DS2

Problème 1 - Hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stables par multiplication / 45

Partie I - Préliminaires

I.1. ***a)*** Vérifier que l'application $\mathrm{tr} : M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **2 pts :** tr **est linéaire**
- **1 pt :** tr **est à valeur dans** $\mathbb{R}$

b) En déduire que plus généralement, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_A & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & & M & \mapsto & \mathrm{tr}(AM) \end{array}$$

est encore une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** $tr\Big(A\ \big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)\Big) = tr\big(\lambda \cdot AM + \mu \cdot AN\big)\Big)$
- **1 pt : linéarité de la trace pour conclure**

c) Montrer : $\forall\, (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

- **2 pts : avec découpage des calculs de** $\mathrm{tr}(AB)$ **et** $\mathrm{tr}(BA)$ **ou tout en une fois**

I.2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \varphi_A$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$$

- **2 pts : analyse - si** $\varphi = \varphi_A$ **alors** $\varphi(E_{i,j}) = A_{j,i}$
- **2 pts : synthèse**
  - **1 pt : en posant** $\varphi(E_{i,j}) = A_{j,i}$**, on obtient** $\varphi_A(E_{i,j}) = \varphi(E_{i,j})$
  - **1 pt : égalité sur une base vaut égalité des applications linéaires**

Partie II - Détermination des hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stables par multiplication

Dans cette partie, on considère un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que $\mathcal{H}$ est **stable par multiplication**, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, (H_1, H_2) \in \mathcal{H}^2,\ H_1 \times H_2 \in \mathcal{H} \qquad (*)$$

II.1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2 est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et qu'il est stable par multiplication.

- **0 pt :** $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) \ \subset\ \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$**.**
- **1 pt :** $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\dim\big(\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})\big) \ =\ 3\ =\ 4-1\ =\ \dim\big(\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})\big) - 1$
- **1 pt : stabilité par multiplication** $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\0 & c_1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_2 & b_2\\0 & c_2\end{pmatrix} \ =\ \begin{pmatrix}a_1\ a_2 & a_1\ b_2 + b_1\ c_2\\0 & c_1\ c_2\end{pmatrix} \in \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$

II.2. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{H}$ contient la matrice identité I_n. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que $I_n \notin \mathcal{H}$.

a) Quelle est la dimension de $\mathcal{H}$?

- **1 pt :** $\dim\big(\mathcal{H}\big) = \dim\big(\mathscr{M}(\mathbb{R})\big) - 1 = n^2 - 1$

b) Justifier alors : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \text{Vect}\,(I_n)$.

- **1 pt :** $\dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\mathcal{H}\right) + \dim\left(\text{Vect}\,(I_n)\right)$
- **1 pt : comme** $I_n \notin \mathcal{H}$**, alors :** $\mathcal{H} \cap \text{Vect}\,(I_n) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$

c) En considérant la décomposition d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans la somme directe précédente, montrer que si $M^2 \in \mathcal{H}$, alors $M \in \mathcal{H}$.

- **0 pt :** $M = R + S$ **avec** $(R, S) \in \mathcal{H} \times \text{Vect}\,(I_n)$
- **1 pt :** $M^2 = R^2 + 2\,\alpha \cdot R + \alpha^2 \cdot I_n$
- **1 pt :** $R^2 + 2\,\alpha \cdot R \in \mathcal{H}$ **par stabilité par combinaison linéaire et produit**
- **1 pt : si** $\alpha \neq 0$ **alors** $I_n \in \mathcal{H}$**, impossible**

d) En déduire que $\mathcal{H}$ contient toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ avec $i \neq j$.

- **1 pt :** $\big(E_{i,j}\big)^2 = E_{i,j} \times E_{i,j} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in calH$ **car c'est un ev**
- **1 pt : donc, d'après la question précédente,** $E_{i,j} in \mathcal{H}$

e) En déduire que $\mathcal{H}$ contient toutes les matrices élémentaires $E_{i,i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

- **1 pt : d'après la question précédente :** $E_{i,j} \in \mathcal{H}$ **et** $E_{j,i} \in \mathcal{H}$
- **1 pt : comme** $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i}$ **et que** $\mathcal{H}$ **est stable par produit, alors :** $E_{i,i} \in \mathcal{H}$

f) Aboutir à une contradiction et conclure.

- **1 pt : comme** $\mathcal{H}$ **est stable par CL,** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}\left(\big(E_{i,j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) \subset \mathcal{H}$ **d'où égalité**
- **1 pt :** $n^2 - 1 = \dim\big(\mathcal{H}\big) = \dim\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big) = n^2$ **impossible**

II.3. Justifier qu'il existe une matrice non nulle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$.
Y a-t-il unicité d'une telle matrice A ?

- **1 pt :** $\mathcal{H}$ **est un hyperplan de** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **donc il existe** $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ **non nulle telle que :** $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi)$
- **1 pt : d'après** ***I.2*****, il existe** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **telle que :** $\varphi = \varphi_A$
- **0 pt :** $A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ **car sinon** $\varphi = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $\varphi_{2\,A}(M) = 2\,\varphi_A(M)$ **donc** $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A) = \text{Ker}(\varphi_{2\,A})$

Dans toute la suite, A **désigne une matrice non nulle de** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **telle que** $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$**.**
On note alors $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et on considère un élément non nul Y_1 dans $\text{Im}(f)$, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note enfin P la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$.

II.4. Soient $B \in \mathcal{H}$, et $g : X \mapsto BX$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à B.

a) Montrer que $\mathcal{H} \subset \text{Ker}(\varphi_{BA})$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA = \lambda A$.

- **1 pt :** $\varphi_{BA}(M) = \text{tr}(BA\,M) = \text{tr}\,\big(B\,(AM)\big) = \text{tr}\,\big((AM)\,B\big) = \varphi_A(MB) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$
(car comme $M \in \mathcal{H}$ **et** $B \in \mathcal{H}$ **alors** $MB \in \mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$**)**
- **0 pt :** $\dim\left(\text{Ker}(\varphi_{BA})\right) \geqslant n^2 - 1$

- **1 pt : si** $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_{BA})) = n^2 - 1$**, alors** $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi_{BA}) = \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ **et les formes linéaires sont donc égales**
- **1 pt : si** $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_{BA})) = n^2$**,** $\mathrm{Ker}\left(\varphi_{BA}\right) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **donc** $\varphi_{BA} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})} = 0 \cdot \varphi_A$**.**
- **0 pt : il existe donc** $\lambda \in \mathbb{R}$ **(**$\lambda = \alpha$ **ou** $\lambda = 0$**) tel que :** $\varphi_{BA} = \lambda \cdot \varphi_A$
- **1 pt :** $\left(BA\right)_{i,j} = \mathrm{tr}\left(BA\, E_{j,i}\right) = \mathrm{tr}\left(\lambda \cdot A\, E_{j,i}\right) = (\lambda\ A)_{i,j}$

b) Justifier que la matrice B' de g dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour première colonne $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **0 pt : la première colonne de la matrice de** g **dans la base** $\mathscr{B}$ **n'est autre que** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(g(Y_1)\big)$
- **1 pt : comme** $Y_1 \in \mathrm{Im}(f)$**, alors il existe** $X_1 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **tel que :** $Y_1 = f(X_1) = AX_1$
- **1 pt :** $g(Y_1) = BY_1 = B\ AX_1 = \lambda A\ X_1 = \lambda\ Y_1$

c) Quelle relation relie les matrices B, B', et P ?

- **1 pt :** $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(g\big) = P_{\mathscr{B}_c,\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(g\big) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}_c} = P \times B' \times P^{-1}$

II.5. On considère désormais l'application suivante :

$$c \ : \ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$$

a) Montrer que c est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** c **linéaire**
- **1 pt :** $M \in \mathrm{Ker}(c) \Leftrightarrow c(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow P^{-1}MP = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$
donc $\mathrm{Ker}(c) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$

b) Montrer que la restriction de c à $\mathcal{H}$ est à valeurs dans un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - n + 1$.

- **0 pt :** $c(B)$ **est une matrice dont la première colonne est** ${}^t(*\ 0\ \ldots\ 0)$
- **2 pts : l'ensemble des matrices dont la première colonne ne contient qu'un réel non nul est engendré par la concaténation de** $\mathcal{F}_1 = (E_{1,1})$ **et** $\mathcal{F}_2 = \left(E_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 2 \leqslant j \leqslant n}}$

c) En déduire que $n = 2$ et que $\mathcal{H}$ est isomorphe, via l'application c, au sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2.

- **1 pt : théorème du rang appliqué à** $c_{|\mathcal{H}}$
- **1 pt :** $\dim\Big(\mathrm{Ker}\,(c_{|\mathcal{H}})\Big) = \dim\Big(\{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\} \cap \mathcal{H}\Big)$ **donc** $\dim(\mathcal{H}) = \dim\Big(\mathrm{Im}\,(c_{|\mathcal{H}})\Big)$
- **1 pt :** $\mathrm{Im}\,(c_{|\mathcal{H}}) \ \subset\ \mathcal{N}$ **donc** $n^2 - 1 \leqslant n^2 - n + 1$ **donc** $n \leqslant 2$
- **1 pt : si** $n = 2$**,** $\mathcal{N} \ =\ \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \ =\ \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $\mathrm{Im}\,(c_{|\mathcal{H}}) = \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ **par inclusion et égalité des dimensions**
- **0 pt :** $c_{|\mathcal{H}}$ **est un isomorphisme**

Problème 2A (INP) - indice de cyclicité d'un endomorphisme

- Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  On note n sa dimension, et on suppose que $n \geqslant 2$.

1. Soient u un vecteur non nul de E, et f un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $(u, f(u), \dots, f^k(u))$ soit liée.

- **1 pt :** Card $\big(\mathcal{F}_n\big) = n+1 \ > \ n \ = \ \dim(E)$ **donc** $\mathcal{F}_n$ **est liée**

Dans toute la suite du problème, on note $r(f,u)$ le plus petit de ces entiers :

$$r(f,u) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big) \text{ est liée}\}$$

b) Justifier l'encadrement : $1 \leqslant r(f,u) \leqslant n$.

- **1 pt :** $\mathcal{F}_n$ **est liée donc** $r(f,u) \leqslant n$
- **1 pt :** $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big)$ **est liée**$\} \subset \mathbb{N}^*$ **donc** $r(f,u) \geqslant 1$.

2. *Étude d'un exemple.*
Dans cette question, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par la matrice :

$$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $g(e_1)$, $g^2(e_1)$ et $g^3(e_1)$.

- **1 pt :** $g(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = (1,1,1,1)$
- **1 pt :** $g^2(e_1) = 2\,e_1 + e_2 - e_4 = (2,1,0,-1)$
- **1 pt :** $g^3(e_1) = 5\,e_1 - e_2 - 5\,e_3 - 9\,e_4 = (5,-1,-5,-9)$

En passant par la matrice de g dans la base canonnique.
Seulement 1 point en tout en cas de confusion.

b) Montrer que la famille $\big(e_1, g(e_1), g^2(e_1)\big)$ est libre.

- **1 pt : écriture du système (car (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre)**
- **1 pt : résolution**

c) Déterminer trois réels α, β, γ tels que $g^3(e_1) = \alpha \cdot g^2(e_1) + \beta \cdot g(e_1) + \gamma \cdot e_1$. En déduire $r(g, e_1)$.

- **1 pt : écriture du système (car (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base) et méthode de résolution du système**
- **1 pt :** $\alpha = 4$**,** $\beta = -5$**,** $\gamma = 2$

(2 pts si les valeurs sont données correctement même sans explication)

- **1 pt : la famille $\big(e_1, g(e_1), g^2(e_1), g^3(e_1)\big)$ est liée donc $r(g, e_1) \geqslant 3$**
- **1 pt : $\big(e_1, g(e_1), g^2(e_1)\big)$ est libre (q précédente) donc $r(g, e_1) > 2$ donc $r(g, e_1) \geqslant 3$ (entier)**

On reprend le cas général où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geqslant 2$, où f un endomorphisme de E, et où u un vecteur non nul de E.

3. *Étude du cas où $r(f,u) = 1$.*

a) Montrer que $r(f,u) = 1$ si et seulement si la droite $\text{Vect}(u)$ est stable par f.

- **2 pts : ($\Rightarrow$)**
  - × **1 pt : si $\big(u, f(u)\big)$ est liée alors $f(u) = \lambda_0\, u$**
  - × **1 pt : ainsi $\forall v \in \text{Vect}(u),\ f(v) = \ldots = \alpha\ \lambda_0 u \in \text{Vect}(u)$**
- **2 pts : ($\Leftarrow$)**
  - × **1 pt : si $\text{Vect}(u)$ stable par f, comme $u \in \text{Vect}(u)$, alors $f(u) \in \text{Vect}(u)$ et $f(u) = \lambda_0\, u$**
  - × **1 pt : comme $\big(u, f(u)\big)$ liée, $r(f,u) \leqslant 1$ donc $r(f,u) = 1$ ($r(f,u) \geqslant 1$ par *1.b)*)**

b) On considère à nouveau l'exemple de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ défini en question **2**.

(i) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(g - \lambda \text{id}) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$.
On pourra envisager les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$ puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_3$.

- **1 pt :** $\det(g - \lambda\,\text{id}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$
  (après les 2 opérations proposées)
- **1 pt :** $= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$
  (en profitant du lien entre les 2 dernières colonnes)
- **1 pt : puis développement par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne puis dernière ligne**

Le résultat étant donné, on attend de voir les différentes étapes du calcul même si on accepte d'autres opérations

(ii) Déterminer les noyaux $\text{Ker}(g - \text{id})$ et $\text{Ker}(g - 2\text{id})$.

- **2 pts :** $\text{Ker}(g - \text{id}) = \text{Vect}\left((-1,2,3,4)\right)$ $\big(x = -\frac{1}{4}\,t,\ y = \frac{1}{2}t,\ z = \frac{3}{4}t\big)$
- **2 pts :** $\text{Ker}(g - 2\,\text{id}) = \text{Vect}\left((2,1,2,0), (-1,0,0,1)\right)$ $\big(x = z - t,\ y = \frac{1}{2}z\big)$

On applique le pivot de Gauss !
On met 2 points en tout au maximum en cas de confusions d'objets

(iii) En déduire tous les vecteurs non nuls v de $\mathbb{R}^4$ tels que $r(g,v) = 1$.

- **3 pts : analyse - si $\text{rg}(g,v) = 1$ alors $v \in \text{Ker}(g - \text{id}) \cup \text{Ker}(g - 2\,\text{id})$**
  - × **1 pt : si $\text{rg}(g,v) = 1$ alors $\text{Vect}(v)$ est stable par g**
  - × **1 pt : comme $v \in \text{Vect}(v)$ alors $g(v) \in \text{Vect}(v)$ donc il existe λ tel que $v \in \text{Ker}(g - \lambda\,\text{id})$**
  - × **1 pt : donc $\det(g - \lambda\,\text{id}) = 0$ donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$**
- **1 pt : synthèse - si $v \in \text{Ker}(g - \text{id}) \cup \text{Ker}(g - 2\,\text{id})$ alors $\text{rg}(g,v) = 1$**
  - × **1 pt : si $v \in \text{Ker}(g - \text{id})$, alors : $g(v) = v$ donc $\big(v, g(v)\big) = (v,v)$ est liée**
  - × **0 pt : de même si $v \in \text{Ker}(g - 2\,\text{id})$, alors $\big(v, g(v)\big) = (v, 2\,v)$ est liée**

4. On suppose dans cette question, *et dans cette question seulement*, que $r(f,u) = n$.

a) Montrer qu'alors la famille $\mathscr{B}(u) = \big(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ est une base de E.

- **1 pt : par l'absurde, si** $\mathscr{B}(u) = \big(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ **est liée alors** $r(f,u) \leqslant n-1$
- **1 pt : ainsi** $\mathscr{B}(u)$ **est libre et de bon cardinal**

b) Déterminer la matrice $M_{\mathscr{B}(u)}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}(u)$, en fonction des coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $f^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}(u)$.

- **1 pt :** $f(f^k(u)) = f^{k+1}(u) = 0 \cdot u + \ldots + 0 \cdot f^k(u) + 1 \cdot f^{k+1}(u)$
- **1 pt : d'où la matrice colonne associée**
- **1 pt :** $f\big(f^{n-1}(u)\big) = f^n(u) = a_0 \cdot u + a_1 \cdot f(u) + \cdots + a_{n-1} \cdot f^{n-1}(u)$ **et matrice associée**

c) Calculer $\det(f)$ et $\operatorname{tr}(f)$ en fonction de $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

- **1 pt :** $\det(f) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$
  (développement $1^{\text{ère}}$ ligne)
- **1 pt :** $\operatorname{tr}(f) = a_{n-1}$

5. On note $\mathcal{P}(f,u)$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que l'endomorphisme $P(f)$ vérifie $P(f)(u) = 0_E$.

a) Montrer que $\mathcal{P}(f,u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, et vérifiant de plus la propriété suivante : $\forall\, P \in \mathcal{P}(f,u)$, $\forall\, Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ \in \mathcal{P}(f,u)$.

- **2 pts :** $\mathcal{P}(f,u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(u) = 0_E\} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \varphi(P) = 0_E\} = \operatorname{Ker}(\varphi)$ **où** $\varphi : P \mapsto P(f)(u)$ **est linéaire**
  (ou stabilité par CL)
- **2 pts :** $\mathcal{P}(f,u) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$
  - × **1 pt : notons** $p = r(f,u)$**. Ainsi il existe** $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{p+1}}\}$ **tel que** $\lambda\, u + \lambda_1\, f(u) + \cdots + \lambda_p\, f^p(u) = 0_E$ **et donc** $Q(X) = \lambda_0 + \lambda_1\, X + \cdots + \lambda_p\, X^p \in \mathcal{P}(f,u)$
  - × **1 pt :** $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ **(car** $(\lambda_0, \ldots, \lambda_p) \neq 0_{\mathbb{R}^{p+1}}$**)**
- **1 pt : Soit** $P \in \mathcal{P}(f,u)$**. Soit** $Q \in \mathbb{K}[X]$**.**
  $(P\,Q)(f)(u) = (Q\,P)(f)(u) = \big(Q(f) \circ P(f)\big)(u) = Q(f)\big(P(f)(u)\big) = Q(f)(0_E) = 0_E$

b) On désigne par $B(f,u)$ un polynôme non nul de $\mathcal{P}(f,u)$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(f,u)$.

(i) Montrer que $\mathcal{P}(f,u)$ est l'ensemble des multiples de $B(f,u)$.

- **1 pt :** $(\supset)$ **si** P **un multiple de** $B(f,u)$**, alors :** $P = Q \times B(f,u) \in \mathcal{P}(f,u)$ **par *5.a)***
- **3 pts :** $(\subset)$
  - × **1 pt : si** $P \in \mathcal{P}(f,u)$**, alors par division euclidienne de** P **par** $B(f,u)$ **:** $P = B(f,u) \times Q + R$ **avec** $\deg(R) < \deg\big(B(f,u)\big)$
  - × **1 pt :** $R = P - B(f,u) \times Q$**. Mais** $B(f,u) \times Q \in \mathcal{P}(f,u)$ **et** $P \in \mathcal{P}(f,u)$ **donc par stabilité par CL,** $R \in \mathcal{P}(f,u)$
  - × **1 pt : ainsi** $R = 0_{\mathbb{K}[X]}$ *(en effet, si $R \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, cela contredit la minimalité du degré du polynôme $B(f,u)$)*

(ii) Montrer que le polynôme $B(f,u)$ est de degré $r(f,u)$.

On démontre d'abord $\deg\big(B(f,u)\big) \geqslant r(f,u)$

- **1 pt : on note** $d = \deg(B(f,u))$ **donc** $B(f,u) = \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k\, X^k$ **(non nul) donc** $\sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k\, f^k(u) = 0_E$
- **1 pt : la famille** $\big(u, f(u), \ldots, f^d(u)\big)$ **est liée donc** $r(f,u) \leqslant d = \deg\big(B(f,u)\big)$

On démontre ensuite $\deg\big(B(f,u)\big) \leqslant r(f,u)$

- **1 pt : on note** $r = r(f,u)$**. La famille** $\big(u, f(u), \ldots, f^r(u)\big)$ **est liée donc** $\sum\limits_{k=0}^{r} \lambda_k\, f^k(u) \;=\; 0_E$**.**
  On note $P = \sum\limits_{k=0}^{r} \lambda_k\, X^k$
- **1 pt :** P **est non nul et annule** u **donc** $P \in \mathcal{P}(f,u)$ **d'où** $r \geqslant \deg(P) \geqslant \deg\big(B(f,u)\big)$

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(g,e_1)$, dans le cas où g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini en question **2**, et où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

- **0 pt :** $\mathcal{P}(g,e_1)$ **est l'ensemble des multiples de** $B(g,e_1)$ **où** $B(g,e_1)$ **est un polynôme non nul de** $\mathcal{P}(g,e_1)$ **de degré minimal parmi les polynômes non nuls de** $\mathcal{P}(g,e_1)$
- **1 pt : d'après** ***2.c)*** **:** $r(g,e_1) = 3$ **et d'après** ***5.b)(ii)*** **:** $\deg\big(B(g,e_1)\big) = r(g,e_1) = 3$
- **1 pt : d'après** ***2.c)*** **:** $g^3(e_1) \;=\; 4\,g^2(e_1) - 5\,g(e_1) + 2\,e_1$**.**
  Ainsi $Q(X) = X^3 - 4\,X^2 + 5\,X - 2$ **est un polynôme annulateur de** e_1 **(**$Q \in \mathcal{P}(g,e_1)$**)**
- **1 pt :** $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$**,** $Q \in \mathcal{P}(g,e_1)$**,** $\deg(Q) = 3$ **donc** Q **de degré minimal parmi les polynômes non nuls de** $\mathcal{P}(g,e_1)$**. Ainsi, d'après** ***5.b)(i)*****,** $\mathcal{P}(g,e_1)$ **est l'ensemble des multiples de** Q

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(f,u)$ dans le cas où $r(f,u) = n$, en fonction des coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $f^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}(u)$, comme définies en question **4**.

- **1 pt :** $f^n(u) \;=\; a_0\,u + a_1\,f(u) + \cdots + a_{n-1}\,f^{n-1}(u)$ **par définition de** $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$
- **1 pt :** $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$**,** $Q \in \mathcal{P}(f,u)$**,** $\deg(Q) = n = r(f,u) = \deg\big(B(f,u)\big)$ **ainsi** $\mathcal{P}(f,u)$ **est l'ensemble des multiples de** Q

6. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

a) Montrer que pour tout $u \in E$ non nul, le polynôme $B(f,u)$, comme défini en question **5b**, est un monôme.

- **1 pt : notons** $Q(X) = X^p$ **alors** $Q(f)(u) \;=\; f^p(u) \;=\; 0_E$ **ainsi** Q **est un multiple de** $B(f,u)$ **(**$Q = B(f,u) \times R$**)**
- **1 pt : donc** $B(f,u)$ **est un monôme (si ce n'était pas le cas, on aurait** $B(f,u) = (X) = (X-\alpha_0) \times \widetilde{R}(X)$ **et** $X^p \;=\; Q(X) \;=\; \big(B(f,u)\big) \times R(X) \;=\; (X-\alpha_0) \times \widetilde{R}(X) \times R(X)$**)**

b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

× Il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f,u) = n$.

× $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- **1 pt :** $(\Rightarrow)$
  S'il existe $u \neq 0_E$ **tel que :** $r(f,u) = n$ **alors** $\big(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ **est libre donc, en particulier,** $f^{n-1}(u) \neq 0_E$**.**
- **4 pts :** $(\Leftarrow)$
  × **1 pt : si** $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ **alors il existe** $u \neq 0_E$ **tel que :** $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ $(*)$
  × **1 pt : d'après la question précédente, il existe** $m \in \mathbb{N}^*$ **tel que :** $\big(B(f,u)\big)(X) = X^m$
  × **1 pt : d'après** $(*)$ $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$**,** $f^k(u) \neq 0_E$ **et donc forcément** $m = \deg\big(B(f,u)\big) \geqslant n$
  × **1 pt : d'après** ***5.b)(ii)*** **:** $\deg\big(B(f,u)\big) = r(f,u)$ **et** $r(f,u) \leqslant n$ **(d'après** ***1.b)*****)**

7. Dans cette question, on suppose qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. On note $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ une telle base, et on pose $M_{\mathcal{W}}(f) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, de sorte que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(w_k) = \lambda_k w_k$.

a) On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f, u) = n$. On note $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k w_k$.

(i) Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathscr{B}(u)$, comme définie en question **4**.

- **0 pt : puisque $r(f, u) = n$, la famille $\mathscr{B}(u)$ est bien une base de E d'après *4.a)***
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{W}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $f(u) \;=\; f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot w_k\right) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot f(w_k) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, \lambda_k \cdot w_k$
  $= \;\lambda_1\, \alpha_1 \cdot w_1 + \lambda_2\, \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \lambda_n\, \alpha_n \cdot w_n$
- **1 pt :** $f^2(u) \;=\; f\big(f(u)\big) \;=\; f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\, \alpha_k \cdot w_k\right) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\, \alpha_k \cdot f(w_k) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2\, \alpha_k \cdot w_k$
  $= \;\lambda_1^2\, \alpha_1 \cdot w_1 + \lambda_2^2\, \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \lambda_n^2\, \alpha_n \cdot w_n$
- **1 pt : en agissant de même** $P_{\mathcal{W}, \mathscr{B}(u)} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\, \alpha_1 & \lambda_1^2\, \alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\, \alpha_1 \\ \alpha_2 & \lambda_2\, \alpha_2 & \lambda_2^2\, \alpha_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\, \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\, \alpha_n & \lambda_n^2\, \alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\, \alpha_n \end{pmatrix}$

(ii) En déduire que les λ_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distincts, et que les α_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$, sont tous non nuls.

- **1 pt :** $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$ **par l'absurde (sinon une ligne de $P_{\mathcal{W}, \mathscr{B}(u)}$ serait nulle)**
- **1 pt : les λ_k sont deux à deux distincts par l'absurde (si deux sont égaux, deux lignes de $P_{\mathcal{W}, \mathscr{B}(u)}$ sont colinéaires)**

b) On suppose que les λ_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distincts.
Montrer qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f, u) = n$.

- **4 pts : le vecteur $u = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$ convient**
  (on met des points pour toute tentative pertinente)