étude des propriétés de la fonction $P_n$.
- De cette définition, on tire la propriété : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \ P_m(u_m) = 0}$.
Cette propriété est au cœur de l'étude de la suite implicite $(u_n)$.
C'est de cette propriété dont on se sert ici (en $m = n+1$) pour démontrer la monotonie de la suite $(u_n)$. Comme la suite $(u_n)$ est définie de manière implicite, cette étude ne se réalise pas directement en étudiant la différence $u_{n+1} - u_n$. Il est par contre très classique de passer par l'inégalité :
$$P_{n+1}(u_{n+1}) \ \leqslant \ P_{n+1}(u_n)$$
et de conclure : $u_n \ \leqslant \ u_{n+1}$ à l'aide d'une propriété de $P_{n+1}$.

□

## PARTIE B : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

***6.*** Démontrer à l'aide de la formule de Stirling : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.

*Démonstration.*

- Rappelons :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$
Démontrons alors :
$$(n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n} \ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$
Pour plus de lisibilité, notons dans cette question $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ les suites de termes généraux respectifs :
$$\alpha_n \ = \ n! \quad \text{ et } \quad \beta_n \ = \ \sqrt{2\pi n} \ \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

- On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{(\alpha_n)^{\frac{1}{n}}}{(\beta_n)^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\big(0\times\ln(1)\big) = \exp\big(0\times 0\big) = \mathrm{e}^0 = 1$$

Ce résultat est obtenu par composition de limites car $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} \to 1$ puisque les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ sont équivalentes. On a bien :

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}}\,\frac{n}{\mathrm{e}}$$

et finalement :

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}}\,\frac{\cancel{n}}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{\cancel{n}}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{1}{n}\,\ln\left((2\pi n)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2n}\,\ln(2\pi n)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2n}\,\big(\ln(2\pi)+\ln(n)\big)\right)\\
&= \exp\left(\frac{\ln(2\pi)}{2n}+\frac{\ln(n)}{2n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(0+0) = 1
\end{aligned}$$

*(par composition de limites et puisque* $\dfrac{\ln(n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par croissances comparées)*

$$\boxed{\text{Ainsi : } \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}}\,\frac{1}{\mathrm{e}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

**Commentaire**

- On a démontré dans cette question :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \Rightarrow (\alpha_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\beta_n)^{\frac{1}{n}}$$

Il est à noter que l'on ne s'est pas servi de l'expression des suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ pour démontrer ce résultat. Cela signifie qu'il est vérifié pour tout couple de suites $\big((\alpha_n),(\beta_n)\big) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour peu que l'on puisse écrire $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$, ce qui est notamment le cas si les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ sont strictement positives.

- Il est important de comprendre que ce résultat se généralise mal. Plus précisément, si $(\alpha_n)$, $(\beta_n)$ et $(w_n)$ sont des suites :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \;\cancel{\Rightarrow}\; (\alpha_n)^{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\beta_n)^{w_n}$$

Autrement dit, de manière générale, on ne peut élever de part et d'autre d'un équivalent, à une puissance qui dépend de la valeur $n$ que l'on fait tendre vers $+\infty$.
Le contre-exemple le plus classique est le suivant :

$$1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \quad \text{mais} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e} \;\cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}}\; 1^n = 1$$

**Commentaire**

- Si, de manière générale, cette élévation à la puissance dépendante de $n$ n'est pas autorisée, cela ne signifie pas pour autant qu'elle ne fonctionne pas dans certains cas particuliers. Mais cela demande alors démonstration ! Par exemple, si $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ sont des suites strictement positives alors pour toute suite $(w_n)$ réelle convergente (notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite), on a :

$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \ \Rightarrow\ \left(\alpha_n\right)^{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\beta_n\right)^{w_n}$$

La démonstration est assez aisée :

$$\frac{\left(\alpha_n\right)^{w_n}}{\left(\beta_n\right)^{w_n}} = \left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^{w_n} = \exp\left(w_n \ \ln\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\big(\ell \times \ln(1)\big) = \mathrm{e}^0 = 1$$

On peut donc élever à la puissance $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, ou encore $\mathrm{e}^{-n}$ de part et d'autre d'un équivalent.

- Lorsque $(w_n)$ diverge vers $+\infty$, il faut réaliser une étude plus précise. Remarquons :

$$\ln\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{\alpha_n - \beta_n}{\beta_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha_n - \beta_n}{\beta_n} \qquad \left(\begin{array}{l} \textit{car} \ \ \alpha_n - \beta_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\beta_n) \\ \textit{puisque} \ \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \end{array}\right)$$

Ainsi : $w_n \ \ln\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \ \frac{\alpha_n - \beta_n}{\beta_n}$.

Il faut que ce terme tende vers 0 pour que l'élévation à la puissance $w_n$ préserve l'équivalence. Autrement dit, il faut que $\alpha_n - \beta_n$ soit suffisamment petit devant $\beta_n$ pour l'emporter devant la limite infinie de la suite $(w_n)$. Illustrons ce cas avec les suites dont les termes généraux sont :

$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \beta_n = 1 \quad \left( \text{ainsi } \frac{\alpha_n - \beta_n}{\beta_n} = \frac{1}{n^2} \right)$$

On a alors :

× $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ $\left(\begin{array}{l}\text{le terme } \frac{1}{n^2} \text{ est suffisamment petit} \\ \text{pour l'emporter devant le terme } n\end{array}\right)$

× $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$ $\left(\begin{array}{l}\text{le terme } \frac{1}{n^2} \text{ « compense » tout} \\ \text{juste le terme } n^2\end{array}\right)$

× $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $\left(\text{le terme } n^3 \text{ l'emporte devant } \frac{1}{n^2}\right)$

- Rappelons enfin que l'élévation à une puissance quelconque, indépendante de la valeur $n$ qu'on fait tendre vers $+\infty$, est toujours autorisée. Plus précisément, pour tout $m \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Rightarrow \quad \left(u_n\right)^m \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(v_n\right)^m}$$

On a même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ (u_n) \text{ strictement positive à} \\ \text{partir d'un certain rang} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(u_n\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(v_n\right)^\alpha}$$

□

***7.*** On note $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t \in\, ]0,+\infty[,\ g(t) = t + \ln(t) + 1$.

Montrer qu'il existe un unique $\alpha$ appartenant à $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$e^{-2} < \alpha < e^{-1}$$

*Démonstration.*

- La fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $t \in\, ]0,+\infty[$.

$$g'(t) \ = \ 1 + \frac{1}{t} \ > \ 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

| $t$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $g'(t)$ | $+$ |
| Variations de $g$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

- La fonction $g$ est donc :
  × continue (car dérivable) sur $]0,+\infty[$,
  × strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

  Ainsi, $g$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(\,]0,+\infty[\,)$ où :

$$g(\,]0,+\infty[\,) \ = \,]\lim_{t\to 0} g(t), \lim_{t\to+\infty} g(t)[\, = \,]-\infty,+\infty[$$

  Or : $0 \in\, ]-\infty,+\infty[$.

  $\boxed{\text{On en déduit qu'il existe un unique } \alpha \in\, ]0,+\infty[ \text{ tel que : } g(\alpha) = 0.}$

- On remarque :
  × tout d'abord : $g(e^{-2}) = e^{-2} + \ln(e^{-2}) + 1 = e^{-2} - 2 + 1 = e^{-2} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} e^{-2} - 1 < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < 0 \qquad \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

  La dernière inégalité est vraie. Ainsi, par équivalence la première aussi. D'où : $g(e^{-2}) < 0$.

  × ensuite, par définition de $\alpha$ : $g(\alpha) = 0$.
  × enfin : $g(e^{-1}) = e^{-1} + \ln(e^{-1}) + 1 = e^{-1} - 1 + 1 = e^{-1} > 0$.

  On obtient alors :

$$g(e^{-2}) \ < \ g(\alpha) \ < \ g(e^{-1})$$

  D'après le théorème de la bijection, la fonction $g^{-1} :\, ]-\infty,+\infty[ \ \to\, ]0,+\infty[$ est strictement croissante. En appliquant $g^{-1}$ de part et d'autre de l'encadrement, on obtient :

$$e^{-2} \ < \ \alpha \ < \ e^{-1}$$

$$\boxed{e^{-2} \ < \ \alpha \ < \ e^{-1}}$$

□

***8. a)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$ : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$.

▸ **Initialisation**
Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons :

× $\displaystyle\sum_{k=0}^{2\times 0} \frac{(-x)^k}{k!} = \frac{(-x)^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$.

× $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2\times 0}}{(2\times 0)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \, dt = \left[ -\mathrm{e}^{-t} \right]_0^x = -\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Finalement :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$\left(\text{c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2\,(n+1)} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2\,(n+1)}}{(2\,(n+1))!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est bien définie car l'intégrande $t \mapsto \dfrac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \, \mathrm{e}^{-t}$ est continu sur le `SEGMENT` d'extrémités $0$ et $x$ en tant que produit de fonctions continues sur ce segment.
- On procède par intégrations par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \dfrac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} & \quad & u'(t) & = & (2n+2) \, \dfrac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+2)!} \, (-1) \\[2ex] v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car :

× la fonction $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` d'extrémités $0$ et $x$ en tant que fonction polynomiale.

× la fonction $v : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` d'extrémités $0$ et $x$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt &= \left[ -\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \, \mathrm{e}^{-t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{\cancel{-}(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\cancel{-}\mathrm{e}^{-t}\right) dt \\ &= -\frac{1}{(2n+2)!} \left( \cancel{(x-x)^{2n+2}} \, \mathrm{e}^{-x} - (x-0)^{2n+2} \, \mathrm{e}^{-0} \right) \\ &\quad - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
= &\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{1}{(2n+2)!}\, x^{2n+2} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
= &\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{1}{(2n+2)!}\, (-x)^{2n+2} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad \textit{(car } (-1)^{2n+2} = 1\textit{)} \\
= &\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt
\end{aligned}$$

- On réalise alors l'IPP suivante :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl}
u(t) & = & \dfrac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} & \qquad & u'(t) & = & (2n+1)\, \dfrac{(x-t)^{2n}}{(2n+1)!}\, (-1) \\
v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t}
\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt &= \left[ -\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, \mathrm{e}^{-t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{\cancel{-}(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, (\cancel{-}\mathrm{e}^{-t})\, dt \\
&= \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
&= -\frac{1}{(2n+1)!}\, (-x)^{2n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad \textit{(car } (-1)^{2n+1} = -1\textit{)}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
= &\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad \textit{(d'après la } 1^{\text{ère}} \textit{ IPP)} \\
= &\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} - \frac{1}{(2n+1)!}\, (-x)^{2n+1} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \\
= &\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \mathrm{e}^{-x} \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

***b)*** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, dt &= \frac{1}{(2n)!} \int_0^x (x-t)^{2n} \, dt \\ &= \frac{1}{(2n)!} \left[ -\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)} \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{(2n+1)!} \left( \cancel{(x-x)^{2n+1}} - (x-0)^{2n+1} \right) \ = \ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

- Par ailleurs, pour tout $t \in [0, x]$ :

$$\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \ \geqslant \ 0$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$ :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, dt \ \geqslant \ \int_0^x 0 \, dt \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ 0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, dt \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

□

***c)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ P_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Tout d'abord, par définition de $P_n(x)$ et d'après la question ***8.a)*** :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-x} - P_n(x) &= \left( \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \right) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!} \\ &= \left( \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!}} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \right) - \left( \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!}} + \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\ &= -\frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt\end{aligned}$$

- Or, d'après la question précédente :

$$-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \leqslant \ -\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \ \leqslant \ 0$$

- Finalement, en ajoutant $\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ de part et d'autre, on obtient :

$$0 \;=\; \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;\leqslant\; \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \;-\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt}_{=\ \mathrm{e}^{-x}\ -\ P_n(x)} \;\leqslant\; \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}_+,\, P_n(x) \;\leqslant\; \mathrm{e}^{-x} \;\leqslant\; P_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

□

***9.*** Soit $n \in \mathbb{N}$.

***a)*** Démontrer : $P_{n+1}(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

*Démonstration.*

- D'après l'inégalité de droite de la question précédente, appliquée en $x = u_n \in \mathbb{R}$ :

$$\mathrm{e}^{-u_n} \;\leqslant\; P_n(u_n) \;+\; \frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or : $P_n(u_n) = 0$ car $u_n$ est, par définition, l'unique racine réelle de $P_n$.

- En appliquant l'inégalité de gauche de la question précédente en $n+1 \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\; P_{n+1}(x) \;\leqslant\; \mathrm{e}^{-x}$$

En appliquant cette inégalité en $x = u_n \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$P_{n+1}(u_n) \;\leqslant\; \mathrm{e}^{-u_n}$$

$$\boxed{P_{n+1}(u_n) \;\leqslant\; \mathrm{e}^{-u_n} \;\leqslant\; \frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

□

***b)*** En utilisant le résultat des questions ***3.b)*** et ***5.a)***, obtenir : $\dfrac{2\,(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$. Puis :

$$(2n)! \;\leqslant\; (u_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{u_n} \;\leqslant\; \frac{(2n+3)!}{2}$$

*Démonstration.*

- Démontrons d'abord la première inégalité de droite. D'après l'inégalité de droite précédente :

$$\mathrm{e}^{-u_n} \;\leqslant\; \frac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; \frac{u_n}{2n+1}\,\frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}$$

Or, d'après la question ***3.b)*** : $u_n \in [1, 2n+1]$.
Ainsi : $u_n \leqslant 2n+1$ et : $\dfrac{u_n}{2n+1} \;\leqslant\; 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{e}^{-u_n} \;\leqslant\; \frac{u_n}{2n+1}\,\frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!} \;\leqslant\; \frac{(u_n)^{2n}}{(2n)!}.}$$

- Démontrons maintenant l'inégalité de gauche.

$$\begin{aligned} e^{-u_n} &\geqslant P_{n+1}(u_n) && \textit{(d'après l'inégalité de gauche de la question précédente)} \\ &= \frac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\frac{u_n}{2n+3}\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{5.a)}\textit{)} \end{aligned}$$

Or, comme vu dans le point précédent : $u_n \leqslant 2n+1$.

$$\begin{array}{llcll} \text{Ainsi :} & \dfrac{u_n}{2n+3} & \leqslant & \dfrac{2n+1}{2n+3} & \textit{(car } 2n+3>0\textit{)} \\ \text{donc :} & -\dfrac{u_n}{2n+3} & \geqslant & -\dfrac{2n+1}{2n+3} & \\ \text{donc :} & 1-\dfrac{u_n}{2n+3} & \geqslant & 1-\dfrac{2n+1}{2n+3} = \dfrac{(2n+3)-(2n+1)}{2n+3} = \dfrac{2}{2n+3} & \\ \text{donc :} & \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1-\dfrac{u_n}{2n+3}\right) & \geqslant & \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\dfrac{2}{2n+3} = \dfrac{2\ u_n^2\ u_n^{2n}}{(2n+3)!} & \textit{(car } u_n^{2n+2}\geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

Enfin, comme $u_n \geqslant 1$ alors : $u_n^2 \geqslant 1$ (la fonction élévation au carré est croissante sur $[0,+\infty[$).

$$\boxed{\text{Finalement : } e^{-u_n} \geqslant \frac{2\,(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \times u_n^2 \geqslant \frac{2\,(u_n)^{2n}}{(2n+3)!}.}$$

- Toutes les quantités étant strictement positives et la fonction inverse étant décroissante sur $]0,+\infty[$ :

$$\frac{(2n+3)!}{2\,(u_n)^{2n}} \geqslant e^{u_n} \geqslant \frac{(2n)!}{(u_n)^{2n}}$$

En multipliant de part et d'autre par $(u_n)^{2n} \geqslant 0$ :

$$\cancel{(u_n)^{2n}}\,\frac{(2n+3)!}{2\,\cancel{(u_n)^{2n}}} \geqslant (u_n)^{2n}\,e^{u_n} \geqslant \cancel{(u_n)^{2n}}\,\frac{(2n)!}{\cancel{(u_n)^{2n}}}$$

$$\boxed{(2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\,e^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}}$$

□

***10.*** On pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $w_n = \dfrac{u_n}{2n}$.

***a)*** Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n e^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} (2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\,e^{u_n} &\leqslant \frac{(2n+3)!}{2} \\ &\leqslant (2n+3)\,(2n+2)\,(2n+1)\,\frac{(2n)!}{2} \\ &\leqslant (2n+3)^3\,\frac{(2n)!}{2} && \textit{(car } 2n+2 \leqslant 2n+3 \textit{ et } 2n+1 \leqslant 2n+3\textit{)} \end{aligned}$$

- On en déduit, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2n}}$ sur $[0,+\infty[$ :

$$\Big((2n)!\Big)^{\frac{1}{2n}} \quad \leqslant \quad \Big(\ (u_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{u_n}\ \Big)^{\frac{1}{2n}} \quad \leqslant \quad \left((2n+3)^3\ \frac{(2n)!}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

puis en multipliant par $\frac{1}{2n} > 0$ :

$$\frac{\Big((2n)!\Big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \quad \leqslant \quad \frac{\Big(\ (u_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{u_n}\ \Big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \quad \leqslant \quad \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\ \Big((2n)!\Big)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{2}{2n}$$

- On remarque enfin :

$$\frac{\Big(\ (u_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{u_n}\ \Big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \quad = \quad \frac{\Big(\ (u_n)^{2n}\ \Big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\ (\mathrm{e}^{u_n})^{\frac{1}{2n}} \quad = \quad \frac{u_n}{2n}\ \mathrm{e}^{\frac{u_n}{2n}} \quad = \quad w_n\ \mathrm{e}^{w_n}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \ \leqslant\ w_n\mathrm{e}^{w_n}\ \leqslant\ \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.}$$

□

***b)*** En déduire que la suite $(g(w_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\alpha$, la fonction $g$ et le réel $\alpha$ étant définis dans la question ***7***.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$g(w_n) \ = \ w_n + \ln(w_n) + 1$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \quad \leqslant \quad w_n\,\mathrm{e}^{w_n} \quad \leqslant \quad \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}$$

donc $\ln\left(\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \ \leqslant\ \ln(w_n\,\mathrm{e}^{w_n}) \ \leqslant\ \ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right)$ *(par croissance de* $\ln$ *sur* $]0,+\infty[$*)*

d'où $\ln\left(\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \ \leqslant\ \ln(w_n) + w_n \ \leqslant\ \ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right)$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \ln\left(\frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) \ \leqslant\ g(w_n) - 1 \ \leqslant\ \ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right).}$$

- D'après la question ***6*** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$.
  Autrement dit, en notant $(v_n)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

on a démontré : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}^{-1}$.
Comme $(v_{2n})$ est une sous-suite de $(v_n)$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \mathrm{e}^{-1}$.

Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n} = \mathrm{e}^{-1}$.

$$\boxed{\text{Par continuité de ln en } \mathrm{e}^{-1}\text{, on obtient : } \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) = \ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1.}$$

- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right) + \ln\left(\frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right)$$

Or :

$$\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right) = \frac{3\ln(2n+3)}{2n} - \frac{\ln(2)}{2n}$$

De plus, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln(2n+3)}{2n} = 0$. Par ailleurs : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{2n} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{\big((2n)!\big)^{\frac{1}{2n}}}{2n}\right) = -1.}$$

- Par théorème d'encadrement, on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(w_n) - 1 = -1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} g(w_n) = 0.}$$

- Par continuité de la fonction $g^{-1}$ en $0 \in \,]-\infty, +\infty[$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} g^{-1}\big(g(w_n)\big) & = & g^{-1}(0) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n & & \alpha \end{array}$$

En effet, par définition de $\alpha$ : $g(\alpha) = 0$. D'où : $\alpha = g^{-1}(0)$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha}$$

□

***11.*** En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*Démonstration.*
D'après la question précédente : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \alpha$.
Or, d'après la question ***10.*** : $\alpha > \mathrm{e}^{-2}$. En particulier : $\alpha \neq 0$. D'où :

$$\begin{array}{rccc} & w_n & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \alpha \\ \text{donc} & \dfrac{u_n}{2n} & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \alpha \\ \text{d'où} & u_n & \underset{n\to+\infty}{\sim} & \alpha\, 2\, n \end{array}$$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\alpha\, n}$$

□

# Problème 3 : Somme d'une série de Riemann usuelle

Le but de ce problème est d'établir la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ et de montrer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \; = \; \frac{\pi^2}{6}$$

Les deux méthodes proposées ci-dessous doivent évidemment être traitées indépendamment l'une de l'autre.

## Méthode 1 - Utilisation d'un polynôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

***1.*** On considère le polynôme $P$ défini par : $P(X) = 2 \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

***a)*** À l'aide de la formule du binôme, démontrer : $P\left(X^2\right) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}$.

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1} \\
= \ & \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 1^{2n+1-k}\, X^k \; - \; \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k}\, X^k \\
= \ & \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k \; - \; \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1}\, \frac{1}{(-1)^k}\, X^k \\
= \ & \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k \cancel{-} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cancel{(-1)}\, (-1)^k\, X^k && \textit{(car } (-1)^{2n+1} = -1 \textit{ et } \tfrac{1}{(-1)^k} = (-1)^k \textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(1 + (-1)^k\right) X^k \\
= \ & \sum_{\substack{k\,=\,0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(1 + (-1)^k\right) X^{2k} \; + \; \cancel{\sum_{\substack{k\,=\,0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(1 + (-1)^k\right) X^{2k}} \\
= \ & \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} \left(1 + (-1)^{2j}\right) X^{2j} && (*) \\
= \ & \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} \; 2\, X^{2j} \\
= \ & 2 \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} \, X^{2j} \; = \; P\left(X^2\right)
\end{aligned}$$

La ligne $(*)$ est obtenu par un changement d'indice. Comme $k$ est pair, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2j$. Il s'agit alors de savoir dans quel intervalle varie $j$ si $k \in [\![0, 2n+1]\!]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant k \leqslant 2n+1 \\ k = 2j \\ j \text{ entier} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant 2j \leqslant 2n+1 \\ j \text{ entier} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant j \leqslant n + \frac{1}{2} \\ j \text{ entier} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \; j \in [\![0, n]\!] \right.$$

$$\boxed{P\left(X^2\right) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}}$$

□

***b)*** En déduire que les racines de $P$ sont les réels $\dfrac{-1}{\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

*Démonstration.*
Dans toute la suite, notons $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par :

$$Q(X) \ = \ P\big(X^2\big)$$

- Commençons par déterminer les racines complexes de $Q$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcll}
z \text{ racine de } Q & \Leftrightarrow & Q(z) = 0 & \\
& \Leftrightarrow & (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1} \ = \ 0 & \\
& \Leftrightarrow & (z+1)^{2n+1} \ = \ (z-1)^{2n+1} & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} (z+1)^{2n+1} \ = \ (z-1)^{2n+1} \\ z \neq 1 \end{array}\right. & \textit{(le cas } z = 1 \textit{ est exclu car } (1+1)^{2n+1} \neq (1-1)^{2n+1}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{2n+1} \ = \ 1 \\ z \neq 1 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{z+1}{z-1} \text{ est une racine } (2n+1)^{\text{ème}} \text{ de l'unité} \\ z \neq 1 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![0, 2n]\!], \ \dfrac{z+1}{z-1} \ = \ e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}} \\ z \neq 1 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![0, 2n]\!], \ z+1 \ = \ e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}} \ (z-1) \\ z \neq 1 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![0, 2n]\!], \ z\left(1 - e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}}\right) \ = \ -1 - e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}} \\ z \neq 1 \end{array}\right. & \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![1, 2n]\!], \ z\left(1 - e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}}\right) \ = \ -1 - e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}} \\ z \neq 1 \end{array}\right. & \textit{(car l'égalité n'est pas vérifiée pour } k = 0 \textit{ puisque } 0 \neq -2\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \exists k \in [\![1, 2n]\!], \ z \ = \ -\dfrac{1 + e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}}}{1 - e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}}} \\ z \neq 1 \end{array}\right. &
\end{array}$$

Enfin, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$ :

$$\begin{array}{rcl}
-\dfrac{1 + e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}}}{1 - e^{i\,\frac{2\,k\,\pi}{2n+1}}} & = & -\dfrac{\cancel{e^{i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}}}}{\cancel{e^{i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}}}} \ \dfrac{e^{-i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}} + e^{i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}}}{e^{-i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}} - e^{i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}}} \\[4mm]
& = & \dfrac{e^{i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}} + e^{-i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}}}{2} \times \dfrac{2\,i}{e^{i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}} - e^{-i\,\frac{k\,\pi}{2n+1}}} \ \dfrac{1}{i} \\[4mm]
& = & \dfrac{\cos\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)}{i\ \sin\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)} \ = \ \dfrac{1}{i\ \tan\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)}
\end{array}$$

- Remarquons alors :
$$\begin{array}{rcl} z \text{ racine de } Q & \Leftrightarrow & Q(z) = 0 \\ & \Leftrightarrow & P\left(z^2\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & z^2 \text{ racine de } P \end{array}$$
Or, d'après ce qui précède, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{i\ \tan\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)}$ est racine de $Q$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1, 2n]\!],\ \left(\dfrac{1}{i\ \tan\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)}\right)^2 = \dfrac{-1}{\left(\tan\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)\right)^2} \text{ est racine de } P.}$$

- Comme $P$ est un polynôme de degré $n$, $P$ admet au plus $n$ racines. Si les $n$ racines trouvées ci-dessus sont distinctes, ce seront alors les seules racines de $P$. Démontrons que c'est le cas.

  Dans la suite, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, on note :
$$u_k = \frac{k\,\pi}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad z_k = \frac{-1}{\left(\tan\left(\frac{k\,\pi}{2n+1}\right)\right)^2}$$
  Remarquons :
$$\begin{array}{lll} & u_1 < u_2 < \dots < u_{2n-1} < u_{2n} & \\ \text{donc} & \tan(u_1) < \dots < \tan(u_{2n}) & \textit{(car } \tan \textit{ est une fonction strictement croissante sur } ]0, \frac{\pi}{2}[\textit{)} \\ \text{donc} & \left(\tan(u_1)\right)^2 < \dots < \left(\tan(u_{2n})\right)^2 & \textit{(car la fonction élévation au carré est strictement croissante sur } [0, +\infty[ \textit{ et que toutes les quantités précédentes sont positives)} \\ \text{donc} & \dfrac{-1}{\left(\tan(u_1)\right)^2} < \dots < \dfrac{-1}{\left(\tan(u_{2n})\right)^2} & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \frac{-1}{x} \textit{ sur } ]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que les réels } z_1, \dots, z_n \text{ sont distincts et sont donc les seules racines de } P.}$$ □

***c)*** Justifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

*Démonstration.*

- Le polynôme $P$ admet $n$ racines distinctes. Le coefficient de son terme de plus haut degré est :
$$2\binom{2n+1}{2n} = 2\ \frac{(2n+1)!}{(2n)!\ 1!} = 2\ \frac{(2n+1)\ \cancel{((2n)!)}}{\cancel{(2n)}!\ 1!} = 2\ (2n+1)$$
  On peut donc le factoriser comme suit :
$$\begin{array}{rcll} P(X) & = & 2\ (2n+1)\ (X - z_1)\ \dots\ (X - z_n) & \\ & = & 2\ (2n+1)\ \left(X^n - \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k\right) & \textit{(en développant le produit ci-dessus)} \end{array}$$

- Ainsi, $-2\,(2n+1)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right)$ est le coefficient du terme de degré $n-1$ de $P$.

  En revenant à la définition de $P$, on obtient :
$$-2\,(2n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = 2\binom{2n+1}{2\,(n-1)}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-z_k) &= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\,(2n+1)} \binom{2n+1}{2n-2} \\
&= \frac{1}{2n+1} \; \frac{(2n+1)!}{(2n-2)!\ 3!} \\
&= \frac{1}{2n+1} \; \frac{(2n+1)\ (2n)\ (2n-1)\ \left(\cancel{(2n-2)!}\right)}{\cancel{(2n-2)!}\ 3!} \\
&= \frac{(2n)\,(2n-1)}{6} = \frac{n\,(2n-1)}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (-z_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n\,(2n-1)}{3}}$$

**Commentaire**

- L'énoncé demande de « Justifier » le résultat. Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et / ou éventuellement moins formelles.
- La formulation de la question renseigne donc sur les attentes de celle-ci. Il semble illusoire d'effectuer un calcul technique de la somme considérée. Il s'agit plutôt d'obtenir le résultat immédiatement ou presque, via un argument qu'il faut trouver. Il s'agit ici d'utiliser une relation entre coefficients et racines (que l'on démontre ici rapidement).

$\square$

***2.*** Montrer : $\forall x \in \ ]0, \frac{\pi}{2}[, \ \dfrac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \dfrac{1}{\tan^2(x)}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$.

*Démonstration.*

- Soit $x \in \ ]0, \frac{\pi}{2}[$. On a :

$$1 + \frac{1}{(\tan(x))^2} = 1 + \frac{(\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = \frac{(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = \frac{1}{(\sin(x))^2}$$

**Commentaire**

Ce début de question est particulièrement simple puisqu'il suffit de revenir à la définition de la fonction tangente. Cette question fait suite à la question ***1.b)*** qui est, quant à elle, beaucoup plus technique. Il faut comprendre que les sujets ne sont pas forcément de difficulté progressive. Cela signifie qu'une question plus simple (au moins en partie) peut apparaître après plusieurs questions difficiles. Pour maximiser ses points aux concours, il faut prendre le maximum de points sur les questions que l'on traite. Cela revient à dire qu'il faut traiter en priorité les questions (ou parties de questions) qui semblent les plus abordables. Il est tout à fait autorisé de passer plusieurs questions (en laissant la place sur la copie pour éventuellement y revenir plus tard) avant de faire une nouvelle question de l'exercice.

- On a ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2} &= \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{\left(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2}\right) \quad \textit{(d'après le point précédent et car : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k \in \,]0, \tfrac{\pi}{2}[\textit{)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2}\\ &= n + \frac{n\,(2n-1)}{3}\\ &= n\left(1+\frac{(2n-1)}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2} = n\,\frac{(2n+2)}{3} = 2\,n\,\frac{n+1}{3}.}$$

□

*3.* Montrer : $\forall x \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$. En déduire l'encadrement suivant :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}.$$

*Démonstration.*

- La fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
En effet, elle est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ :

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{donc} \quad \sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x) \leqslant 0$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction sin est située, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, en dessous de ses tangentes.
C'est notamment le cas pour la tangente au point d'abscisse 0 qui est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= \sin(0) + \sin'(0)\,(x-0)\\ &= \cos(0)\,x\\ &= x\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[,\ \sin(x) \leqslant x.}$$

- De même la fonction tan est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
En effet, elle est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ :

$$\tan'(x) = 1 + \big(\tan(x)\big)^2 \quad \text{donc} \quad \tan''(x) = 2\,\tan(x)\,\Big(1+\big(\tan(x)\big)^2\Big) \geqslant 0$$

On en déduit que la courbe représentative de la fonction tan est située, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, au dessous de ses tangentes.
C'est notamment le cas pour la tangente au point d'abscisse 0 qui est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= \tan(0) + \tan'(0)\,(x-0)\\ &= \Big(1+\big(\tan(0)\big)^2\Big)\,x\\ &= x\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}[,\ x \leqslant \tan(x).}$$

**Commentaire**

- Rappelons que l'étude des fonctions convexes est au programme de `PCSI` et de `MPSI - MPII`. Il est donc important de comprendre les mécanismes utilisés dans la rédaction de la question précédente.
- L'inégalité demandé dans l'énoncé exprime le fait que la courbe représentative de la fonction *tan* se situe au-dessus de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x$. Cette dernière fonction est un polynôme de degré 1 (fonction affine) et sa représentation graphique est donc une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité car ces inégalités permettent justement de comparer les positions relatives d'une courbe et de ses tangentes (ou éventuellement de ses cordes/sécantes).
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$. On considère qu'une étude de fonction est une question basique. Il serait donc anormal qu'un candidat ne sache pas comment traiter ce début de question ***3***.

- On vient de démontrer, pour tout $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ :

$$\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{\sin(x)} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{\tan(x)}$$ *(car la fonction inverse est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$)*

$$\text{donc} \quad \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{x}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^2$$ *(par croissance de la fonction élévation au carré sur $[0, +\infty[$)*

On en déduit :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{1}{(\sin(u_k))^2} \geqslant \frac{1}{u_k^2} \geqslant \frac{1}{(\tan(u_k))^2}$$

En sommant ces $n$ inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sin(u_k))^2} & \geqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^2} & \geqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\tan(u_k))^2} \\ \| & & \| & & \| \\ 2\,n\,\dfrac{n+1}{3} & & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi^2}\frac{(2n+1)^2}{k^2} & & n\,\dfrac{2n-1}{3} \end{array}$$

*(d'après les questions **1.c)** et **2** ainsi que par définition des éléments de la famille $(u_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$)*

$$\boxed{\text{On obtient bien, comme attendu : } \frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3}.}$$

□

***4.*** Établir que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

*Démonstration.*

- En multipliant de part et d'autre les membres de l'inégalité précédente par $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3} \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$$

- Or :

  × $\dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{2\,n^2}{(2n)^2} = \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{2\,\cancel{n^2}}{4\,\cancel{n^2}} = \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$

  × $\dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{2n(n+1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{2n^2}{(2n)^2} = \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{2\,\cancel{n^2}}{4\,\cancel{n^2}} = \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$

  On en déduit, par théorème d'encadrement, que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et qu'elle est de limite $\dfrac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge et : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

□

## Méthode 2 - Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\ dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ \cos^{2n}(t)\ dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\ J_n$$

***5.*** Calculer $I_0$, $J_0$ et $K_0$.

*Démonstration.*

- Remarquons tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_n$ et $J_n$ sont bien définies car les intégrandes $t \mapsto \cos^{2n+1}(t)$ et $t \mapsto t^2\ \cos^{2n+1}(t)$ sont continus sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Ensuite :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = [\ t\ ]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$$

- On calcule :

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^0(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - 0 = \frac{\pi^3}{3 \times 2^3}$$

$$\boxed{J_0 = \frac{\pi^3}{3 \times 8} = \frac{\pi^3}{24}}$$

- Enfin :

$$K_0 = \frac{4^0\,(0!)^2}{(2 \times 0)!}\ J_0 = J_0 = \frac{\pi^3}{24}$$

$$\boxed{K_0 = \frac{\pi^3}{24}}$$

□

***6.*** ***a)*** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\ I_n$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(n+1)}(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \cos^{2n+1}(t)\ dt$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \cos^{2n+1}(t) & & u'(t) & = & -(2n+1)\,\sin(t)\,\cos^{2n}(t) \\ v'(t) & = & \cos(t) & & v(t) & = & \sin(t) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On obtient :

$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & \left[\ \sin(t)\,\cos^{2n+1}(t)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-(2n+1)\,\sin(t)\,\cos^{2n}(t)\big)\,\sin(t)\,dt \\ & = & \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos^{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \cancel{\sin(0)\,\cos^{2n+1}(0)} + (2n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,\cos^{2n}(t)\,dt \\ & = & (2n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos^2(t)\big)\,\cos^{2n}(t)\,dt \\ & = & (2n+1)\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t)\,dt\right) \\ & = & (2n+1)\,(I_n - I_{n+1}) \\ & = & (2n+1)\,I_n - (2n+1)\,I_{n+1} \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rrcl} & I_{n+1} & = & (2n+1)\,I_n - (2n+1)\,I_{n+1} \\ \text{donc} & (2n+2)\,I_{n+1} & = & (2n+1)\,I_n \\ \text{d'où} & I_{n+1} & = & \dfrac{2n+1}{2n+2}\,I_n \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\,I_n}$$

□

***b)*** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} I_0$.

*Démonstration.*
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)\ :\ I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\ I_0$.

- **Initialisation** :
  On remarque :

$$\frac{(2\times 0)!}{4^0\,(0!)^2}\ I_0 \ = \ 1 \times I_0 \ = \ I_0$$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $I_{n+1} = \dfrac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2} I_0$).

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2}\, I_n \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\, I_0 \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n+2)\, 4^n\, (n!)^2}\, I_0 \end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2} &= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2} \\ &= \frac{(2n+2)\,(2n+1)!}{4 \times 4^n \big((n+1) \times n!\big)^2} \\ &= \frac{(2n+2)\,(2n+1)!}{4 \times 4^n \times (n+1)^2\,(n!)^2} \\ &= \frac{2n+2}{4\,(n+1)^2} \times \frac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2} \\ &= \frac{2\,(n+1)}{4\,(n+1)^2} \times \frac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2} \\ &= \frac{1}{2\,(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{4^n (n!)^2} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n+2)\, 4^n\, (n!)^2} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$I_{n+1} = \frac{(2n+1)!}{(2n+2)\, 4^n\, (n!)^2}\, I_0 = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\,\big((n+1)!\big)^2}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} I_0.}$$

□

***7.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

***a)*** Démontrer la relation : $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

*Démonstration.*
D'après l'énoncé :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\ dt$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{lll} u(t) = \cos^{2n}(t) & & u'(t) = -(2n)\,\sin(t)\,\cos^{2n-1}(t) \\ v'(t) = 1 & & v(t) = t \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\ t\,\cos^{2n}(t)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(t)\,\cos^{2n-1}(t)\,dt \\ &= \cancel{\frac{\pi}{2}\,\cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \cancel{0 \times \cos^{2n}(0)} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(t)\,\cos^{2n-1}(t)\,dt \\ &= 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\sin(t)\,\cos^{2n-1}(t)\,dt \end{aligned}$$

On procède de nouveau par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{lll} u(t) = \sin(t)\,\cos^{2n-1}(t) & & u'(t) = \cos^{2n}(t) - (2n-1)\,\sin^2(t)\,\cos^{2n-2}(t) \\ v'(t) = t & & v(t) = \dfrac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On obtient :

$$I_n = 2n \left( \left[ \frac{t^2}{2}\,\sin(t)\,\cos^{2n-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left(\cos^{2n}(t) - (2n-1)\,\sin^2(t)\,\cos^{2n-2}(t)\right) dt \right)$$

Or :

$$\left[ \frac{t^2}{2}\,\sin(t)\,\cos^{2n-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cancel{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\,\cos^{2n-1}}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cancel{\frac{0^2}{2}\,\sin(0)\,\cos^{2n-1}}(0) = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_n &= 2n \times \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left(\cos^{2n}(t) - (2n-1)\,\sin^2(t)\,\cos^{2n-2}(t)\right) dt \\ &= -n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\cos^{2n}(t)\,dt + n\,(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\sin^2(t)\,\cos^{2n-2}(t)\,dt \\ &= -n\,J_n + n\,(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left(1 - \cos^2(t)\right) \cos^{2n-2}(t)\,dt \\ &= -n\,J_n + n\,(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\cos^{2n-2}(t)\,dt - n\,(2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\cos^{2n}(t)\,dt \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I_n &= -n\,J_n + n\,(2n-1)\,J_{n-1} - n\,(2n-1)\,J_n \\ &= n\,(2n-1)\,J_{n-1} - n\,\big(\cancel{1} + (2n-\cancel{1})\big)\,J_n \\ &= n\,(2n-1)\,J_{n-1} - n \times 2n\,J_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } I_n = n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2\,J_n.}$$

□

***b)*** En déduire : $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$, puis : $\dfrac{\pi}{4}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = K_0 - K_n$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, par définition de $K_n$ et $K_{n-1}$ :

$$\begin{aligned} K_{n-1} - K_n &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{\left(2(n-1)\right)!}\,J_{n-1} - \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\,J_n \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-2)!}\,J_{n-1} - \frac{4 \times 4^{n-1} \times n^2 \times \left((n-1)!\right)^2}{2n \times (2n-1) \times (2n-2)!}\,J_n \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-2)!}\left(J_{n-1} - \frac{4\,n^2}{2n\,(2n-1)}\,J_n\right) \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-2)!}\,\frac{1}{n\,(2n-1)}\,\left(n\,(2n-1)\,J_{n-1} - 2\,n^2\,J_n\right) \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{(2n-2)!}\,\frac{1}{n\,(2n-1)}\,I_n & \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{n\,(2n-1)!}\,I_n \\ &= \frac{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2}{n\,(2n-1)!} \times \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,I_0 & \textit{(d'après \textbf{6.b)})} \\ &= \frac{2\,\cancel{n}}{\cancel{n} \times 4\,n^2}\,I_0 \\ &= \frac{1}{2n^2} \times \frac{\pi}{2} & \textit{(d'après \textbf{5.})} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On somme les égalités précédentes pour $j$ variant de 1 à $n$. On obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} (K_{j-1} - K_j) \ = \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\pi}{4j^2}$$

  De plus :
  × d'une part :

$$\sum_{j=1}^{n} (K_{j-1} - K_j) \ = \ \sum_{j=1}^{n} K_{j-1} - \sum_{j=1}^{n} K_j \ = \ \sum_{j=0}^{n-1} K_j - \sum_{j=1}^{n} K_j \ = \ K_0 - K_n$$

  × d'autre part :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\pi}{4j^2} \ = \ \frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ K_0 - K_n = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.}$$

□

***8.*** Montrer : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \ \sin(t)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

*Démonstration.*

- la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
  On en déduit que la courbe représentative de la fonction sin est située, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, au dessus de sa corde d'extrémités $\big(0, \sin(0)\big)$ et $\big(\frac{\pi}{2}, \sin(\frac{\pi}{2})\big)$, c'est-à-dire sa corde d'extrémités $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$.
  Il s'agit de la droite d'équation : $y = a\,(x - 0) + b$ où les réels $a$ et $b$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcll} 0 \times a & + & b & = & 0 & \textit{(la droite passe par le point } (0,0)\textit{)} \\ \dfrac{\pi}{2}\ a & + & b & = & 1 & \textit{(la droite passe par le point } (\frac{\pi}{2}, 1)\textit{)} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & b & = & 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\ a & + & b & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\ a & = & 1 \end{array} \right.$$

  Cette corde est donc la droite d'équation $y = \dfrac{2}{\pi}\ x$. Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ :

$$\sin(x) \ \geqslant \ \frac{2}{\pi}\ x$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \frac{\pi}{2}\ \sin(x) \geqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle : $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\ dt$.
  - × Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. D'après le point précédent :

$$\begin{array}{lccccc} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & \dfrac{\pi}{2}\ \sin(t) & \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & t^2 & \leqslant & \dfrac{\pi^2}{4}\ \sin^2(t) & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ \text{d'où} & 0 & \leqslant & t^2\cos^{2n}(t) & \leqslant & \dfrac{\pi^2}{4}\ \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t) & \textit{(car : } \cos^{2n}(t) \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

  - × Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant \frac{\pi}{2}$) :

$$0 \ \leqslant\ \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\ dt}_{= J_n} \ \leqslant\ \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t)\ dt$$

  - × De plus, d'après le résultat de l'intégration par parties de la question ***6.a)*** :

$$I_{n+1} \ = \ (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t)\ dt$$

  Donc :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\ \cos^{2n}(t)\ dt & = & \dfrac{1}{2n+1}\ I_{n+1} & \\ & = & \dfrac{1}{2n+1} \times \dfrac{2n+1}{2n+2}\ I_n & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.a)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{2n+2}\ I_n \ = \ \dfrac{1}{2\,(n+1)}\ I_n & \end{array}$$

  On en déduit :

$$0 \ \leqslant\ J_n \ \leqslant\ \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{2\,(n+1)}\ I_n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{8\,(n+1)}\ I_n.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle : $K_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\ J_n$.
  - × D'après le point précédent :

$$\begin{array}{lccccl} & 0 & \leqslant & J_n & \leqslant & \dfrac{\pi^2}{8\,(n+1)}\ I_n \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\ J_n & \leqslant & \dfrac{\pi^2}{8\,(n+1)} \times \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\ I_n \quad \textit{(car : } \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} \geqslant 0\textit{)} \\ \text{d'où} & 0 & \leqslant & K_n & \leqslant & \dfrac{\pi^2}{8\,(n+1)} \times \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\ I_n \end{array}$$

× Or :

$$\begin{aligned} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}\, I_n &= \frac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\, I_0 \quad \textit{(d'après \textbf{6.b)})} \\ &= I_0 = \frac{\pi}{2} \quad \textit{(d'après \textbf{5.})} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^2}{8\,(n+1)} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16\,(n+1)}.}$$

□

***9.*** Déduire des résultats de cette partie que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

*Démonstration.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***7.b)*** :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{\pi}\,(K_0 - K_n) \qquad (*)$$

- Or, d'après la question précédente :

$$0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16\,(n+1)}$$

  On remarque :
  × d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,
  × d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi^3}{16\,(n+1)} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} K_n = 0.}$$

- On en déduit en particulier que la suite $\left(\frac{4}{\pi}\,(K_0 - K_n)\right)$ est convergente. Ainsi, d'après $(*)$, la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ l'est aussi.

$$\boxed{\text{On en conclut que la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \text{ est convergente.}}$$

- En passant à la limite dans l'égalité $(*)$, on obtient de plus :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{4}{\pi}\,(K_0 - 0) \\ &= \frac{4}{\pi}\,\frac{\pi^3}{24} \quad \textit{(d'après \textbf{5.})} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

□