
DS2

Avertissements

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- Le Problème 1 est commun et devra être traité par tous les élèves.
Le Problème 2 est laissé au choix de l'élève.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit.**

Problème 1 - Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stables par multiplication

- Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n .
- On note 0_n la matrice nulle carrée de taille n , et I_n la matrice identité de taille n . On note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i, j) qui vaut 1. On rappelle que la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dite canonique.
- Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **trace** de A , et on note $\text{tr}(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

- On rappelle que pour toutes matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice produit AB est définie par $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Ainsi en particulier, pour tous $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $E_{i,j} E_{k,\ell} = 0_n$ si $j \neq k$, et $E_{i,j} E_{j,\ell} = E_{i,\ell}$.

Partie I - Préliminaires

I.1. Propriétés de la trace.

- Vérifier que l'application $\text{tr} : M \mapsto \text{tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- En déduire que plus généralement, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_A &: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto \text{tr}(AM) \end{aligned}$$

est encore une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cette notation φ_A sera conservée dans toute la suite du problème.

- Montrer : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

I.2. Représentation des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \varphi_A$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{tr}(AM)$$

Indication : on pourra faire intervenir les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie II - Détermination des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stables par multiplication

Dans cette partie, on considère un hyperplan \mathcal{H} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que \mathcal{H} est **stable par multiplication**, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (H_1, H_2) \in \mathcal{H}^2, H_1 H_2 \in \mathcal{H} \quad (*)$$

II.1. Un exemple.

Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2 est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et qu'il est stable par multiplication.

II.2. Le but de cette question est de montrer que \mathcal{H} contient la matrice identité I_n . On raisonne par l'absurde et on suppose donc que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que $I_n \notin \mathcal{H}$.

- a) Quelle est la dimension de \mathcal{H} ?
- b) Justifier alors : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \text{Vect}(I_n)$.
- c) En considérant la décomposition d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la somme directe précédente, montrer que si $M^2 \in \mathcal{H}$, alors $M \in \mathcal{H}$.
- d) En déduire que \mathcal{H} contient toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$.
- e) En déduire que \mathcal{H} contient toutes les matrices élémentaires $E_{i,i}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- f) Aboutir à une contradiction et conclure.

II.3. Justifier qu'il existe une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$.

Y a-t-il unicité d'une telle matrice A ?

Dans toute la suite, A désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$.

On note alors $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A , et on considère un élément non nul Y_1 dans $\text{Im}(f)$, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note enfin P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base \mathcal{B} .

II.4. Soient $B \in \mathcal{H}$, et $g : X \mapsto BX$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à B .

a) Montrer que $\mathcal{H} \subset \text{Ker}(\varphi_{BA})$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA = \lambda A$.

b) Justifier que la matrice B' de g dans la base \mathcal{B} de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour première colonne $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Quelle relation relie les matrices B, B' , et P ?

II.5. On considère désormais l'application suivante :

$$c : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto P^{-1}MP$$

- a) Montrer que c est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que la restriction de c à \mathcal{H} est à valeurs dans un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - n + 1$.
- c) En déduire que $n = 2$ et que \mathcal{H} est isomorphe, via l'application c , au sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2.

Problème 2A (INP) - indice de cyclicité d'un endomorphisme

- Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On note n sa dimension, et on suppose que $n \geq 2$.
- Pour tout endomorphisme f de E , on note $\det(f)$ son déterminant et $\text{tr}(f)$ sa trace. En notant id l'endomorphisme identité de E , on définit $f^0 = \text{id}$ et, pour tout k dans \mathbb{N} , $f^{k+1} = f \circ f^k$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans \mathbb{K} .

Étant donné un vecteur non nul u et un endomorphisme f de E , on définit un entier $r(f, u)$ à partir des itérées du vecteur u par l'endomorphisme f . Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme f , liées à la valeur de l'entier $r(f, u)$.

1. Soient u un vecteur non nul de E , et f un endomorphisme de E .

- a) Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $(u, f(u), \dots, f^k(u))$ soit liée.

Dans toute la suite du problème, on note $r(f, u)$ le plus petit de ces entiers :

$$r(f, u) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid (u, f(u), \dots, f^k(u)) \text{ est liée}\}$$

- b) Justifier l'encadrement : $1 \leq r(f, u) \leq n$.

2. *Étude d'un exemple.*

Dans cette question, on considère l'endomorphisme g de \mathbb{R}^4 représenté dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 par la matrice :

$$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Calculer $g(e_1)$, $g^2(e_1)$ et $g^3(e_1)$.
- b) Montrer que la famille $(e_1, g(e_1), g^2(e_1))$ est libre.
- c) Déterminer trois réels α, β, γ tels que $g^3(e_1) = \alpha \cdot g^2(e_1) + \beta \cdot g(e_1) + \gamma \cdot e_1$. En déduire $r(g, e_1)$.

On reprend le cas général où E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension $n \geq 2$, où f un endomorphisme de E , et où u un vecteur non nul de E .

3. Étude du cas où $r(f, u) = 1$.
- Montrer que $r(f, u) = 1$ si et seulement si la droite $\text{Vect}(u)$ est stable par f .
 - On considère à nouveau l'exemple de l'endomorphisme g de \mathbb{R}^4 défini en question 2.
 - Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(g - \lambda \text{id}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.
On pourra envisager les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$ puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_3$.
 - Déterminer les noyaux $\text{Ker}(g - \text{id})$ et $\text{Ker}(g - 2\text{id})$.
 - En déduire tous les vecteurs non nuls v de \mathbb{R}^4 tels que $r(g, v) = 1$.
4. On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que $r(f, u) = n$.
- Montrer qu'alors la famille $\mathcal{B}(u) = (u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est une base de E .
 - Déterminer la matrice $M_{\mathcal{B}(u)}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}(u)$, en fonction des coordonnées $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $f^n(u)$ dans la base $\mathcal{B}(u)$.
 - Calculer $\det(f)$ et $\text{tr}(f)$ en fonction de $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.
5. On note $\mathcal{P}(f, u)$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que l'endomorphisme $P(f)$ vérifie $P(f)(u) = 0_E$.
- Montrer que $\mathcal{P}(f, u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, et vérifiant de plus la propriété suivante : $\forall P \in \mathcal{P}(f, u), \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in \mathcal{P}(f, u)$.
 - On désigne par $B(f, u)$ un polynôme non nul de $\mathcal{P}(f, u)$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(f, u)$.
 - Montrer que $\mathcal{P}(f, u)$ est l'ensemble des multiples de $B(f, u)$.
On pourra considérer la division euclidienne d'un polynôme P de $\mathcal{P}(f, u)$ par $B(f, u)$.
 - Montrer que le polynôme $B(f, u)$ est de degré $r(f, u)$.
 - Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(g, e_1)$, dans le cas où g est l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini en question 2, et où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^4 .
 - Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(f, u)$ dans le cas où $r(f, u) = n$, en fonction des coordonnées $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $f^n(u)$ dans la base $\mathcal{B}(u)$, comme définies en question 4.
6. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- Montrer que pour tout $u \in E$ non nul, le polynôme $B(f, u)$, comme défini en question 5b, est un monôme.
 - Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - × Il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f, u) = n$.
 - × $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
7. Dans cette question, on suppose qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. On note $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ une telle base, et on pose $M_{\mathcal{W}}(f) = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, de sorte que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(w_k) = \lambda_k w_k$.
- On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f, u) = n$. On note $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k$.
 - Écrire la matrice de passage de la base \mathcal{W} à la base $\mathcal{B}(u)$, comme définie en question 4.
 - En déduire que les λ_k , pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont deux à deux distincts, et que les α_k , pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont tous non nuls.
 - On suppose que les λ_k , pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont deux à deux distincts.
Montrer qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f, u) = n$.

Problème 2B (Mines) - sommes de projecteurs

- Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$.
- Le but de ce problème est de caractériser les endomorphismes de E qui sont la somme d'un nombre fini de projecteurs de E .
- On rappelle qu'un projecteur de E est un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$. On a alors $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, et p est la projection vectorielle sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.
- On rappelle enfin que pour tout endomorphisme f de E , on appelle trace de f , notée $\text{tr}(f)$, la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E .

Partie 1 - Une condition nécessaire.

1. Rappeler pourquoi la trace d'un endomorphisme de E ne dépend pas du choix de la base.
2. Soit p un projecteur de E . Justifier que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.
3. Dans cette question, on suppose que $f = p_1 + p_2 + \dots + p_m$, où pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, p_k est un projecteur de E .
 - a) Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(p_1) + \text{Im}(p_2) + \dots + \text{Im}(p_m)$.
 - b) En déduire que $\text{tr}(f) \in \mathbb{N}$ et que $\text{tr}(f) \geq \text{rg}(f)$.

Partie 2 - Un résultat sur les endomorphismes non homothétiques

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E qui n'est pas une homothétie (c'est-à-dire qui n'est pas multiple de id_E).

4. a) Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que x et $f(x)$ ne sont pas proportionnels.
 b) Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & * & * & \dots & * \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & A \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right) \quad \text{où } A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

5. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une base \mathcal{C} de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|cccc} t & * & * & \dots & * \\ \hline * & & & & \\ * & & & & B \\ \vdots & & & & \\ * & & & & \end{array} \right) \quad \text{où } B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

On admettra dans ce qui suit que si $n \geq 3$, alors on peut choisir la base \mathcal{C} de sorte que la matrice B ci-dessus ne soit pas la matrice d'une homothétie.

6. Soient t_1, \dots, t_n des réels tels que $\text{tr}(f) = \sum_{k=1}^n t_k$.

En procédant par récurrence sur $n \geq 2$, démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a pour coefficients diagonaux les réels t_1, t_2, \dots, t_n .

Partie 3 - Décomposition en somme de projecteurs

On suppose dans cette partie que f est un endomorphisme non nul de E tel que $\text{tr}(f) \in \mathbb{N}$ et $\text{tr}(f) \geq \text{rg}(f)$. On pose $t = \text{tr}(f)$ et $r = \text{rg}(f)$.

7. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & (0) \\ \hline B & (0) \end{array} \right)$$

où A est une matrice carrée de taille r .

8. On suppose dans cette question que A n'est pas la matrice d'une homothétie.

a) À l'aide de la question 6, montrer qu'il existe une base \mathcal{B}' de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A' & (0) \\ \hline B' & (0) \end{array} \right)$$

où A' est une matrice carrée de taille r dont les coefficients diagonaux sont des entiers naturels non nuls.

b) En déduire que f est la somme de t projecteurs de rang 1.

On pourra faire intervenir, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la matrice P_i dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i -ème, égale à la i -ème colonne de $\frac{1}{t_i} M_{\mathcal{B}'}(f)$, où t_i est le i -ème coefficient diagonal de $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

9. On suppose maintenant que $A = \alpha I_r$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que si $\alpha = 1$, alors f est un projecteur.

b) Démontrer que si $\alpha \neq 1$, alors $\alpha > 1$, et en déduire que là encore, f est la somme d'un nombre fini de projecteurs.