DS3

Avertissements

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- L'exercice est commun et devra être traité par tous les élèves.
- Les problèmes sont au choix :
  - × le Problème A est de type CCINP.
  - × le Problème B est de type Centrale.

  Un seul des deux problèmes devra être traité.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit**.

Exercice

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$.
Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{id})(P)$, où id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Démontrer que la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonale.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$$

8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0, n]\!]$.

11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Problème A - Autour de la transformation de Laplace

Dans tout ce problème, on note :
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout f dans E, on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$$

1. **Question préliminaire**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
On considère les propositions suivantes :
- ***(i)*** f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- ***(ii)*** F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre ***(i)*** et ***(ii)*** lorsque :
- ***(a)*** f est positive sur $[a, +\infty[$;
- ***(b)*** f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

2. ***a)*** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** On considère $\mathcal{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et bornée sur $[0,+\infty[$.
Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \mathcal{L}(f')(x) = x\,\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**

a) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que l'on a : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 est définie à la question *4*.

b) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

b) *Théorème de la valeur initiale*
On suppose, de plus, que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

8. **Théorème de la valeur finale**
On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

a) Démontrer que f appartient à F.

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\ dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

c) [`MODIFICATION`] *On admet le théorème suivant, dit théorème de convergence dominée (cf cours à venir sur les intégrales à paramètres).*
Soient (f_n) et f des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I,
× pour tout $x \in I$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,
× la fonction f est continue par morceaux sur I,
× il existe une fonction φ définie sur I telle que :
  – φ est à valeurs positives,
  – φ est intégrable sur I,
  – $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable, la fonction f est intégrable et :

$$\int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt \ = \ \lim_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)$$

Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\ dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'.
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait : $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)|\ dt + \varepsilon$$

c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

10. **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**
Ici, f est la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t > 0$ réel.

a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ admet une limite finie réelle ℓ en $+\infty$.

b) En considérant la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\ dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que, pour tout $X > 0$, on a :

$$\int_0^x \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ \ dt = -\ \frac{1}{1 + x^2}\left(\mathrm{e}^{-xX}(x\sin(X) + \cos(X)) - 1\right)$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$.

d) `[MODIFICATION]`

(i) *On admet qu'on peut ici intervertir intégrale et dérivée (résultat du chapitre à venir sur les intégrales à paramètres).*
Démontrer alors, pour tout $x > 0$:

$$\big(\mathcal{L}(f)\big)'(x) \ = \ -\frac{1}{1 + x^2}$$

(ii) En déduire, pour tout $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question ***9***) : lorsque f dans E vérifie : $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
On notera que, par rapport à la question ***9***, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par l'hypothèse $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \ell \in \mathbb{R}$.

Problème B

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\ dx = 1$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\ dx$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

I – Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que :

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie ***III***), mais faux si $I = [0,+\infty[$ (partie ***V***) ou $I = \mathbb{R}$.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.
On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$:

$$|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g)$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, P(x)\, dx = 0$$

On sait par la partie ***II*** qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\|P_n - (f-g)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

13. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\, dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\, dx$$

(On pourra raisonner par encadrement)

14. Montrer alors que $f = g$ sur $[0,1]$.

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi} \, \varphi(t) \, dt,$$

où φ est définie en (1).

15. ***a)*** Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie.

b) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que $\hat{\varphi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

16. [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \ \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi} \, t \, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

17. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

18. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

V – Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x)) \, dx$$

20. Montrer :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi - in)u} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \, du \right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

21. À l'aide de la partie ***IV***, en déduire que $I_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

22. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0, +\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.