DS2

Avertissements

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- Le Problème 1 est commun et devra être traité par tous les élèves.
  Le Problème 2 est laissé au choix de l'élève.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit**.

Problème 1 - Hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stables par multiplication

- Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n.
- On note 0_n la matrice nulle carrée de taille n, et I_n la matrice identité de taille n. On note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui vaut 1. On rappelle que la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dite canonique.
- Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **trace** de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A :
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$
- On rappelle que pour toutes matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice produit AB est définie par $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où :
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$$
  Ainsi en particulier, pour tous $i,j,k,\ell \in [\![1,n]\!]$, on a $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = 0_n$ si $j \neq k$, et $E_{i,j} \times E_{j,\ell} = E_{i,\ell}$.

Partie I - Préliminaires

I.1. *Propriétés de la trace.*

a) Vérifier que l'application $\mathrm{tr} : M \mapsto \mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
  Soit $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} tr(\lambda\cdot M + \mu\cdot N) &= tr\left(\left(\lambda\, m_{i,j} + \mu\, n_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda\, m_{k,k} + \mu\, n_{k,k}\right) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} + \mu \sum_{k=1}^{n} n_{k,k} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ &= \lambda\, tr(M) \ + \ \mu\, tr(N) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application tr est bien linéaire.}}$$

- De plus, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\operatorname{tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k} \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application tr est bien à valeurs dans } \mathbb{R}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'application tr est bien une forme linéaire.}}$$

□

b) En déduire que plus généralement, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & & M & \mapsto & \operatorname{tr}(AM) \end{array}$$

est encore une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Cette notation φ_A sera conservée dans toute la suite du problème.

Démonstration.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Soit $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} \varphi_A(M) & = & tr\Big(A\ \big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)\Big) & \\ & = & tr\big(\lambda \cdot AM + \mu \cdot AN\big)\Big) & \textit{(par distributivité de l'opérateur } \operatorname{tr}\textit{)} \\ & = & \lambda\, tr(AM)\ +\ \mu\, tr(AN) & \textit{(par linéarité de la trace)} \\ & = & \lambda \cdot \varphi_A(M) + \mu \cdot \varphi_A(N) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'application tr est bien linéaire.}}$$

□

c) Montrer : $\forall\, (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration.

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{tr}(AB) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \big(AB\big)_{i,i} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}\right) & \textit{(par définition du produit de matrices)} \\ & = & \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} (a_{i,k} \times b_{k,i}) & \textit{(par définition des sommes doubles)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,i}\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{k,i} \times a_{i,k}\right) & \textit{(car la loi } \times \textit{ est commutative)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \big(BA\big)_{k,k} & \\ & = & \operatorname{tr}(BA) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall\, (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

□

I.2. *Représentation des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Justifier qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \varphi_A$, c'est-à-dire telle que :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$$

Indication : on pourra faire intervenir les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \varphi_A$.
  Si c'est le cas, on a alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$:

$$\begin{array}{rcll}
\varphi(E_{i,j}) & = & \varphi_A(E_{i,j}) & \\
& = & \operatorname{tr}\left(A \times E_{i,j}\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(A \times E_{i,j}\right)_{k,k} & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{\ell=1}^{n} A_{k,\ell} \times \left(E_{i,j}\right)_{\ell,k} \right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(A_{k,i} \times \left(E_{i,j}\right)_{i,k} \right) & \textit{(car pour tout } \ell \neq i,\ \left(E_{i,j}\right)_{\ell,k} = 0\textit{)} \\
& = & A_{j,i} \times \left(E_{i,j}\right)_{i,j} & \textit{(car pour tout } k \neq j,\ \left(E_{i,j}\right)_{i,k} = 0\textit{)} \\
& = & A_{j,i} &
\end{array}$$

- **Synthèse**
  Comme φ est une forme linéaire, alors pour tout $(i,j) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(E_{i,j}) \in \mathbb{R}$.
  Notons B la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $B = \left(\varphi(E_{i,j})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
  Notons alors : $A = {}^tB$ et démontrons $\varphi_A = \varphi$.
  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$.

$$\begin{array}{rcll}
\varphi_A(E_{i,j}) & = & \operatorname{tr}\left(A \times E_{i,j}\right) & \\
& = & A_{j,i} & \textit{(en reprenant le calcul précédent)} \\
& = & B_{i,j} & \textit{(par définition de } B\textit{)} \\
& = & \varphi(E_{i,j}) & \textit{(par définition de } B \textit{ une nouvelle fois)}
\end{array}$$

  On a ainsi démontré :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ \varphi_A(E_{i,j}) \ = \ \varphi(E_{i,j})$$

  Une application linéaire étant entièrement déterminée par son image sur une base de l'ensemble de départ, cela permet de conclure : $\varphi = \varphi_A$.

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}), \exists !\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi = \varphi_A}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de démontrer la propriété suivante :

$$\forall \varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}), \exists !\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi = \varphi_A$$

  Autrement dit, il s'agit, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, de trouver une matrice A telle que $\varphi = \varphi_A$. Il faut bien comprendre que la matrice A dépend de la forme linéaire considérée (les objets apparaissant sous le quantificateur existentiel dépendent de tous les éléments qui le précèdent).

- L'énoncé introduisant l'application φ à l'aide d'un « Soit », il reste à démontrer :

$$\exists !\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \varphi_A(M)$$

  On est confronté à une propriété d'existence.
  Pour ce type de propriété, il y a deux types de résolution :

  × **une démonstration constructive**. Il s'agit de construire l'objet qui convient.
  Dans la question qui nous concerne, A sera construit à l'aide de l'application φ introduite dans l'énoncé.

  × **une démonstration non constructive**. On est capable de démontrer l'existence de l'objet sans l'expliciter. Une illustration classique de ce cas est le théorème des valeurs intermédiaires qui fournit, sous les hypothèses adéquates, l'existence d'un réel α qui annule (par exemple) une fonction f. Si on regarde de près la démonstration de ce théorème, on peut remarquer qu'on construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers α. On peut même, à tout rang $n \in \mathbb{N}$, donner un majorant de l'écart de u_n à α. Cela permet ainsi d'obtenir, une approximation aussi précise que l'on souhaite (on peut considérer n'importe quel écart $\varepsilon > 0$) de α. Pour autant, cela ne fournit pas précisément la valeur de α.

- On a ici opté pour une démonstration par analyse-synthèse. Ce type de raisonnement est très adapté aux problèmes qui demandent d'écrire les éléments d'un ensemble $\mathcal{S}$ sous une forme particulière.

$$\forall\ elmt \in \mathcal{S},\quad \begin{array}{c}elmt \text{ répond à certains critères} \\ \text{(relatifs au problème posé)}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l}elmt \text{ se décrit très précisément} \\ \text{(sous une forme particulière)}\end{array}$$

  C'est le cas ici : on demande d'écrire tout élément φ de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ sous la forme $\varphi = \varphi_A$.
  L'application φ ayant été introduite, on démontre alors l'équivalence par double implication.

  × le sens direct est appelé **analyse**.
  Lors de cette étape, on suppose que φ répond aux critères du problème. Ici, il s'agit de supposer que $\varphi = \varphi_A$ pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  On est alors amener à expliciter avec précision la forme de φ. Cela correspond ici à donner la valeur de A.

  × le sens réciproque est appelé **synthèse**.
  Lors de cette étape, on possède la description précise de φ (on a accès à la définition de A) et on vérifie alors que celle-ci répond aux critères relatifs aux problème posé (on vérifie que la matrice A permet bien d'obtenir $\varphi = \varphi_A$).

- Insistons enfin sur le fait que l'étape d'analyse permet d'obtenir l'unicité. Lors de cette étape, on démontre que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi = \varphi_A \ \Rightarrow\ \forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], A_{i,j} = \varphi(E_{j,i})$$

  Ainsi, si une matrice A vérifie la propriété $\varphi = \varphi_A$ alors la valeur de A est entièrement déterminée. □

Partie II - Détermination des hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stables par multiplication

Dans cette partie, on considère un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que $\mathcal{H}$ est **stable par multiplication**, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall\,(H_1, H_2) \in \mathcal{H}^2,\ H_1 \times H_2 \in \mathcal{H} \qquad (*)$$

II.1. *Un exemple.*

Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2 est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et qu'il est stable par multiplication.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) \ \subset\ \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est :
  - × génératrice de $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$.
  - × libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, qui est elle-même une famille libre.

  Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ et :

  $$\dim\left(\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})\right) \ =\ \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) \ =\ 3$$

  On en conclut : $\dim\left(\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})\right) \ =\ 3 \ =\ 4-1 \ =\ \dim\left(\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})\right) - 1$.

  $$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) \text{ est un hyperplan de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

- Démontrons que $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ est stable par multiplication.
  Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$.
  Alors il existe $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ et $T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.
  Enfin :

  $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \ =\ \begin{pmatrix} a_1\ a_2 & a_1\ b_2 + b_1\ c_2 \\ 0 & c_1\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$$

  $$\boxed{\text{L'espace vectoriel } \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}) \text{ est stable par multiplication.}}$$

□

II.2. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{H}$ contient la matrice identité I_n. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que $I_n \notin \mathcal{H}$.

a) Quelle est la dimension de $\mathcal{H}$?

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Par hypothèse, } \mathcal{H} \text{ est un hyperplan de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}). \text{ On en déduit :} \\ \dim\left(\mathcal{H}\right) = \dim\left(\mathscr{M}(\mathbb{R})\right) - 1 = n^2 - 1.\end{array}}$$

□

b) Justifier alors : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\dim(\mathrm{Vect}(I_n)) = 1$.
  En effet, la famille (I_n) est :
  - × génératrice de $\mathrm{Vect}(I_n)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  Ainsi, la famille (I_n) est une base de $\mathrm{Vect}(I_n)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(I_n)) = \mathrm{Card}((I_n)) = 1$. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \dim(\mathcal{H}) + \dim(\mathrm{Vect}(I_n)) & = & (n^2-1)+1 & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & n^2 & \\ & = & \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) & \end{array}$$

$$\boxed{\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{H}) + \dim(\mathrm{Vect}(I_n))}$$

- D'autre part, comme $I_n \notin \mathcal{H}$ par hypothèse, alors : $\mathcal{H} \cap \mathrm{Vect}(I_n) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Vect}(I_n).}$$

Commentaire

- On peut aussi raisonner en exhibant une base adpatée au problème à l'aide du théorème de la base incomplète. Détaillons ce procédé dans le point suivant.
- Notons $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_{n^2-1}) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^{n^2-1}$ une base de $\mathcal{H}$.
  La famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{n^2-1}, I_n)$ est :
  - × libre. En effet, par hypothèse de l'énoncé : $I_n \notin \mathcal{H}$.
    On en conclut que I_n n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.
  - × telle que : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

  Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  On en conclut : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

□

c) En considérant la décomposition d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans la somme directe précédente, montrer que si $M^2 \in \mathcal{H}$, alors $M \in \mathcal{H}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose : $M^2 \in \mathcal{H}$.

- D'après la question précédente, il existe un unique couple $(R, S) \in \mathcal{H} \times \mathrm{Vect}(I_n)$ tel que :

$$M = R + S$$

  Comme $S \in \mathrm{Vect}(I_n)$, il existe un unique réel α tel que : $S = \alpha \cdot I_n$. Finalement :

$$\begin{array}{rcll} M^2 & = & \big(R + \alpha \cdot I_n\big)^2 & \\ & = & R^2 + 2\,\alpha \cdot R \times I_n + \big(\alpha \cdot I_n\big)^2 & \textit{(par la formule du binôme de Newton et car } R \textit{ et } I_n \textit{ commutent)} \\ & = & R^2 + 2\,\alpha \cdot R + \alpha^2 \cdot I_n & (*) \end{array}$$

- Comme $\mathcal{H}$ est stable par multiplication et $R \in \mathcal{H}$, alors : $R^2 = R \times R \in \mathcal{H}$.
  Comme $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel, $\mathcal{H}$ est stable par combinaison linéaire et : $R^2 + 2\,\alpha \cdot R \in \mathcal{H}$.
  Montrons alors : $\alpha = 0$. On procède par l'absurde.
  Supposons $\alpha \neq 0$. Alors, d'après $(*)$:
  $$I_n \;=\; \frac{1}{\alpha^2} \cdot M^2 - \frac{1}{\alpha^2} \cdot R^2 - \frac{2}{\alpha} \cdot R$$
  Ainsi, $I_n \in \mathcal{H}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{H}$.
  Cela contredit l'hypothèse $I_n \notin \mathcal{H}$.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } \alpha = 0.}$$

$$\boxed{\text{En revenant à l'écriture initiale de } M \text{, on obtient : } M = R + 0 \cdot I_n = R \in \mathcal{H}.}$$ □

d) En déduire que $\mathcal{H}$ contient toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ avec $i \neq j$.

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ un couple tel que : $i \neq j$. Alors :
$$\big(E_{i,j}\big)^2 \;=\; E_{i,j} \times E_{i,j} \;=\; 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \quad \textit{(car } j \neq i\textit{)}$$
Or : $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{H}$ car $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, $\big(E_{i,j}\big)^2 \in \mathcal{H}$, ce qui permet de conclure, par la question précédente : $E_{i,j} \in \mathcal{H}$.

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \Big(i \neq j \ \Rightarrow\ E_{i,j} \in \mathcal{H}\Big)}$$

Commentaire

- Cette question commence par « En déduire ». Cette formulation nous indique qu'il faut utiliser le résultat de la question précédente, à savoir :
  $$M^2 \in \mathcal{H} \ \Rightarrow\ M \in \mathcal{H}$$
  On demande ici de démontrer $E_{i,j} \in \mathcal{H}$ (pour $i \neq j$). Il s'agit donc d'utiliser le résultat de la question précédente avec $M = E_{i,j}$. C'est ce travail de réflexion qu'il faut faire devant sa copie :
  × reprérer les indications de l'énoncé (« En déduire », « À l'aide de la question », « En procédant comme en question » ...),
  × analyser ce qui est démontré dans les questions mentionnées,
  × verifier qu'on est dans le cadre d'utilisation des résultats précédents et conclure à l'aide de ceux-ci.
- Rappelons que les matrices élémentaires vérifient la propriété suivante :
  $$\forall (i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4,\ E_{i,j} \times E_{k,\ell} \;=\; \delta_{j,k}\ E_{i,\ell} \quad \text{où} \quad \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \textit{(si } j = k\textit{)} \\ 0 & \textit{(si } j \neq k\textit{)} \end{cases}$$

□

e) En déduire que $\mathcal{H}$ contient toutes les matrices élémentaires $E_{i,i}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $j \neq i$. Alors :

× d'après la question précédente : $E_{i,j} \in \mathcal{H}$ et $E_{j,i} \in \mathcal{H}$.

× comme $E_{i,i} = E_{i,j} \times E_{j,i}$ et que $\mathcal{H}$ est stable par produit, alors : $E_{i,i} \in \mathcal{H}$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ E_{i,i} \in \mathcal{H}}$$

□

f) Aboutir à une contradiction et conclure.

Démonstration.

- D'après les deux questions précédentes, tous les vecteurs de la famille $\left(E_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont des éléments de $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}$ est stable par combinaison linéaire, on en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}\left(\left(E_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) & \subset & \mathcal{H} \\ \shortparallel & & \\ \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & & \end{array}$$

De plus : $\mathcal{H} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puisque $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{H} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

- On en déduit en particulier :

$$\begin{array}{ccc} \dim\left(\mathcal{H}\right) & = & \dim\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ n^2 - 1 & \cancel{=} & n^2 \end{array}$$

Ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{Cela termine le raisonnement par l'absurde et démontre que l'hypothèse initiale est fausse. On peut donc affirmer : } I_n \in \mathcal{H}.}$$

□

II.3. Justifier qu'il existe une matrice non nulle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$.
Y a-t-il unicité d'une telle matrice A ?

Démonstration.

- Comme $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit qu'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que :

$$\mathcal{H} \ = \ \text{Ker}(\varphi)$$

- D'après la question ***I.2***, il existe donc une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\varphi = \varphi_A$.
Démontrons : $A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. On procède par l'absurde.
Supposons $A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) \ = \ \text{tr}(AM) \ = \ \text{tr}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} M\right) \ = \ \text{tr}\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\right) \ = \ 0$$

Cela contredit la propriété : $\varphi \neq 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Il existe donc bien } A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \text{ telle que : } \mathcal{H} \ = \ \text{Ker}(\varphi_A).}$$

- Soit $A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ une matrice telle que : $\mathcal{H} \;=\; \text{Ker}(\varphi_A)$. Remarquons alors :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi_{2\,A}(M) \;=\; \text{tr}(2\,AM) \;=\; 2\,\text{tr}(AM) \;=\; 2\;\varphi_A(M)$$

Ainsi : $\varphi_{2\,A} = 2 \cdot \varphi_A$, ce qui permet de conclure que les formes linéaires $\varphi_{2\,A}$ et φ_A ont même noyau. Finalement :

$$\mathcal{H} \;=\; \text{Ker}(\varphi_A) \;=\; \text{Ker}(\varphi_{2\,A})$$

Comme $A \neq 2\,A$ (puisque $A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$), on en conclut qu'il n'y a pas unicité de la matrice $A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ telle que : $\mathcal{H} \;=\; \text{Ker}(\varphi_A)$.

Commentaire

- On démontre dans la 2$^{\text{ème}}$ partie de la question que si $A \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ vérifie : $\mathcal{H} \;=\; \text{Ker}(\varphi_A)$ alors : $\mathcal{H} \;=\; \text{Ker}(\varphi_{2A})$. Évidemment, on peut démontrer de la même manière que pour tout $\alpha \neq 0$, $\mathcal{H} \;=\; \text{Ker}(\varphi_{\alpha A})$. Le réel 2 a été choisi pour des raisons de simplicité.
- Dans la première partie, on utilise le résultat du cours qui stipule que pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$) et tout sous-espace vectoriel H :

$$\boxed{H \text{ est un hyperplan de } E \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \in \big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K})\big)^*,\ H = \text{Ker}(\varphi)}$$

On utilise plus précisément le sens direct. Rappelons ci-dessous sa démonstration.
- Soit $(e_1, \ldots, e_{m-1})$ une base de H.
C'est une famille libre de H et donc de E, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{m-1}, e_m)$ de E. Notons alors $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ la forme linéaire définie par :

$$\varphi(e_1) = 0, \ldots, \varphi(e_{m-1}) = 0, \varphi(e_m) = 1$$

Alors : $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_{m-1}) = H$. $\square$

Dans toute la suite, A désigne une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$.
On note alors $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, et on considère un élément non nul Y_1 dans $\text{Im}(f)$, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note enfin P la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$.

II.4. Soient $B \in \mathcal{H}$, et $g : X \mapsto BX$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à B.

a) Montrer que $\mathcal{H} \subset \text{Ker}(\varphi_{BA})$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $BA = \lambda A$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathcal{H}$. Démontrons : $M \in \text{Ker}\,\big(\varphi_{BA}\big)$.

$$\begin{array}{rcll}
\varphi_{BA}(M) & = & \text{tr}(BA\,M) & \textit{(par définition de } \varphi_{BA}\textit{)} \\
 & = & \text{tr}\,\big(B\,(AM)\big) & \textit{(par associativité de la multiplication sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\
 & = & \text{tr}\,\big((AM)\,B\big) & \textit{(par propriété de l'application } \text{tr}\textit{)} \\
 & = & \text{tr}\,\big(A\,(MB)\big) & \textit{(par associativité de la multiplication sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\textit{)} \\
 & = & \varphi_A(MB) & \\
 & = & 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} & \textit{(car comme } M \in \mathcal{H} \textit{ et } B \in \mathcal{H} \textit{ alors } MB \in \mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)\textit{)}
\end{array}$$

On a bien : $\mathcal{H} \subset \text{Ker}(\varphi_{BA})$.

- Comme $\mathcal{H} \subset \text{Ker}(\varphi_{BA})$ alors :

$$\begin{array}{ccl} \dim(\mathcal{H}) & \leqslant & \dim(\text{Ker}(\varphi_{BA})) \\ \shortparallel & & \\ n^2-1 & & \textit{(car } \mathcal{H} \textit{ est un hyperplan de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\textit{)} \end{array}$$

  Deux cas se présentent alors.
  × Si $\dim(\text{Ker}(\varphi_{BA})) = n^2 - 1$ alors :
    – $\mathcal{H} \subset \text{Ker}\left(\varphi_{AB}\right)$
    – $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\text{Ker}(\varphi_{BA}))$

    Ainsi : $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_{BA})$ et par définition de $\mathcal{H}$: $\text{Ker}(\varphi_A) = \text{Ker}(\varphi_{BA})$.
    Comme φ_A et φ_{BA} sont non nulles, on en déduit, par égalité des hyperplans qu'il existe $\alpha \neq 0$ tel que : $\varphi_{BA} = \alpha \cdot \varphi_A$.
  × Si $\dim(\text{Ker}(\varphi_{BA})) = n^2$ alors :
    – $\text{Ker}\left(\varphi_{BA}\right) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
    – $\dim\left(\text{Ker}\left(\varphi_{BA}\right)\right) = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$

    Ainsi : $\text{Ker}\left(\varphi_{BA}\right) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    On en conclut : $\varphi_{BA} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})} = 0 \cdot \varphi_A$.

  $\boxed{\text{Ainsi, on a bien démontré qu'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda = \alpha \text{ ou } \lambda = 0) \text{ tel que : } \varphi_{BA} = \lambda \cdot \varphi_A}$

- Ce dernier point signifie :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \ \text{tr}\left(BAM\right) = \lambda \ \text{tr}\left(AM\right) = \text{tr}\left(\lambda\, AM\right)$$

  En particulier, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, en reprenant les calculs de la question ***I.2*** :

$$\begin{array}{ccc} \text{tr}\left(BA\, E_{j,i}\right) & = & \text{tr}\left(\lambda \cdot A\, E_{j,i}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \left(BA\right)_{i,j} & & (\lambda\ A)_{i,j} \end{array}$$

  $\boxed{\text{Ainsi : } \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \left(BA\right)_{i,j} = (\lambda\ A)_{i,j} \text{ et donc : } BA = \lambda\ A.}$ □

b) Justifier que la matrice B' de g dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour première colonne $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- La première colonne de la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ n'est autre que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}\big(g(Y_1)\big)$.
  Comme $Y_1 \in \text{Im}(f)$, alors il existe $X_1 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $Y_1 = f(X_1) = AX_1$.
- Or :

$$\begin{array}{rcll} g(Y_1) & = & BY_1 & \textit{(par définition de } g\textit{)} \\ & = & B\ AX_1 & \textit{(par définition de } Y_1\textit{)} \\ & = & \lambda A\ X_1 & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \lambda\, Y_1 & \textit{(par définition de } Y_1\textit{)} \end{array}$$

Finalement :

$$g(Y_1) \;=\; \lambda \cdot Y_1 + 0 \cdot Y_2 + \ldots + 0 \cdot Y_n$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(g(Y_1)\big) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

□

c) Quelle relation relie les matrices B, B', et P ?

Démonstration.
Notons $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} B & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(g\big) \\ & = & P_{\mathscr{B}_c,\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(g\big) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}_c} \\ & = & P \times B' \times P^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } B = P\ B'\ P^{-1} \text{ ou encore : } B' = P^{-1}\, B\, P.}$$

□

II.5. On considère désormais l'application suivante :

$$c \;:\; \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$$

a) Montrer que c est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que c est une application linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Soit $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} c(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) & = & P^{-1}\big(\lambda \cdot M + \mu \cdot N\big)P & \\ & = & \big(\lambda \cdot P^{-1}M + \mu \cdot P^{-1}N\big)P & \textit{(par distributivité de } \times \textit{ par rapport à la loi } +\textit{)} \\ & = & \lambda \cdot P^{-1}MP + \mu \cdot P^{-1}NP & \textit{(par distributivité de } \times \textit{ par rapport à la loi } +\textit{)} \\ & = & \lambda \cdot c(M) + \mu \cdot c(N) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'application } c \text{ est bien linéaire.}}$$

- De plus, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $c(M) = P^{-1}MP \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application } c \text{ est bien à valeurs dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

- Démontrons enfin que l'application c est bijective.
  Comme c est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie, il suffit de démontrer que c est injective.
  Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcll} M \in \mathrm{Ker}(c) & \Leftrightarrow & c(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} & \\ & \Leftrightarrow & P \times P^{-1}MP = P \times 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} & \textit{(par multiplication à gauche par } P\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & MP = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} & \\ & \Leftrightarrow & MP \times P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \times P^{-1} & \textit{(par multiplication à droite par } P\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Ker}(c) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\} \text{ et l'application } c \text{ est injective.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } c \text{ est bien un automorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Commentaire

Ce début de question ***II.5*** est particulièrement simple puisqu'il s'agit de démontrer la linéarité d'une application. Cette question fait suite à la question ***II.4*** qui est, quant à elle, beaucoup plus technique. Un sujet, même s'il est globalement de difficulté progressive, peut contenir des questions abordables en fin de partie. Autrement dit, une question plus simple (au moins en partie) peut apparaître après plusieurs questions difficiles. Pour maximiser ses points aux concours, il faut prendre le maximum de points sur les questions que l'on traite. Cela revient à dire qu'il faut traiter en priorité les questions (ou parties de questions) qui semblent les plus abordables. Il est tout à fait autorisé de passer plusieurs questions (en laissant la place sur la copie pour éventuellement y revenir plus tard) avant de faire une nouvelle question de l'exercice.

□

b) Montrer que la restriction de c à $\mathcal{H}$ est à valeurs dans un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - n + 1$.

Démonstration.
Soit $B \in \mathcal{H}$.

- Alors, d'après la question ***II.4.b)*** : $c(B) \ = \ P^{-1}\, B\, P$ est une matrice (que l'on peut nommer B') dont la première colonne est de la forme $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où $*$ est un réel.
  Nommons $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices qui vérifient cette propriété.
- Notons $\mathcal{F}_1 = (E_{1,1})$ et $\mathcal{F}_2 = \big(E_{i,j}\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 2 \leqslant j \leqslant n}}$. Notons enfin $\mathcal{F}$ la concaténation de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.
  Alors :
  $$\mathcal{N} \ = \ \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$$
  La famille $\mathcal{F}$ est :
  × génératrice de $\mathcal{N}$.
  × libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est elle-même une famille libre.

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{N}$ et :

$$\dim(\mathcal{N}) = \text{Card}(\mathcal{F}) = \text{Card}(\mathcal{F}_1) + \text{Card}(\mathcal{F}_2) = 1 + n(n-1) = n^2 - n + 1$$

$$\boxed{\text{La restriction de } c \text{ à } \mathcal{H} \text{ est à valeurs dans } \mathcal{N}\text{, sous-espace vectoriel de dimension } n^2 - n + 1.}$$ □

c) En déduire que $n = 2$ et que $\mathcal{H}$ est isomorphe, via l'application c, au sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2.

Démonstration.

- En appliquant le théorème du rang à $c_{|\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{H}) &= \dim\Big(\text{Ker}(c_{|\mathcal{H}})\Big) + \dim\Big(\text{Im}(c_{|\mathcal{H}})\Big) \\ &= \dim\Big(\text{Ker}(c) \cap \mathcal{H}\Big) + \dim\Big(\text{Im}(c_{|\mathcal{H}})\Big) \\ &= \dim\Big(\{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\} \cap \mathcal{H}\Big) + \dim\Big(\text{Im}(c_{|\mathcal{H}})\Big) \\ &= \dim\Big(\text{Im}(c_{|\mathcal{H}})\Big) \end{aligned}$$

- Comme $c_{|\mathcal{H}}$ est à valeurs dans $\mathcal{N}$ (d'après la question précédente) :

$$\text{Im}(c_{|\mathcal{H}}) \subset \mathcal{N}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{ccc} \dim(\text{Im}(c_{|\mathcal{H}})) & \leqslant & \dim(\mathcal{N}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ n^2 - 1 & & n^2 - n + 1 \end{array}$$

On déduit de cette inégalité (en ajoutant $1 + n - n^2$ de part et d'autre) : $n \leqslant 2$.

$$\boxed{\text{L'énoncé précise } n \geqslant. \text{ On en conclut : } n = 2.}$$

- Lorsque $n = 2$, l'espace vectoriel $\mathcal{N}$ est, par définition :

$$\mathcal{N} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$$

Ainsi :

× $\text{Im}(c_{|\mathcal{H}}) \subset \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$

× $\dim(\text{Im}(c_{|\mathcal{H}})) = n^2 - 1 = 4 - 1 = 3 = \dim\big(\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})\big)$

(car la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base, de cardinal 3, de $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$)

Finalement : $\text{Im}(c_{|\mathcal{H}}) = \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$ et l'application $c_{|\mathcal{H}}$ est donc surjective.
De plus, comme vu ci-dessus : $\text{Ker}(c_{|\mathcal{H}}) = \text{Ker}(c) \cap \mathcal{H} = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et l'application $c_{|\mathcal{H}}$ est donc injective.

$$\boxed{\text{Finalement, } c_{|\mathcal{H}} \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{H} \text{ sur } \mathcal{T}_2^+(\mathbb{R}).}$$ □

Problème 2A (INP) - indice de cyclicité d'un endomorphisme

- Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note n sa dimension, et on suppose que $n \geqslant 2$.
- Pour tout endomorphisme f de E, on note $\det(f)$ son déterminant et $\text{tr}(f)$ sa trace. En notant id l'endomorphisme identité de E, on définit $f^0 = \text{id}$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Étant donné un vecteur non nul u et un endomorphisme f de E, on définit un entier $r(f, u)$ à partir des itérées du vecteur u par l'endomorphisme f. Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme f, liées à la valeur de l'entier $r(f, u)$.

1. Soient u un vecteur non nul de E, et f un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $\big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big)$ soit liée.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{F}_k = (u, f(u), \dots, f^k(u))$.
En choisissant $k = n$, on a :

$$\text{Card}\left(\mathcal{F}_n\right) = n + 1 \ > \ n \ = \ \dim(E)$$

On en déduit que la famille $\mathcal{F}_n$ est liée.

$$\boxed{\text{Il existe (au moins) un entier } k \in \mathbb{N}^* \text{ telle que la famille } \big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big) \text{ est liée.}}$$
□

Dans toute la suite du problème, on note $r(f, u)$ le plus petit de ces entiers :

$$r(f, u) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big) \text{ est liée}\}$$

b) Justifier l'encadrement : $1 \leqslant r(f, u) \leqslant n$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la famille $\big(u, f(u), \dots, f^n(u)\big)$ est liée.
  Or, $r(f, u)$ est le plus petit entier k tel que la famille $\big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big)$ est liée.
  $$\boxed{\text{D'où : } r(f, u) \leqslant n.}$$
- De plus : $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big) \text{ est liée}\} \subset \mathbb{N}^*$.
  $$\boxed{\text{Ainsi : } r(f, u) \geqslant 1.}$$

Commentaire

Notons que l'énoncé aurait pu définir l'entier $r(f, u)$ de la façon suivante :

$$r(f, u) \ = \ \min\{k \in \mathbb{N} \mid \big(u, f(u), \dots, f^k(u)\big) \text{ est liée}\}$$

- Avec les mêmes arguments que précédemment, on obtient que $r(f, u)$ existe et vérifie : $r(f, u) \leqslant n$.
- De plus, la famille (u) est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul. Autrement dit, la famille (u) n'est pas liée. On en déduit : $r(f, u) \ > \ 0$.
  Or $r(f, u)$ est un entier. Ainsi, on retrouve : $r(f, u) \geqslant 1$.

□

2. *Étude d'un exemple.*
Dans cette question, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par la matrice :

$$M_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $g(e_1)$, $g^2(e_1)$ et $g^3(e_1)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(g(e_1)\big) = M_{\mathcal{C}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1+e_2+e_3+e_4)$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation : } g(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(g^2(e_1)\big) &= \big(M_{\mathcal{C}}(g)\big)^2 \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1) \\ &= M_{\mathcal{C}}(g) \times \big(M_{\mathcal{C}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1)\big) \\ &= M_{\mathcal{C}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(g(e_1)\big) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(2\,e_1 + e_2 - e_4) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation : } g^2(e_1) = 2\,e_1 + e_2 - e_4.}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(g^2(e_1)\big) &= \big(M_{\mathcal{C}}(g)\big)^3 \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1) \\ &= M_{\mathcal{C}}(g) \times \Big(\big(M_{\mathcal{C}}(g)\big)^2 \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(e_1)\Big) \\ &= M_{\mathcal{C}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(g^2(e_1)\big) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(5\,e_1 - e_2 - 5\,e_3 - 9\,e_4) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Par isomorphisme de représentation : } g^3(e_1) = 5\,e_1 - e_2 - 5\,e_3 - 9\,e_4.}$$

□

b) Montrer que la famille $\big(e_1, g(e_1), g^2(e_1)\big)$ est libre.

Démonstration.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons : $\lambda_0 \cdot e_1 + \lambda_1 \cdot g(e_1) + \lambda_2 \cdot g^2(e_1) = 0_{\mathbb{R}^4} \quad (*)$

$$\begin{array}{lcl}
\text{Or} \ : \ (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_0 \cdot e_1 + \lambda_1 \cdot (e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \lambda_2 \cdot (2\,e_1 + e_2 - e_4) = 0_{\mathbb{R}^4} \\
& \Longleftrightarrow & (\lambda_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot e_2 + \lambda_1 \cdot e_3 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot e_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_0 & + & \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & = & 0 \\
& & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\
& & \lambda_1 & & & = & 0 \\
& & \lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0
\end{array}\right. \quad \textit{(car } (e_1, e_2, e_3, e_4) \textit{ est libre)} \\
& \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_0 & + & \lambda_1 & + & 2\,\lambda_2 & = & 0 \\
& & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\
& & & - & \lambda_2 & = & 0 \\
& & & - & 2\,\lambda_2 & = & 0
\end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow & \{\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La famille } \big(e_1, g(e_1), g^2(e_1)\big) \text{ est donc libre.}}$$

□

c) Déterminer trois réels α, β, γ tels que $g^3(e_1) = \alpha \cdot g^2(e_1) + \beta \cdot g(e_1) + \gamma \cdot e_1$. En déduire $r(g, e_1)$.

Démonstration.

- Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. D'après ***2.a)*** :

$$\begin{array}{cl}
& \alpha\, g^2(e_1) + \beta\, g(e_1) + \alpha\, e_1 = g^3(e_1) \\
\Longleftrightarrow & \alpha\,(2\,e_1 + e_2 - e_4) + \beta\,(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \gamma\, e_1 = 5\,e_1 - e_2 - 5\,e_3 - 9\,e_4 \\
\Longleftrightarrow & (2\alpha + \beta + \gamma)\, e_1 + (\alpha + \beta)\, e_E + \beta\, e_3 + (-\alpha + \beta)\, e_4 = 5\,e_1 - e_2 - 5\,e_3 - 9\,e_4 \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr}
2\,\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 5 \\
\alpha & + & \beta & & & = & -1 \\
& & \beta & & & = & -5 \\
-\alpha & + & \beta & & & = & -9
\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\textit{(car } (e_1, e_2, e_3, e_4) \\ \textit{est une base de } \mathbb{R}^4\textit{)}\end{array} \\
\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow 2\,L_4 + L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr}
2\,\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 5 \\
& & \beta & - & \gamma & = & -7 \\
& & \beta & & & = & -5 \\
& & 3\,\beta & + & \gamma & = & -13
\end{array}\right. \\
\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr}
2\,\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 5 \\
& & \beta & & & = & -5 \\
& & \beta & - & \gamma & = & -7 \\
& & 3\,\beta & + & \gamma & = & -13
\end{array}\right. \\
\overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3\,L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr}
2\,\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 5 \\
& & \beta & & & = & -5 \\
& & & - & \gamma & = & -2 \\
& & & & \gamma & = & 2
\end{array}\right.
\end{array}$$

On obtient alors :

$$\alpha\, g^2(e_1) + \beta\, g(e_1) + \alpha\, e_1 = g^3(e_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 5 \\ & & \beta & & & = & -5 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\Longleftrightarrow}} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,\alpha & + & \beta & & & = & 3 \\ & & \beta & & & = & -5 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,\alpha & & & & & = & 8 \\ & & \beta & & & = & -5 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & & & & & = & 4 \\ & & \beta & & & = & -5 \\ & & & & \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } g^3(e_1) = 4\,g^2(e_1) - 5\,g(e_1) + 2\,e_1.}$$

- D'après ce qui précède, le vecteur $g^3(e_1)$ est combinaison linéaire de $g^2(e_1)$, $g(e_1)$ et e_1. La famille $\big(e_1, g(e_1), g^2(e_1), g^3(e_1)\big)$ est donc liée.

$$\boxed{\text{Ainsi : } r(g, e_1) \leqslant 3.}$$

- D'après la question précédente, la famille $\big(e_1, g(e_1), g^2(e_1)\big)$ est libre, c'est-à-dire non liée. Donc : $r(g, e_1) > 2$.

$$\boxed{\text{Or } r(g, e_1) \text{ est un entier. D'où : } r(g, e_1) \geqslant 3.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } r(g, e_1) = 3.}$$ □

On reprend le cas général où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n \geqslant 2$, où f un endomorphisme de E, et où u un vecteur non nul de E.

3. *Étude du cas où $r(f, u) = 1$.*

a) Montrer que $r(f, u) = 1$ si et seulement si la droite $\text{Vect}\,(u)$ est stable par f.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$)
- Supposons : $r(f, u) = 1$.
  Alors la famille $\big(u, f(u)\big)$ est liée. Il existe donc $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que :
  $$\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u) = 0_E$$
  Ainsi : $\mu \cdot f(u) = -\lambda \cdot u$.
- Démontrons : $\mu \neq 0$. On procède par l'absurde.
  On suppose $\mu = 0$. Alors : $-\lambda \cdot u = 0 \cdot f(u) = 0_E$.
  Comme $u \neq 0_E$ (par hypothèse), cela démontre : $\lambda = 0$.
  Ainsi : $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ ce qui est exclu. Finalement $\mu \neq 0$ et : $f(u) = -\frac{\lambda}{\mu} \cdot u$.
- Montrons que $\text{Vect}\,(u)$ est stable par f, c'est-à-dire : $\forall v \in \text{Vect}\,(u)$, $f(v) \in \text{Vect}\,(u)$.
  Soit $v \in \text{Vect}\,(u)$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $v = \alpha \cdot u$. Ainsi :
  $$\begin{array}{rcl} f(v) & = & f(\alpha \cdot u) \\ & = & \alpha \cdot f(u) \quad \textit{(car f linéaire)} \\ & = & -\alpha\,\frac{\lambda}{\mu} \cdot u \end{array}$$
  On en déduit bien : $f(v) \in \text{Vect}\,(u)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{Vect}\,(u)$ est stable par f.

- Comme $u \in \mathrm{Vect}\,(u)$, on a en particulier : $f(u) \in \mathrm{Vect}\,(u)$. Il existe donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $f(u) = \lambda_0\, u$. On en déduit que la famille $\big(u, f(u)\big)$ est liée. D'où : $r(f,u) \leqslant 1$.
- Or, d'après la question ***1.b)*** : $r(f,u) \geqslant 1$.

On obtient donc : $r(f,u) = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement, } r(f,u) = 1 \text{ si et seulement si } \mathrm{Vect}\,(u) \text{ est stable par } f.}$$

□

b) On considère à nouveau l'exemple de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ défini en question **2**.

(i) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(g - \lambda \mathrm{id}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.
On pourra envisager les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$ *puis* $L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_3$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\det(g - \lambda\,\mathrm{id}) &= \det\left(M_{\mathcal{C}} - \lambda\, I_4\right) \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_4}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 4-\lambda & 1 \\ \lambda-2 & -8 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_4}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ -6 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= (2-\lambda)\,(1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad \textit{(en développant par rapport à la dernière ligne)} \\
&= (2-\lambda)\,(1-\lambda)\,\Big((-2-\lambda)\,(5-\lambda) + 12\Big) \\
&= (2-\lambda)\,(1-\lambda)\,(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
&= (2-\lambda)\,(1-\lambda)\,(\lambda-2)\,(\lambda-1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien, pour tout } \lambda \in \mathbb{R} : \det(g - \lambda\,\mathrm{id}) = (\lambda-1)^2\,(\lambda-2)^2.}$$

□

(ii) Déterminer les noyaux $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(g - 2\mathrm{id})$.

Démonstration.

- Déterminons $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$.

  × Soit $u \in \mathbb{R}^4$. Alors il existe $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) & \Longleftrightarrow & (g - \mathrm{id})(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & (M_{\mathcal{C}}(g) - I_4)\, U = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \\[1em]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & 2\,y & & & - & t & = & 0 \\ x & - & 3\,y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & 6\,y & + & 3\,z & + & t & = & 0 \\ x & - & 8\,y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & 0 \end{array} \right. \\[2em]
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3\,y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 2\,y & & & - & t & = & 0 \\ x & - & 6\,y & + & 3\,z & + & t & = & 0 \\ x & - & 8\,y & + & 3\,z & + & 2\,t & = & 0 \end{array} \right. \\[2em]
& \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3\,y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 2\,y & & & - & t & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 2\,z & & & = & 0 \\ & - & 5\,y & + & 2\,z & + & t & = & 0 \end{array} \right. \\[2em]
& \overset{\substack{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + 3\,L_2 \\ L_4 \leftarrow 2\,L_4 + 5\,L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3\,y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 2\,y & & & - & t & = & 0 \\ & & & & 4\,z & - & 3\,t & = & 0 \\ & & & & 4\,z & - & 3\,t & = & 0 \end{array} \right. \\[2em]
& \overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & 3\,y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & 2\,y & & & - & t & = & 0 \\ & & & & 4\,z & - & 3\,t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2em]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3\,y & + & z & = & -t \\ & & 2\,y & & & = & t \\ & & & & 4\,z & = & 3\,t \end{array} \right. \\[2em]
& \overset{L_1 \leftarrow 4\,L_1 - L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4\,x & - & 12\,y & & & = & -7\,t \\ & & 2\,y & & & = & t \\ & & & & 4\,z & = & 3\,t \end{array} \right. \\[2em]
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 6\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4\,x & & & & & = & -t \\ & & 2\,y & & & = & t \\ & & & & 4\,z & = & 3\,t \end{array} \right.
\end{array}$$

× Ainsi :
$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(g-\mathrm{id}) &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=-\tfrac{1}{4}\,t \text{ et } y=\tfrac{1}{2}\,t \text{ et } z=\tfrac{3}{4}\,t\}\\ &= \{\left(-\tfrac{1}{4}\,t,\ \tfrac{1}{2}\,t,\ \tfrac{3}{4}\,t,\ t\right) \mid t\in\mathbb{R}\}\\ &= \{t\cdot\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},1\right) \mid t\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{Vect}\left(\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},1\right)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \operatorname{Ker}(g-\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}\left((-1,2,3,4)\right).}$$

- Déterminons $\operatorname{Ker}(g-2\,\mathrm{id})$.

× Soit $u\in\mathbb{R}^4$. Alors il existe $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tel que : $U=\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}u\in\operatorname{Ker}(g-2\,\mathrm{id}) &\iff (g-2\,\mathrm{id})(u)=0_{\mathbb{R}^4}\\ &\iff (M_{\mathcal{C}}(g)-2\,I_4)\,U=0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\\ &\iff \begin{pmatrix}-1&2&0&-1\\1&-4&1&1\\1&-6&2&1\\1&-8&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}-x&+&2\,y&&&-&t&=&0\\x&-&4\,y&+&z&+&t&=&0\\x&-&6\,y&+&2\,z&+&t&=&0\\x&-&8\,y&+&3\,z&+&t&=&0\end{array}\right.\\ &\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1\\L_3\leftarrow L_3+L_1\\L_4\leftarrow L_4+L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}-x&+&2\,y&&&-&t&=&0\\&-&2\,y&+&z&&&=&0\\&-&4\,y&+&2\,z&&&=&0\\&-&6\,y&+&3\,z&&&=&0\end{array}\right.\\ &\overset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2\,L_2\\L_4\leftarrow L_4-3\,L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}-x&+&2\,y&&&-&t&=&0\\&-&2\,y&+&z&&&=&0\\&&&&&&0&=&0\\&&&&&&0&=&0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl}-x&+&2\,y&=&t\\&-&2\,y&=&-z\end{array}\right.\\ &\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl}-x&&&=&-z+t\\&-&2\,y&=&-z\end{array}\right.\end{aligned}$$

× Ainsi :
$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(g-2\,\mathrm{id}) &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x=z-t \text{ et } y=\tfrac{1}{2}\,z\}\\ &= \{\left(z-t,\ \tfrac{1}{2}\,t,\ z,\ t\right) \mid (z,t)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \{z\cdot\left(1,\tfrac{1}{2},1,0\right)+t\cdot(-1,0,0,1) \mid (z,t)\in\mathbb{R}^2\}\\ &= \operatorname{Vect}\left(\left(1,\tfrac{1}{2},1,0\right),(-1,0,0,1)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \operatorname{Ker}(g-2\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}\left((2,1,2,0),(-1,0,0,1)\right).}$$

□

(iii) En déduire tous les vecteurs non nuls v de $\mathbb{R}^4$ tels que $r(g, v) = 1$.

Démonstration.
Soit $v \in \mathbb{R}^4$ tel que : $v \neq 0_{\mathbb{R}^4}$. On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse**
  Supposons : $r(g, v) = 1$.
  Alors, d'après la question ***3.a)***, $\mathrm{Vect}\,(v)$ est stable par g. En particulier : $v \in \mathrm{Vect}\,(v)$. D'où : $g(v) \in \mathrm{Vect}\,(v)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $g(v) = \lambda\, v$. Ainsi :

$$\begin{array}{lrcl} & g(v) - \lambda\, v & = & 0_{\mathbb{R}^4} \\ \text{donc} & (g - \lambda\,\mathrm{id})(v) & = & 0_{\mathbb{R}^4} \\ \text{d'où} & & v \in \mathrm{Ker}(g - \lambda\,\mathrm{id}) & \end{array}$$

  Or $v \neq 0_{\mathbb{R}^4}$. On en conclut :

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{Ker}(g - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\} \\ \text{donc} & g - \lambda\,\mathrm{id} \text{ non bijectif} \\ \text{d'où} & \det(g - \lambda\,\mathrm{id}) = 0 \\ \text{ainsi} & (\lambda - 1)^2\,(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{3.b)(i)}}\textit{)} \\ \text{alors} & \lambda = 1 \ \texttt{OU} \ \lambda = 2 \end{array}$$

  On en déduit : $v \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$ ou $v \in \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{id})$. Autrement dit :

$$v \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) \cup \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{id})$$

- **Synthèse**
  Supposons : $v \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) \cup \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{id})$.
  Démontrons alors : $r(g, v) = 1$. Deux cas se présentent :
  × si $v \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id})$, alors : $g(v) = v$.
    On en déduit : $\big(v, g(v)\big) = (v, v)$. Ainsi, la famille $\big(v, g(v)\big)$ est liée. D'où : $r(g, v) \leqslant 1$.
    Or, d'après la question ***1.b)*** : $r(g, v) \geqslant 1$.
    Ainsi : $r(g, v) = 1$.
  × si $v \in \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{id})$, alors : $g(v) = 2\,v$.
    On en déduit : $\big(v, g(v)\big) = (v, 2\,v)$. Ainsi, la famille $\big(v, g(v)\big)$ est liée. D'où : $r(g, v) \leqslant 1$.
    Or, d'après la question ***1.b)*** : $r(g, v) \geqslant 1$.
    Ainsi : $r(g, v) = 1$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, tous les vecteurs non nuls } v \text{ de } \mathbb{R}^4 \text{ tels que } r(g, v) = 1 \text{ sont} \\ \text{les vecteurs non nuls de } \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) \cup \mathrm{Ker}(g - 2\,\mathrm{id}).\end{array}}$$

Commentaire

On a ici opté pour une démonstration par analyse-synthèse. Ce type de raisonnement est très adapté aux problèmes qui demandent d'écrire les éléments d'un ensemble $\mathcal{S}$ sous une forme particulière.

$$\forall \, elmt \in \mathcal{S}, \quad \begin{array}{c} elmt \text{ répond à certains critères} \\ \text{(relatifs au problème posé)} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} elmt \text{ se décrit très précisément} \\ \text{(sous une forme particulière)} \end{array}$$

C'est le cas ici : on demande de déterminer la forme des vecteurs v vérifiant $r(g, v) = 1$.

× le sens direct est appelé **analyse**.

Lors de cette étape, on suppose que v répond aux critères du problème. Ici, il s'agit de supposer que $r(g, v) = 1$.
On est alors amener à expliciter avec précision la forme de v. Cela correspond ici à donner l'ensemble auquel appartient v.

× le sens réciproque est appelé **synthèse**.

Lors de cette étape, on possède la description précise de v (on a accès à l'ensemble auquel il appartient) et on vérifie alors que celle-ci répond aux critères relatifs aux problème posé (on vérifie : $r(g, v) = 1$).

□

4. On suppose dans cette question, *et dans cette question seulement*, que $r(f, u) = n$.

a) Montrer qu'alors la famille $\mathscr{B}(u) = \big(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\big)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\mathscr{B}(u)$ est libre.
  On procède par l'absurde.
  Supposons que la famille $\mathscr{B}(u) = \big(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\big)$ est liée.
  Alors, par définition de $r(f, u)$, on en déduit : $r(f, u) \leqslant n - 1$.
  Absurde ! (car dans cette question : $r(f, u) = n$)

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}(u) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathscr{B}(u)$ est donc :
  × libre,
  × telle que : $\text{Card}\big(\mathscr{B}(u)\big) = n = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{B}(u) \text{ est une base de } E.}$$

□

b) Déterminer la matrice $M_{\mathscr{B}(u)}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}(u)$, en fonction des coordonnées $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $f^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}(u)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$f(u) \;=\; 0 \cdot u + 1 \cdot f(u) + 0 \cdot f^2(u) + \cdots + 0 \cdot f^{n-1}(u)$$

Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}(u)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Ensuite :

$$f\big(f(u)\big) \;=\; f^2(u) \;=\; 0\cdot u + 0\cdot f(u) + 1\cdot f^2(u) + 0\cdot f^3(u) + \cdots + 0\cdot f^{n-1}(u)$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}(u)}\Big(f\big(f(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$.

- $\cdots$
- Puis :

$$f\big(f^{n-2}(u)\big) \;=\; f^{n-1}(u) \;=\; 0\cdots u + 0\cdot f(u) + \cdots + 0\cdot f^{n-2}(u) + 1\cdot f^{n-1}(u)$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}(u)}\Big(f\big(f^{n-2}(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$.

- Enfin :

$$f\big(f^{n-1}(u)\big) \;=\; f^n(u) \;=\; a_0\cdot u + a_1\cdot f(u) + \cdots + a_{n-1}\cdot f^{n-1}(u) \qquad \textit{(d'après l'énoncé)}$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}(u)}\Big(f\big(f^{n-1}(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} a_0\\a_1\\ \vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}(u)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & & & 0 & a_2\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots\\ 0 & & & 1 & 0 & a_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}\end{pmatrix}.}$$

□

c) Calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$ en fonction de $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\det(f) \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1\\ 0 & 1 & & & 0 & a_2\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots\\ 0 & & & 1 & 0 & a_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}\end{vmatrix} \;=\; (-1)^{n+1}a_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & & & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

(en développant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ ligne)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \det(f) = (-1)^{n+1}\, a_0.}$$

- Ensuite :

$$\mathrm{tr}(f) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \Big(M_{\mathscr{B}(u)}(f)\Big)_{i,i} \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} \Big(M_{\mathscr{B}(u)}(f)\Big)_{i,i} + \Big(M_{\mathscr{B}(u)}(f)\Big)_{n,n} \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} 0 + a_{n-1} \;=\; a_{n-1}$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(f) = a_{n-1}}$$

□

5. On note $\mathcal{P}(f,u)$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que l'endomorphisme $P(f)$ vérifie $P(f)(u) = 0_E$.

a) Montrer que $\mathcal{P}(f,u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, et vérifiant de plus la propriété suivante : $\forall\, P \in \mathcal{P}(f,u)$, $\forall\, Q \in \mathbb{K}[X]$, $PQ \in \mathcal{P}(f,u)$.

Démonstration.

- On note φ l'application définie par :

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & E \\ P & \mapsto & P(f)(u) \end{array}$$

Alors :

× d'une part, l'application φ est linéaire par linéarité de l'évaluation,

× d'autre part :

$$\mathcal{P}(f,u) \ = \ \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(u) = 0_E\} \ = \ \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \varphi(P) = 0_E\} \ = \ \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{P}(f,u) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}[X].}$$

Commentaire

- Détaillons la démonstration de la linéarité de φ.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$\begin{array}{rcll} \varphi(\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2) & = & (\lambda_1 \cdot Q_1 + \lambda_2 \cdot Q_2)(f)(u) & \\ & = & \big(\lambda_1 \cdot Q_1(f) + \lambda_2 \cdot Q_2(f)\big)(u) & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } f\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot Q_1(f)(u) + \lambda_2 \cdots Q_2(f)(u) & \textit{(par linéarité de l'évaluation en } u\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot \varphi(Q_1) + \lambda_2 \cdot \varphi(Q_2) & \end{array}$$

Ainsi, φ est bien linéaire.

- On aurait également pu exploiter la définition de sous-espace vectoriel pour démontrer que $\mathcal{P}(f,u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
  × Tout d'abord, par définition de $\mathcal{P}(f,u)$, on obtient : $\mathcal{P}(f,u) \subset \mathbb{K}[X]$.
  × Ensuite : $0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathcal{P}(f,u)$. En effet, en notant $Q_0 = 0_{\mathbb{K}[X]}$, on obtient : $Q_0(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  D'où : $Q_0(f)(u) = 0_E$.
  × Soit $(\lambda_1 ? \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(P_1, P_2) \in \big(\mathcal{P}(f,u)\big)^2$.

$$\begin{array}{rcll} (\lambda_1\ P_1 + \lambda_2\ P_2)(f)(u) & = & \lambda_1\, P_1(f)(u) + \lambda_2\, P_2(f)(u) & \\ & = & \lambda_1 \times 0_E + \lambda_2 \times 0_E & \textit{(car } (P_1,P_2) \in \big(\mathcal{P}(f,u)\big)^2\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$

  D'où : $\lambda_1\, P_1 + \lambda_2\, P_2 \in \mathcal{P}(f,u)$.

  Ainsi, $\mathcal{P}(f,u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

- Démontrons : $\mathcal{P}(f,u) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.
  - × Notons : $p = r(f,u)$. Alors, par définition de $r(f,u)$, la famille $\big(u, f(u), \dots, f^p(u)\big)$ est liée. Autrement dit, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{p+1}}\}$ tel que :
  $$\lambda_0\, u + \lambda_1\, f(u) + \cdots + \lambda_p\, f^p(u) \ = \ 0_E \qquad (*)$$
  On note alors Q le polynôme défini par :
  $$Q(X) \ = \ \lambda_0 + \lambda_1\, X + \cdots + \lambda_p\, X^p$$
  - × On remarque :
    - d'une part : $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ (car $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \neq 0_{\mathbb{R}^{p+1}}$),
    - d'autre part : $Q \in \mathcal{P}(f,u)$. En effet :
  $$\begin{array}{rcll} Q(f)(u) & = & (\lambda_0\,\mathrm{id} + \lambda_1\, f + \cdots + \lambda_p\, f^p)(u) & \\ & = & \lambda_0\, u + \lambda_1\, f(u) + \cdots + \lambda_p\, f^p(u) & \\ & = & 0_E & \textit{(d'après } (*)\textit{)} \end{array}$$

  $\boxed{\text{On a bien démontré : } \mathcal{P}(f,u) \neq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}.}$

- Soit $P \in \mathcal{P}(f,u)$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.
$$\begin{array}{rcll} (P\,Q)(f)(u) & = & (Q\,P)(f)(u) & \\ & = & \big(Q(f) \circ P(f)\big)(u) & \\ & = & Q(f)\big(P(f)(u)\big) & \\ & = & Q(f)(0_E) & \textit{(car } P \in \mathcal{P}(f,u)\textit{)} \\ & = & 0_E & \begin{array}{l}\textit{(car, comme } f \textit{ est linéaire,} \\ \textit{alors } Q(f) \textit{ est linéaire)}\end{array} \end{array}$$
Donc : $PQ \in \mathcal{P}(f,u)$.

  $\boxed{\text{Finalement : } \forall P \in \mathcal{P}(f,u),\ \forall Q \in \mathbb{K}[X],\ PQ \in \mathcal{P}(f,u).}$

□

b) On désigne par $B(f,u)$ un polynôme non nul de $\mathcal{P}(f,u)$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(f,u)$.

(i) Montrer que $\mathcal{P}(f,u)$ est l'ensemble des multiples de $B(f,u)$.
On pourra considérer la division euclidienne d'un polynôme P de $\mathcal{P}(f,u)$ par $B(f,u)$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\supset$) Soit P un multiple de $B(f,u)$.
Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P = Q \times B(f,u)$. On sait donc :
- × $B(f,u) \in \mathcal{P}(f,u)$ par définition de $B(f,u)$,
- × $Q \in \mathbb{K}[X]$.

D'après la question ***5.a)*** : $Q \times B(f,u) \in \mathcal{P}(f,u)$, *i.e.* $P \in \mathcal{P}(f,u)$.

$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble des multiples de } B(f,u) \text{ est inclus dans } \mathcal{P}(f,u).}$

($\subset$) Soit $P \in \mathcal{P}(f,u)$.
On effectue la division euclidienne de P par $B(f,u)$. Il existe donc $(Q,R) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \ = \ B(f,u) \times Q + R \\ \deg(R) < \deg\big(B(f,u)\big) \end{array} \right.$$

Alors : $R = P - B(f,u) \times Q$. Or :

× d'une part : $B(f,u) \in \mathcal{P}(f,u)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. D'après ***5.a)***, on obtient : $B(f,u) \times Q \in \mathcal{P}(f,u)$.

× d'autre part : $P \in \mathcal{P}(f,u)$.

Comme $\mathcal{P}(f,u)$ est un espace vectoriel d'après ***5.a)***, on en déduit : $P - B(f,u) \times Q \in \mathbb{K}[X]$.
Ainsi : $R \in \mathcal{P}(f,u)$.
On en déduit : $R = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
(en effet, si $R \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, cela contredit la minimalité du degré du polynôme $B(f,u)$)

$\boxed{\text{On en conclut que } \mathcal{P}(f,u) \text{ est inclus dans l'ensemble des multiples de } B(f,u).}$

$\boxed{\text{Finalement, } \mathcal{P}(f,u) \text{ est l'ensemble des multiples de } B(f,u).}$ $\square$

(ii) Montrer que le polynôme $B(f,u)$ est de degré $r(f,u)$.

Démonstration.

- Démontrons : $\deg\big(B(f,u)\big) \geqslant r(f,u)$.
Notons $d = \deg\big(B(f,u)\big)$. Alors il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que :

$$B(f,u) \ = \ \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \, X^k$$

On sait de plus :

× d'une part : $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \neq 0_{\mathbb{R}^{d+1}}$ car $B(f,u)$ n'est pas le polynôme nul.

× d'autre part, comme $B(f,u) \in \mathcal{P}(f,u)$: $\Big(B(f,u)\Big)(f)(u) = 0_E$. C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{d} \lambda_k \, f^k(u) \ = \ 0_E$$

Autrement dit la famille $\big(u, f(u), \dots, f^d(u)\big)$ est liée.

$\boxed{\text{Ainsi, par minimalité de } r(f,u) \text{, on obtient : } r(f,u) \leqslant d = \deg\big(B(f,u)\big).}$

- Démontrons : $r(f,u) \geqslant \deg\big(B(f,u)\big)$.
  On note : $r = r(f,u)$. Alors la famille $\big(u, f(u), \ldots, f^r(u)\big)$ est liée.
  Il existe donc $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^{r+1} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{d+1}}\}$ tel que :
  $$\sum_{k=0}^{r} \lambda_k\, f^k(u) \; = \; 0_E$$
  On note alors P le polynôme défini par : $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} \lambda_k\, X^k$. On obtient que le polynôme P :
  × n'est pas nul, car : $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r) \neq 0_{\mathbb{R}^{r+1}}$.
  × appartient à $\mathcal{P}(f,u)$, car :
  $$P(f)(u) \; = \; \sum_{k=0}^{r} \lambda_k\, f^k(u) \; = \; 0_E$$
  Par minimalité de $\deg\big(B(f,u)\big)$, on obtient : $\deg(P) \geqslant \deg\big(B(f,u)\big)$.
  Or, par définition de P : $r \geqslant \deg(P)$. Alors, par transitivité :
  $$r \; \geqslant \; \deg(P) \geqslant \; \deg\big(B(f,u)\big)$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } r(f,u) \geqslant \deg\big(B(f,u)\big).}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \deg\big(B(f,u)\big) = r(f,u).}$$
□

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(g, e_1)$, dans le cas où g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini en question **2**, et où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)(i)***, $\mathcal{P}(g, e_1)$ est l'ensemble des multiples de $B(g, e_1)$ où $B(g, e_1)$ est un polynôme non nul de $\mathcal{P}(g, e_1)$ de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(g, e_1)$.
  On cherche donc à déterminer l'un des polynômes non nuls de $\mathcal{P}(g, e_1)$ de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(g, e_1)$.
- D'après la question ***2.c)*** : $r(g, e_1) = 3$.
  Ainsi, d'après ***5.b)(ii)*** : $\deg\big(B(g, e_1)\big) = r(g, e_1) = 3$.
  On en déduit que le degré des polynômes non nuls de $\mathcal{P}(g, e_1)$ de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(g, e_1)$ est 3.
- Or, toujours d'après la question ***2.c)*** : $g^3(e_1) \; = \; 4\, g^2(e_1) - 5\, g(e_1) + 2\, e_1$. Ainsi :
  $$g^3(e_1) - 4\, g^2(e_1) + 5\, g(e_1) - 2\, e_1 \; = \; 0_E$$
  On pose alors Q le polynôme défini par : $Q(X) = X^3 - 4\, X^2 + 5\, X - 2$. On obtient :
  $$Q(g)(e_1) \; = \; g^3(e_1) - 4\, g^2(e_1) + 5\, g(e_1) - 2\, e_1 \; = \; 0_E$$
  Ainsi : $Q \in \mathcal{P}(g, e_1)$.
- Finalement, on remarque :
  × tout d'abord : $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$,
  × ensuite : $Q \in \mathcal{P}(g, e_1)$,
  × enfin : $\deg(Q) = 3$.
  On peut donc choisir Q comme polynôme non nul de $\mathcal{P}(g, e_1)$ de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(g, e_1)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après } \textbf{\textit{5.b)(i)}},\ \mathcal{P}(g, e_1) \text{ est l'ensemble des multiples de } Q \\ \text{où } Q(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2.\end{array}}$$
□

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(f,u)$ dans le cas où $r(f,u)=n$, en fonction des coordonnées $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $f^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}(u)$, comme définies en question **4**.

Démonstration.

- Comme $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ sont les coordonnées de $f^n(u)$ dans la base $\mathscr{B}(u)$, on obtient :

$$f^n(u) \;=\; a_0\, u + a_1\, f(u) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(u)$$

  Ainsi :

$$f^n(u) - a_{n-1}\, f^{n-1}(u) - \cdots - a_1\, f(u) - a_0\, u \;=\; 0_E$$

  On pose alors Q le polynôme défini par : $Q(X) = X^n - a_{n-1}\, X^{n-1} - \cdots - a_1\, X - a_0$. On obtient :

$$Q(f)(u) \;=\; f^n(u) - a_{n-1}\, f^{n-1}(u) - \cdots - a_1\, f(u) - a_0\, u \;=\; 0_E$$

  Ainsi : $Q \in \mathcal{P}(f,u)$.

- On suppose dans cette question : $r(f,u)=n$.
  Ainsi, d'après ***5.b)(ii)*** : $\deg\big(B(f,u)\big) = r(f,u) = n$.
  On en déduit que le degré des polynômes non nuls de $\mathcal{P}(f,u)$ de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(f,u)$ est n.

- Finalement, on remarque :
  × tout d'abord : $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$,
  × ensuite : $Q \in \mathcal{P}(f,u)$,
  × enfin : $\deg(Q) = n$.

  On peut donc choisir Q comme polynôme non nul de $\mathcal{P}(f,u)$ de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathcal{P}(f,u)$.

D'après ***5.b)(i)***, $\mathcal{P}(f,u)$ est l'ensemble des multiples de Q
où $Q(X) = X^n - a_{n-1}\, X^{n-1} - \cdots - a_1\, X - a_0$.

□

6. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

a) Montrer que pour tout $u \in E$ non nul, le polynôme $B(f,u)$, comme défini en question **5b**, est un monôme.

Démonstration.
Soit $u \in E$.

- On note Q le polynôme défini par : $Q(X) = X^p$. Alors :

$$Q(f)(u) \;=\; f^p(u) \;=\; 0_E \qquad \textit{(car } f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)}$$

  On en déduit : $Q \in \mathcal{P}(f,u)$.

- Or, d'après ***5.b)(i)***, $\mathcal{P}(f,u)$ est l'ensemble des multiples de $B(f,u)$. On en déduit que Q est un multiple de $B(f,u)$. On sait donc qu'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $Q = B(f,u) \times R$.

- On procède par l'absurde.
Supposons que $B(f,u)$ n'est pas un monôme.
Alors $B(f,u)$ admet au moins une racine non nulle complexe α_0. Il existe donc $\widetilde{R} \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\big(B(f,u)\big)(X) = (X - \alpha_0) \times \widetilde{R}(X)$. Ainsi :
$$X^p \;=\; Q(X) \;=\; \big(B(f,u)\big) \times R(X) \;=\; (X - \alpha_0) \times \widetilde{R}(X) \times R(X)$$
On en déduit que $X - \alpha_0$ divise X^p.
Absurde ! (car $\alpha_0 \neq 0$)

$$\boxed{\text{Le polynôme } B(f,u) \text{ est donc un monôme.}}$$

□

b) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
× Il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f,u) = n$.
× $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.
On procède par double implication.
($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que : $r(f,u) = n$.
Par minimalité de $r(f,u)$, on en déduit que la famille $\big(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ est libre.
En particulier : $f^{n-1}(u) \neq 0_E$.
D'où : $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, s'il existe un vecteur non nul } u \text{ de } E \text{ tel que } r(f,u) = n, \text{ alors : } f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

- Il était aussi possible de raisonner à l'aide de la question précédente. Détaillons cette manière de procéder.
- Tout d'abord :
  × d'après la question ***5.b)(ii)*** : $\deg\big(B(f,u)\big) = r(f,u) = n$.
  × d'après la question précédente, $B(f,u)$ est un monôme.

  On en déduit : $B(f,u) = X^n$.
- Démontrons alors $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On procède par l'absurde.
Supposons : $f^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Alors en particulier : $f^{n-1}(u) = 0_E$. Le polynôme R défini par $R(X) = X^{n-1}$ vérifie donc : $R(f)(u) = f^{n-1}(u) = 0_E$. Ainsi :
  × d'une part : $R \in \mathcal{P}(f,u)$ et $R \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$,
  × d'autre part : $\deg(R) < \deg\big(B(f,u)\big)$.

  Absurde ! (car cela contredit la minimalité de degré de $B(f,u)$)
On en déduit : $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

($\Leftarrow$) Supposons : $f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Alors il existe $u \in E$ non nul tel que : $f^{n-1}(u) \neq 0_E$.
(on a bien $u \neq 0_E$ car, comme f^{n-1} est linéaire : $f^{n-1}(0_E) = 0_E$)
- Tout d'abord : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^k(u) \neq 0_E$.
En effet, il existerait sinon $m \in [\![1, n-1]\!]$ tel que : $f^m(u) = 0_E$. Mais alors :
$$f^{n-1}(u) \;=\; (f^{n-1-m} \circ f^m)(u) \;=\; f^{n-1-m}\big(f^m(u)\big) \;=\; f^{n-1-m}(0_E) \;=\; 0_E \quad \textit{(car } f^{n-1-m} \textit{ linéaire)}$$
ce qui est absurde.

- On obtient alors :
  × d'une part : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^k(u) \neq 0_E$.
  × d'autre part, d'après la question précédente, $B(f,u)$ est un monôme. Autrement dit, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\big(B(f,u)\big)(X) = X^m$. Ainsi :
  $$\big(B(f,u)\big)(f)(u) \ = \ f^m(u) \ = \ 0_E$$
  On en déduit : $m \geqslant n$. Et donc : $\deg\big(B(f,u)\big) \geqslant n$.
- Or, d'après la question ***5.b)(ii)*** : $\deg\big(B(f,u)\big) = r(f,u)$. On a alors :
  × d'une part : $r(f,u) = \deg\big(B(f,u)\big) \geqslant n$.
  × d'autre part, d'après la question ***1.b)*** : $r(f,u) \leqslant n$.
  D'où : $r(f,u) = n$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } f^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}, \text{ alors il existe un vecteur non nul } u \text{ de } E \text{ tel que : } r(f,u) = n.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, il existe un vecteur non nul } u \text{ de } E \text{ tel que : } r(f,u) = n \\ \text{si et seulement si } f^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}.\end{array}}$$

□

7. Dans cette question, on suppose qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. On note $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ une telle base, et on pose $M_{\mathcal{W}}(f) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, de sorte que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(w_k) = \lambda_k w_k$.

a) On suppose qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f,u) = n$. On note $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k w_k$.

(i) Écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathscr{B}(u)$, comme définie en question **4**.

Démonstration.

- Tout d'abord, puisqu'on suppose que $r(f,u) = n$, la famille $\mathscr{B}(u)$ est bien une base de E d'après la question ***4.a)***.
- Ensuite, d'après l'énoncé : $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot w_k = \alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \alpha_n \cdot w_n$.
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{W}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
- De plus :
$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot f(w_k) \qquad \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \lambda_k \cdot w_k \qquad \textit{(par définition de } w_1, \ldots, w_n\textit{)} \\ &= \lambda_1\, \alpha_1 \cdot w_1 + \lambda_2\, \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \lambda_n\, \alpha_n \cdot w_n \end{aligned}$$
  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{W}}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} \lambda_1\, \alpha_1 \\ \lambda_2\, \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda_n\, \alpha_n \end{pmatrix}$.

- Puis :

$$\begin{array}{rcll} f^2(u) & = & f\big(f(u)\big) & \\ & = & f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\, \alpha_k \cdot w_k\right) & \textit{(d'après le point précédent)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\, \alpha_k \cdot f(w_k) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2\, \alpha_k \cdot w_k & \textit{(par définition de } w_1, \ldots, w_n\textit{)} \\ & = & \lambda_1^2\, \alpha_1 \cdot w_1 + \lambda_2^2\, \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \lambda_n^2\, \alpha_n \cdot w_n & \end{array}$$

Ainsi : $\text{Mat}_{\mathcal{W}}\big(f^2(u)\big) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2\, \alpha_1 \\ \lambda_2^2\, \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^2\, \alpha_n \end{pmatrix}$.

- $\cdots$
- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} f^{n-1}(u) & = & f\big(f^{n-2}(u)\big) & \\ & = & f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{n-2}\, \alpha_k \cdot w_k\right) & \textit{(d'après le point précédent)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{n-2}\, \alpha_k \cdot f(w_k) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{n-1}\, \alpha_k \cdot w_k & \textit{(par définition de } w_1, \ldots, w_n\textit{)} \\ & = & \lambda_1^{n-1}\, \alpha_1 \cdot w_1 + \lambda_2^{n-1}\, \alpha_2 \cdot w_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1}\, \alpha_n \cdot w_n & \end{array}$$

Ainsi : $\text{Mat}_{\mathcal{W}}\big(f^{n-1}(u)\big) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1}\, \alpha_1 \\ \lambda_2^{n-1}\, \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1}\, \alpha_n \end{pmatrix}$.

Finalement, la matrice de passage de $\mathcal{W}$ dans $\mathscr{B}(u)$ est : $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\, \alpha_1 & \lambda_1^2\, \alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\, \alpha_1 \\ \alpha_2 & \lambda_2\, \alpha_2 & \lambda_2^2\, \alpha_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\, \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\, \alpha_n & \lambda_n^2\, \alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\, \alpha_n \end{pmatrix}$.

Commentaire

On pourrait démontrer rigoureusement par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$
où $\mathcal{P}(p)$: $f^p(u) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^p\, \alpha_k \cdot w_k$.

- **Initialisation** :

$$f^0(u) \;=\; u \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot w_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^0\, \alpha_k \cdot w_k$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Commentaire

- **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ (*i.e.* $f^{p+1}(u) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{p+1}\, \alpha_k \cdot w_k$).

$$\begin{array}{rcll} f^{p+1}(u) & = & f\big(f^p(u)\big) & \\ & = & f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^p\, \alpha_k \cdot w_k\right) & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^p\, \alpha_k \cdot f(w_k) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^p\, \alpha_k\, \lambda_k \cdot w_k & \textit{(par définition de } w_1, \ldots, w_n\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{p+1}\, \alpha_k \cdot w_k & \end{array}$$

$\square$

(ii) En déduire que les λ_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux distincts, et que les α_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$, sont tous non nuls.

Démonstration.

- Démontrons : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$.
  On procède par l'absurde.
  Supposons qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que : $\alpha_k = 0$. Alors, la matrice de passage $P_{\mathcal{W}, \mathscr{B}(u)}$ de $\mathcal{W}$ dans $\mathscr{B}(u)$ vérifie :

$$P_{\mathcal{W}, \mathscr{B}(u)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\, \alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\, \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k-1} & \lambda_{k-1}\, \alpha_{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{n-1}\, \alpha_{k-1} \\ \alpha_k & \lambda_k\, \alpha_k & \cdots & \lambda_k^{n-1}\, \alpha_k \\ \alpha_{k+1} & \lambda_{k+1}\, \alpha_{k+1} & \cdots & \lambda_{k+1}^{n-1}\, \alpha_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\, \alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\, \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\, \alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\, \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k-1} & \lambda_{k-1}\, \alpha_{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{n-1}\, \alpha_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{k+1} & \lambda_{k+1}\, \alpha_{k+1} & \cdots & \lambda_{k+1}^{n-1}\, \alpha_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\, \alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\, \alpha_n \end{pmatrix}$$

  Ainsi, $P_{\mathcal{W}, \mathscr{B}(u)}$ n'est pas inversible.
  Absurde ! (car $P_{\mathcal{W}, \mathscr{B}(u)}$ est une matrice de passage)

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha_k \neq 0.}$$

- Démontrons que, les éléments de la famille $\big(\lambda_k\big)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont deux à deux distincts.
  Autrement dit, démontrons :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (i \neq j) \;\Rightarrow\; (\lambda_i \neq \lambda_j)$$
  On procède également par l'absurde.
  Supposons qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que :
  $$i \neq j \quad \texttt{ET} \quad \lambda_i = \lambda_j$$
  Alors :
  $$P_{\mathcal{W},\mathscr{B}(u)} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\,\alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\,\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_i & \lambda_i\,\alpha_i & \cdots & \lambda_i^{n-1}\,\alpha_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_j & \lambda_j\,\alpha_j & \cdots & \lambda_j^{n-1}\,\alpha_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\,\alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\,\alpha_n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\,\alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\,\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_i & \lambda_i\,\alpha_i & \cdots & \lambda_i^{n-1}\,\alpha_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_j & \lambda_{\color{red}i}\,\alpha_j & \cdots & \lambda_{\color{red}i}^{n-1}\,\alpha_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\,\alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\,\alpha_n \end{pmatrix}$$
  Ainsi, $P_{\mathcal{W},\mathscr{B}(u)}$ n'est pas inversible car ses $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes sont colinéaires.
  En effet : $L_j = \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i}\; L_i$.
  Absurde ! (car $P_{\mathcal{W},\mathscr{B}(u)}$ est une matrice de passage)
  $$\boxed{\text{On en déduit que, pour } k \in [\![1,n]\!], \text{ les } \lambda_k \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

□

b) On suppose que les λ_k, pour $k \in [\![1,n]\!]$, sont deux à deux distincts.
Montrer qu'il existe un vecteur non nul u de E tel que $r(f,u) = n$.

Démonstration.
On pose : $u = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k$.

- On souhaite démontrer : $r(f,u) = n$. C'est-à-dire : $r(f,u) > n-1$ (car, d'après ***1.b)***, $r(f,u) \leqslant n$). Pour cela, on va démontrer que la famille $\mathscr{B}(u) = \big(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ est une base de E, et donc est une famille libre de E.
- Pour montrer que $\mathscr{B}(u)$ est une base de E, on démontre que la matrice représentative de cette famille dans la base $\mathcal{W}$ (on la note P) est une matrice de passage. Autrement dit, on démontre que P est inversible.
- Avec le même raisonnement qu'en question ***7.a)***, on obtient :
  $$P \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$
  On démontre alors : $\det(P) \neq 0$.

× Tout d'abord :

$$
\begin{aligned}
& \det(P) \\
= \; & \begin{vmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_{n-1}^{n-1} \\
1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-2} & \lambda_n^{n-1}
\end{vmatrix} \\
\overset{C_n \leftarrow C_n - \lambda_n C_{n-1}}{=} \; & \begin{vmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} - \lambda_n \lambda_1^{n-2} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} - \lambda_n \lambda_2^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_{n-1}^{n-1} - \lambda_n \lambda_{n-1}^{n-2} \\
1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-2} & 0
\end{vmatrix} \\
= \; & \cdots \\
\overset{C_3 \leftarrow C_3 - \lambda_n C_2}{=} \; & \begin{vmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 - \lambda_n \lambda_1 & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1^{n-3} & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1^{n-2} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 - \lambda_n \lambda_2 & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2^{n-3} & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 - \lambda_n \lambda_{n-1} & \cdots & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1}^{n-3} & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1}^{n-2} \\
1 & \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix} \\
\overset{C_2 \leftarrow C_2 - \lambda_n C_1}{=} \; & \begin{vmatrix}
1 & \lambda_1 - \lambda_n & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1 & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1^{n-3} & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1^{n-2} \\
1 & \lambda_2 - \lambda_n & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2 & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2^{n-3} & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & \lambda_{n-1} - \lambda_n & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1} & \cdots & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1}^{n-3} & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1}^{n-2} \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix} \\
= \; & (-1)^{n+1} \begin{vmatrix}
\lambda_1 - \lambda_n & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1 & \cdots & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1^{n-3} & (\lambda_1 - \lambda_n)\, \lambda_1^{n-2} \\
\lambda_2 - \lambda_n & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2 & \cdots & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2^{n-3} & (\lambda_2 - \lambda_n)\, \lambda_2^{n-2} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\lambda_{n-1} - \lambda_n & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1} & \cdots & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1}^{n-3} & (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, \lambda_{n-1}^{n-2}
\end{vmatrix} \\
& \textit{(en développant par rapport à la dernière ligne)} \\
= \; & (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_n) \begin{vmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-2} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

× On note :

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a ainsi démontré :

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_n) \times V(\lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1})$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathcal{P}(n)$ où
$\mathcal{P}(n)$: $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

- **Initialisation** :
  soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.
  - d'une part :

$$V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1^{2-1} \\ 1 & a_2^{2-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

  - d'autre part :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (a_j - a_i) = \prod_{i=1}^{1} \left(\prod_{j=2}^{2} (a_j - a_i) \right) = a_2 - a_1$$

  D'où $\mathcal{P}(2)$.

- **Hérédité** : soit $n \in [\![2, +\infty[\![$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
  (*i.e.* $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $V(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)$).
  Soit $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
  - d'une part :

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) &= (-1)^{n+2} \prod_{k=1}^{n} (a_k - a_{n+1}) \times V(a_1, \dots, a_n) && \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= (-1)^{n+2} \prod_{k=1}^{n} (a_k - a_{n+1}) \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-1)^{n+2} \prod_{k=1}^{n} \big((-1) \times (a_{n+1} - a_k) \big) \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \\ &= (-1)^{n+2} \times (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \\ &= (-1)^{2n+2} \prod_{k=1}^{n} (a_{n+1} - a_k) \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (a_j - a_i) \right) \end{aligned}$$

- d'autre part :

$$\begin{aligned}
\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j-a_i) &= \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n+1}(a_j-a_i)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left((a_{n+1}-a_i)\times\prod_{j=i+1}^{n}(a_j-a_i)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\times\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j-a_i)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j-a_i)\right)\times\prod_{j=n+1}^{n}(a_j-a_n)\\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j-a_i)\right)\times\prod_{j\in\varnothing}(a_j-a_n)\\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{j=i+1}^{n}(a_j-a_i)\right)\times 1
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $V(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) \;=\; \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j-a_i)$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Par principe de récurrence :}\\ \forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ V(a_1,\dots,a_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).\end{gathered}}$$

× On obtient alors :

$$\det(P) \;=\; V(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \;\neq\; 0$$

En effet, d'après l'énoncé, les λ_i sont deux à deux distincts.
La matrice P est donc inversible. Ainsi, c'est bien une matrice de passage (ce que l'on souhaitait démontrer).

$$\boxed{\text{Finalement, en posant } u=\sum_{k=1}^{n} w_i,\text{ on a bien : } r(f,u)=n.}$$

Commentaire

- L'idée menant au choix du vecteur $u=\sum\limits_{k=1}^{n} w_k$ est un raisonnement par analyse-synthèse.
  Plus précisément, c'est l'analyse qui nous fournit un candidat potentiel.
  × **Analyse**
  Supposons qu'il existe un vecteur u non nul de E tel que $r(f,u)=n$.
  Comme $\mathcal{W}$ est une base de E, il existe, comme en question ***7.a)***, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que : $u=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\,w_k$.
  On en déduit, d'après la question ***7.a)(ii)*** :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \alpha_k\neq 0$$

  × On choisit donc un vecteur u tel que ses coordonnées $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ dans la base $\mathcal{W}$ sont toutes non nulles. Par exemple, les coordonnées $(1,1,\dots,1)$.

Commentaire

- On peut en fait démontrer par analyse-synthèse :

$$\{u \in E \mid r(f,u) = n\} \ = \ \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, w_k \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \big(\mathbb{R}^*\big)^n\}$$

Soit $u \in E$. Alors il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $u = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, w_k$.

× **Analyse**
Supposons : $r(f,u) = n$.
Alors, avec le même raisonnement que ci-dessus :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \alpha_k \neq 0$$

× **Synthèse**
Supposons : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_k \neq 0$.
Comme dans la démonstration, on cherche à démontrer que $r(f,u) = n$ en prouvant que la famille $\mathscr{B}(u)$ est une base de E. Pour cela on démontre que la matrice représentative Q de $\mathscr{B}(u)$ dans la base $\mathcal{W}$ est inversible.

$$Q \ = \ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\,\alpha_1 & \lambda_1^2\,\alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\,\alpha_1 \\ \alpha_2 & \lambda_2\,\alpha_2 & \lambda_2^2\,\alpha_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\,\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\,\alpha_n & \lambda_n^2\,\alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\,\alpha_n \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \det(Q) \ &= \ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda_1\,\alpha_1 & \lambda_1^2\,\alpha_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\,\alpha_1 \\ \alpha_2 & \lambda_2\,\alpha_2 & \lambda_2^2\,\alpha_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\,\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \lambda_n\,\alpha_n & \lambda_n^2\,\alpha_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\,\alpha_n \end{vmatrix} \\ &= \ \alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \ \alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \qquad \textit{(avec le calcul effectué dans la démonstration)} \end{aligned}$$

On a bien $\det(Q) \neq 0$ car les λ_i sont distincts deux à deux et les α_k sont tous non nuls.
On en déduit que $\mathscr{B}(u)$ est une base et donc : $r(f,u) = n$.

Commentaire

- Le raisonnement par analyse-synthèse est très adapté aux problèmes qui demandent d'écrire les éléments d'un ensemble $\mathcal{S}$ sous une forme particulière.

$$\forall\ elmt \in \mathcal{S},\quad \begin{array}{c} elmt \text{ répond à certains critères} \\ \text{(relatifs au problème posé)} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} elmt \text{ se décrit très précisément} \\ \text{(sous une forme particulière)} \end{array}$$

C'est le cas ici : on détermine la forme des vecteurs u vérifiant $r(f, u) = n$.

× le sens direct est appelé **analyse**.

Lors de cette étape, on suppose que u répond aux critères du problème. Ici, il s'agit de supposer que $r(f, u) = n$.
On est alors amener à expliciter avec précision la forme de u. Cela correspond ici à donner l'ensemble auquel appartient u.

× le sens réciproque est appelé **synthèse**.

Lors de cette étape, on possède la description précise de u (on a accès à l'ensemble auquel il appartient) et on vérifie alors que celle-ci répond aux critères relatifs aux problème posé (on vérifie : $r(f, u) = n$). □

Problème 2B (Mines) - sommes de projecteurs (corrigé par M. Anatole Castella)

- Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$.
- Le but de ce problème est de caractériser les endomorphismes de E qui sont la somme d'un nombre fini de projecteurs de E.
- On rappelle qu'un projecteur de E est un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$. On a alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, et p est la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
- On rappelle enfin que pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f, notée $\mathrm{tr}(f)$, la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E.

Partie 1 - Une condition nécessaire.

1. Si M et M' sont les matrices d'un même endomorphisme, alors elles sont liées par une formule de changement de base $M' = P^{-1}MP$, pour un certain $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors avec la propriété de la trace $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, on obtient $\mathrm{tr}(M') = \mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}(PP^{-1}M) = \mathrm{tr}(M)$. Donc la trace d'un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.

2. La matrice de p dans une base adaptée à $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ est diagonale, avec $\mathrm{rg}(p)$ coefficients 1 et $n - \mathrm{rg}(p)$ coefficients nuls sur la diagonale. D'où $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

3. a. Pour tout $x \in E$, $f(x) = p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_m(x)$, et $p_k(x) \in \mathrm{Im}(p_k)$, d'où le résultat.

b. Par linéarité de la trace, $\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^m \mathrm{tr}(p_k) = \sum_{k=1}^m \mathrm{rg}(p_k)$ par **2**. Et par **3a** et le fait que la dimension d'une somme de sous-espaces est inférieure à la somme des dimensions, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \sum_{k=1}^m \dim(\mathrm{Im}(p_k)) = \sum_{k=1}^m \mathrm{rg}(p_k) = \mathrm{tr}(f)$.

4. a. Supposons que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ sont proportionnels. Considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et posons $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, e_k et $f(e_k)$ sont proportionnels, donc il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_k) = \lambda_k e_k$. Et de même, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e) = \lambda e$. Mais par linéarité, $f(e) = \sum_{k=1}^n f(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, donc l'égalité $f(e) = \lambda e$ se ré-écrit $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^n \lambda e_k$.

Par unicité des décompositions dans la base $\mathscr{B}$, on a donc $\lambda_k = \lambda$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, de sorte que f est l'homothétie de rapport λ (considérer sa matrice dans $\mathscr{B}$).

Par contraposée, si f n'est pas une homothétie, alors il existe $x \in E$ tel que x et $f(x)$ ne sont pas proportionnels.

b. Une base $\mathcal{B}$ de E obtenue en complétant la famille libre $(x, f(x))$ donnée par la question précédente, convient.

5. L'endomorphisme $f - t\mathrm{id}_E$ n'est pas une homothétie puisque f n'en est pas une. La question **4b** donne alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f - t\mathrm{id}_E) = M_{\mathcal{B}}(f) - tI_n$ est de la forme donnée en **4b**, dont $M_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme voulue ici, avec $B = A + tI_{n-1}$.

6. On va démontrer par récurrence sur n que pour tout endomorphisme non homothétique f d'un espace E de dimension n et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n t_k = \mathrm{tr}(f)$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a pour coefficients diagonaux $t_1, \ldots, t_n$.

- Cas $n = 2$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ non homothétique et $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $t_1 + t_2 = \mathrm{tr}(f)$.

  Par **5**, il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est
  $$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} t_1 & * \\ * & b \end{pmatrix}$$
  où $b \in \mathbb{R}$ est nécessairement tel que $\mathrm{tr}(f) = t_1 + b$, donc $b = t_2$.

  La propriété voulue est donc vraie dans le cas $n = 2$.

- Supposons $n \geqslant 3$ et la propriété voulue vraie pour les espaces de dimension $n-1$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ non homothétique, où $\dim(E) = n$, et $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n t_k = \mathrm{tr}(f)$.

  Par **5**, il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est
  $$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} t_1 & * \\ * & B \end{pmatrix}$$
  où $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ n'est pas la matrice d'une homothétie.

  Soit alors g l'endomorphisme de $F = \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_n)$ dont la matrice dans la base $(e_2, \ldots, e_n)$ est B. L'endomorphisme g n'est pas une homothétie et $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(f) - t_1 = \sum_{k=2}^n t_k$. Ainsi par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e'_2, \ldots, e'_n)$ de F dans laquelle la matrice de g a pour coefficients diagonaux $t_2, \ldots, t_n$.

  On vérifie alors facilement que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ de E a pour coefficients diagonaux $t_1, t_2, \ldots, t_n$:

  ⋆ *Démo vectorielle.* Vu $M_{\mathcal{B}}(f)$, on a $f(e_1) = t_1 e_1 + y$ où $y \in F = \mathrm{Vect}\,(e'_2, \ldots, e'_n)$, donc la composante de $f(e_1)$ selon e_1 dans la base $\mathcal{B}'$ est t_1. Et pour $k \in [\![2, n]\!]$, $f(e'_k) = \alpha_k e_1 + g(e'_k)$, donc la composante de $f(e'_k)$ selon e'_k est celle de $g(e'_k)$, et est donc égale à t_k.

  ⋆ *Démo matricielle.* La matrice B de g est semblable à une matrice de coefficients diagonaux $t_2, \ldots, t_n$, avec une matrice de passage $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$. On en déduit, via un calcul par blocs, que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est semblable à une matrice de coefficients diagonaux $t_1, t_2, \ldots, t_n$, avec pour matrice de passage $P = \mathrm{Diag}(1, Q)$, d'inverse $\mathrm{Diag}(1, Q^{-1})$.

7. Il suffit de prendre une base adaptée à un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(f)$ (qui est de dimension r d'après le théorème du rang) et à $\mathrm{Ker}(f)$.

8. a. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base fournie par la question précédente, et on en conserve les notations. Soit alors g l'endomorphisme de $S = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_r)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$ est A. On a $\mathrm{tr}(g) = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f)$, donc $\mathrm{tr}(g) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(g) \geqslant r$.

Posons alors $t_1 = t_2 = \cdots = t_{r-1} = 1$ et $t_r = \mathrm{tr}(f) - (r-1) \in \mathbb{N}^*$, de sorte que les réels $t_1, \ldots, t_r$ sont des entiers naturels non nuls.

Par **6**, comme g n'est pas une homothétie par hypothèse sur A, il existe une base $(e'_1, \ldots, e'_r)$ de S dans laquelle la matrice A' de g a pour coefficients diagonaux $t_1, \ldots, t_r$.

La matrice de f dans la base $(e'_1, \ldots, e'_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est alors comme voulue.

b. Notons $C_1, \ldots, C_r$ les r premières colonnes, et $t_1, \ldots, t_r$ les r premiers coefficients diagonaux, de la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$ obtenue en **6a**. On a $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{N}^*$ et$\sum_{k=1}^n t_k = \mathrm{tr}(f) = t$.

Notons P_i la matrice carrée de taille n dont toutes les colonnes sont nulles, sont la i-ème qui vaut $\frac{1}{t_i} C_i$. Le i-ème coefficient diagonal de P_i étant égal à 1, on vérifie facilement que $P_i^2 = P_i$, donc l'endomorphisme p_i de E de matrice P_i dans la base $\mathcal{B}'$ de **6b** est un projecteur.

Comme $M_{\mathcal{B}'}(f) = \sum_{k=1}^r t_k C_k$, on a $f = \sum_{k=1}^r t_k p_k = \underbrace{p_1 + \cdots + p_1}_{t_1 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{p_r + \cdots + p_r}_{t_r \text{ fois}}$.

Ainsi, f est bien la somme de t projecteurs de rang 1.

9. **a.** Si $\alpha = 1$, un calcul par blocs montre que $M_{\mathcal{B}}(f)^2 = M_{\mathcal{B}}(f)$, donc f est un projecteur.

b. • On a ici, avec les notations de **7**, $A = \alpha I_r$ avec $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = r\alpha \geqslant r$ et $r > 0$ (car f est supposé non nul), donc $\alpha \geqslant 1$. Ainsi si $\alpha \neq 1$, alors $\alpha > 1$.

• Si $r = 1$, alors $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et la matrice $\frac{1}{\alpha} M_{\mathcal{B}}(f)$ est, comme en **8b**, la matrice d'un projecteur, donc f est une somme de $\alpha = \mathrm{tr}(f)$ projecteurs de rang 1.

• Sinon, alors considérons la matrice élémentaire $E_{1,1}$ et l'endomorphisme p qui lui est associé dans la base $\mathcal{B}$ de **7**. Comme $E_{1,1}^2 = E_{1,1}$, p est un projecteur. De plus, la matrice de $f - p$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M_{\mathcal{B}}(f-p) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha I_r & (0) \\ \hline B & (0) \end{array}\right) - E_{1,1} = \left(\begin{array}{c|c} D & (0) \\ \hline B & (0) \end{array}\right)$$

où $D = \mathrm{Diag}(\alpha - 1, \alpha, \ldots, \alpha)$ n'est pas la matrice d'une homothétie, avec $\mathrm{tr}(D) = \alpha r - 1 = \mathrm{tr}(f) - 1$, qui est un entier naturel supérieur ou égal à $r = \mathrm{rg}(f - p)$ (puisque $\mathrm{tr}(f) = \alpha r > r$ dans ce cas). Ainsi, **8b** s'applique et montre que $f - p$ est une somme finie de projecteurs, donc $f = p + (f - p)$ l'est aussi.

Rq. On a donc montré dans ce problème qu'un endomorphisme f est une somme de projecteurs si et seulement si $\mathrm{tr}(f)$ est un entier supérieur ou égal à $\mathrm{rg}(f)$. Et de plus dans ce cas, f est la somme de $\mathrm{tr}(f)$ projecteurs de rang 1.