DS3

Exercice - `CCINP 2018` - 27 points

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$.
Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

- **1 pt : si** $k = 0$**,** $\Big(\Delta(P_0)\Big)(X) = X\ P_0'(X) = 0$
- **1 pt : si** $k \in [\![1, n]\!]$**,** $\Big(\Delta(P_k)\Big)(X) = X\ P_k'(X) = X \times \left(k\ X^{k-1}\right) = k\ X^k$

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{id})(P)$, où id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt :** $\Big(\Delta \circ (\Delta - \mathrm{id})\Big)(P) = X^2\ P''$
- **1 pt : bonus dans le cas où il n'y a pas de confusion d'objets**

3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

- **1 pt :** $\deg(P) \leqslant n$ **et pas** $\deg(P) = n$ **ou autre confusion**
- **1 pt : degré du produit apparaît clairement**

4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}\left(\Delta_n\right) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ **et pas** $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}\left(\Delta_n\right) = \mathrm{Diag}(0, 1, 2, \ldots, n)$

5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2P'' + aXP'$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt :** $\Big(\Delta^2 + (a-1)\Delta\Big)(P) = \Phi(P)$
- **1 pt : bonus dans le cas où il n'y a pas de confusion d'objets**
- **1 pt :** Φ **est une application linéaire (linéarité démontrée `OU` c'est une CL / composée d'applications linéaires)**

6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt :** $\deg\left(X^2\ P'' + a\ X\ P'\right)\ \leqslant\ \max\Big(\deg(X^2\ P''), \deg\left(a\ X\ P'\right)\Big)$
- **1 pt :** $\deg(X^2\ P'') = \deg\left(X^2\right) + \deg\left(P''\right)\ \leqslant\ 2 + (n-2) = n$
- **1 pt :** $\deg(a\ X\ P')\ =\ \deg(a) + \deg\left(X\ P'\right)\ \leqslant\ n$

7. Démontrer que la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonale.

- **1 pt : cas** 0 **et** / **ou** 1 **traité à part**
- **1 pt :** $\Big(\Phi_n(P_k)\Big)(X) = (k\ (k-1) + a\ k) \cdot P_k$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}(\Phi_n) = \mathrm{Diag}(\ldots, k\ (k-1) + k\ a, \ldots)$

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2 P'' + aXP' + bP$$

8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

- **1 pt : si** $P \in \mathbb{R}_n[X]$**,** $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$
- **1 pt :** $\varphi_n \ = \ \Phi_n + b\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} \ = \ \Big(\Delta_n^2 + (a-1)\ \Delta_n\Big) + b\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$
en remarquant : $\varphi_n \ = \ \Phi_n + b\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$

9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}(\phi_n) \ = \ \mathrm{Diag}(\ldots, k\ (k-1) + k\ a + b = k^2 + (a-1)\ k + b, \ldots)$

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0, n]\!]$.

- **1 pt : raisonnement par équivalence** $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}(\varphi_n) \times \mathrm{Mat}(P) = 0_{\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})}$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\,(P_{m_1}, P_{m_2})$

11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\,(P_m)$ **par le même raisonnement**

12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

- **1 pt :** $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \mathrm{Card}\Big(\{s \in \mathbb{N} \mid s^2 + (a-1)s + b = 0\}\Big)$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ **ou** $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(P_m)$**ou** $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(P_{m_1}, P_{m_2})$

Problème A - Autour de la transformation de Laplace - `CCINP 2011 MP`

Dans tout ce problème, on note :

– $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$;

– E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

– F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout f dans E, on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$$

1. **Question préliminaire**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
On considère les propositions suivantes :
(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
(ii) F admet une limite finie en $+\infty$.
Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre ***(i)*** et ***(ii)*** lorsque :
(a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
(b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

- **1 pt :** $(i) \Leftrightarrow (ii)$
- **1 pt :** $(i) \Rightarrow (ii)$

Partie I : Exemples et propriétés

2. ***a)*** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

- **1 pt : E est un sev de $H = \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (structure de démo bien identifiée avec sur-espace vectoriel bien identifié)**
- **1 pt : $E \subset H$ et $E \neq \varnothing$ car $0_H \in E$**
- **2 pts : E est stable par CL par linéarité des intégrales impropres**

b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

- **1 pt : F est un sous-espace vectoriel de E et / ou $F \subset E$ et $F \neq \varnothing$ car $0_E \in F$**
- **2 pts : F est stable par CL par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives**

c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

- **1 pt : par linéarité de l'intégrale**
- **1 pt : les fonctions en présence étant intégrables**

3. ***a)*** On considère $\mathcal{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

- **1 pt :** $\mathcal{U} \in F \subset E$
- **1 pt :** $\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ dt = \frac{1}{x}$

b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

- **1 pt :** $h_\lambda \in F \subset E$ **car** $|h_\lambda| \leqslant 1$
- **1 pt :** $\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}\ dt = \frac{1}{x}$
- **1 pt :** $\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x+\lambda}$

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

- **1 pt :** $\dfrac{t^n \mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **donc** $\dfrac{t^n \mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} \leqslant 1$ **dans un voisinage de** $+\infty$
- **1 pt : théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues** $\geqslant 0$
- **1 pt : en rappelant que** $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ **est intégrable car** $x > 0$

5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$.
Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \ \mathcal{L}(f')(x) = x\,\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$

- **0 pt :** $\mathcal{L}(f')(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$
- **1 pt : IPP sur un segment** $\displaystyle\int_0^{B} f'(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt = f(B)\mathrm{e}^{-B\,x} - f(0) + x\int_0^{B} f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$
  (il est possible de faire l'IPP directement sur les intégrales impropres pour peu que la réserve de convergence soit levée)
- **1 pt :** $|\, f(B)\mathrm{e}^{-B\,x}\,| \leqslant \|f\|_\infty\ \mathrm{e}^{-B\,x}$
- **1 pt : théorème d'encadrement cité correctement et conclusion**

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**

a) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 est définie à la question *4*.

b) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

- **1 pt :** $|\mathcal{L}(f)(x)| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(t)\mathrm{e}^{-xt}\right|\ dt \leqslant \int_0^{+\infty} \|f\|_\infty \left|\mathrm{e}^{-xt}\right|\ dt = \dfrac{\|f\|_\infty}{x}$
- **1 pt : théorème d'encadrement écrit correctement**

b) *Théorème de la valeur initiale*
On suppose, de plus, que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

- **1 pt : on est dans le cadre de la question *5* puisque** f **est de calsse** $\mathscr{C}^1$**, est croissante et bornée**
- **1 pt :** $x\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + f(0)$
- **1 pt :** $\mathcal{L}(f')(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **d'après le point précédent**

8. **Théorème de la valeur finale**
On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

a) Démontrer que f appartient à F.

- **1 pt : f est un élément de E donc f est continue**
- **1 pt : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ donc f est bornée dans un voisinage de $+\infty$ noté $[A, +\infty[$ ($|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon = 1$ et donc $\ell - 1 \leqslant f(t) \leqslant \ell + 1$**
- **1 pt : f est continue sur le segment $[0, A]$ donc y est bornée et atteint ses bornes**

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\ dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

- **1 pt : en effectuant le changement de variable $t = \frac{u}{a_n}$, on trouve**
$$a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathbf{e}^{-a_n\, t}\ dt = a_n \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right)\ \mathbf{e}^{-u} \frac{1}{a_n}\ du$$
- **1 pt : changement de variable licite par intégrabilité de car $f \in E$**

c) [`MODIFICATION`] *On admet le théorème suivant, dit théorème de convergence dominée (cf cours à venir sur les intégrales à paramètres).*
Soient (f_n) et f des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I,
× pour tout $x \in I$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,
× la fonction f est continue par morceaux sur I,
× il existe une fonction φ définie sur I telle que :
 – φ est à valeurs positives,
 – φ est intégrable sur I,
 – $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable, la fonction f est intégrable et :
$$\int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\ dt \ = \ \lim_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n(t)\ dt\right)$$
Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

- **0 pt : mq** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right)\ \mathbf{e}^{-u}\ du = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right)\ \mathbf{e}^{-u}\ du = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} h_n(u)\ du$
- **0 pt : h_n continue**
- **2 pts : convergence simple**
  × **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \ell\ \mathbf{e}{-x}$ si $x > 0$**
  × **1 pt : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(0)$ si $x = 0$**
- **1 pt : f est continue par morceaux (seulement si l'expression précédente est exacte)**
- **1 pt : $|\,h_n(u)\,| \leqslant \|f\|_\infty\ \mathbf{e}^{-u}$ et $u \mapsto \mathbf{e}^{-u}$ est intégrable**

d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} x\ \mathcal{L}(f)(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n\ \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$
- **1 pt : ainsi** $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\ell}{x}$

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\ dt$ pour tout x dans $[0,+\infty[$.

a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et déterminer R'.
En déduire que, pour tout $x>0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x + \int_x^{+\infty} = \int_0^{+\infty}$ **et donc** $R(x) = R(0) - \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$
- **2 pts : caractère $\mathscr{C}^1$ pour une intégrale fonction de ses bornes**
  - × **1 pt : f continue donc admet une primitive de classe $\mathscr{C}^1$**
  - × **1 pt : conclusion**
- **2 pt : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$ en appliquant *5***
  - × **1 pt : application directe**
  - × **1 pt : vérification des hypothèses (on ne peut démontre R croissante mais R $\mathscr{C}^1$ et de limite nulle en ∞ donc bornée d'après *8*)**

b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait : $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x>0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)|\ dt + \varepsilon$$

- **1 pt :** $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| = |x\ \mathcal{L}(R)(x)| = x\ |\mathcal{L}(R)(x)| \leqslant x \displaystyle\int_0^{+\infty} |R(t)|\ \mathrm{e}^{-xt}$
- **1 pt :** $\leqslant x \displaystyle\int_0^A |R(t)|\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt + x\int_A^{+\infty} |R(t)|\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$
- **1 pt :** $\leqslant x \displaystyle\int_0^A |R(t)|\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt + x\int_A^{+\infty} \varepsilon\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$
- **1 pt : car $\exists A > 0, \forall t \geqslant A, |R(t)| \leqslant \varepsilon$ puisque R de limite nulle en $+\infty$**

c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

- **1 pt :** $x \displaystyle\int_0^A |R(t)|\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$**, ainsi** $x\displaystyle\int_0^A |R(t)|\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt \leqslant \varepsilon$ **pour x dans un voisinage de 0**
- **1 pt : on en conclut : $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant 2\ \varepsilon$ et par définition de limite : $\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} R(0)$.**

Partie III : Application

10. **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**

Ici, f est la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t > 0$ réel.

a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ admet une limite finie réelle ℓ en $+\infty$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**

b) En considérant la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\ dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**

c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que, pour tout $X > 0$, on a :

$$\int_0^x \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ \ dt = -\ \frac{1}{1+x^2}\left(\mathrm{e}^{-xX}(x\sin(X)+\cos(X)) - 1\right)$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**

d) [`MODIFICATION`]

(i) *On admet qu'on peut ici intervertir intégrale et dérivée (résultat du chapitre à venir sur les intégrales à paramètres).*
Démontrer alors, pour tout $x > 0$:

$$\big(\mathcal{L}(f)\big)'(x) \ = \ -\frac{1}{1+x^2}$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**

(ii) En déduire, pour tout $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question ***9***) : lorsque f dans E vérifie : $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
On notera que, par rapport à la question ***9***, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = \ell \in \mathbb{R}$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**

Problème B

I – Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- **1 pt : la fonction g est continue et positive sur $[0,+\infty[$**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^B g(x)\ dx = \int_0^B \mathrm{e}^{-x}\ dx = \Big[-\mathrm{e}^{-x} \Big]_0^B = -\mathrm{e}^{-B} + 1 \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
- **3 pts : existence moment d'ordre n**
  - × **1 pt : la fonction $g_n : x \mapsto x^n\, g(x)$ est positive sur $[0,+\infty[$**
  - × **1 pt :** $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)$
  - × **1 pt : critère de négligeabilité écrit correctement**
- **2 pts : calcul**
  - × **1 pt :** $m_n(g) = n\, m_{n-1}$
  - × **1 pt :** $m_n(g) = n!$ **par récurrence immédiate**

2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

- **1 pt : par parité il suffit de démontrer la convergence sur $[0,+\infty[$**
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $\varphi_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^n\, \mathrm{e}^{-x}\right)$
  - × **1 pt : critère de négligeabilité**

3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

- **1 pt :** $2p+1$ **est impair et φ est paire, alors** $\varphi_{2p+1} : x \mapsto x^{2p+1}\,\varphi(x)$ **est impaire**
- **1pt :** $m_{2p+1}(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{2p+1}(x)\ dx = 0$

Pour avoir les 2 points, l'argument de la convergence doit être présent

4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

- **1 pt :** $m_{2p}(\varphi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\,\varphi(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1}\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$
- **1 pt :** $m_{2p}(\varphi) = (2p-1)\, m_{2(p-1)}(\varphi)$
- **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N}$**,** $m_{2p}(\varphi) = (2p-1)\,(2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1$
- **1 pt :** $\forall p \in \mathbb{N}$**,** $m_{2p}(\varphi) = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$

5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

- **4 pts : on peut construire la fonction**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{4\,x^2} & \textbf{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{4} & \textbf{si } x \in\,]-1,1[\\ \dfrac{1}{4\,x^2} & \textbf{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On notera entre 1 et 4 toute autre tentative cohérente

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} \;=\; \big(\cancel{x} + (1-\cancel{x})\big)^n \;=\; 1$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.

- **1 pt :** $\forall k \in [\![0,n]\!]$ **:** $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k}$
  (pour pouvoir utiliser ce qui précède)
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} x^k \,(1-x)^{n-k} = n \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} \,(1-x)^{n-(k+1)} = n\,x \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \,(1-x)^{(n-1)-k} = n\,x \times \big(\cancel{x} + (1-\cancel{x})\big)^{n-1}$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.

- **1 pt : on écrit** $k^2 = k(k-1) + k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} + \sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = nx$ **(question précédente)**

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} \;\leqslant\; Cn$.

- **1 pt :** $(k-nx)^2 = k^2 - 2nxk + (nx)^2$
- **2 pts : 2 résultats au moins sur les 3 suivants**
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = n\,x + n\,(n-1)\,x^2$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = nx$
  - × **0 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = 1$

  Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k \,(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$
- **1 pt :** $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$ **(quelle que soit la méthode)**

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.
On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$:

$$|x - y| < \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale : $\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{ k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{ k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \alpha \right\}$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k}\, x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, (1-x)^{n-k} = 1$
- **1 pt :** $\left| B_n(x) - f(x) \right| = \left| \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right|$
- **1 pt :** $\leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k\, (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right|$
- **0 pt :** $= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \in X}}^{n} \quad + \quad \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \in Y}}^{n}$
- **2 pts :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \in X}}^{n} \quad \leqslant \varepsilon$
  - × **1 pt : pour** $k \in X$, $\left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha$ **et d'après** (2) **:** $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon$
  - × **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \in X}}^{n} \quad \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \ldots = 1$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \in Y}}^{n} \ldots \leqslant 2\,\|f\|_\infty \sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k\, (1-x)^{n-k}$
  - × **1 pt : pour** $k \in Y$, $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leqslant \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| f(x) \right| \leqslant \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

- **1 pt : . . . ne sera pas faite . . .**

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g)$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, P(x)\, dx = 0$$

- **0 pt :** $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, x^k\, dx = \int_0^1 f(x)\, x^k\, dx - \int_0^1 g(x)\, x^k\, dx = m_k(f) - m_k(g) = 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, P(x)\, dx = 0$ **par linéarité**

On sait par la partie ***II*** qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\|P_n - (f-g)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

13. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\, dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\, dx$$

(On pourra raisonner par encadrement)

- **1 pt :** $\displaystyle\left|\int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\, dx - \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\, dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|\big(f(x) - g(x)\big)\Big(P_n(x) - \big(f(x) - g(x)\big)\Big)\right|$ d
- **1 pt :** $\big|f(x) - g(x)\big|\,\Big|P_n(x) - \big(f(x) - g(x)\big)\Big| \leqslant \big|f(x) - g(x)\big|\, \|P_n - (f-g)\|_\infty$
- **1 pt : théorème d'encadrement avec** $\|P_n - (f-g)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

14. Montrer alors que $f = g$ sur $[0,1]$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$
- **1 pt : la fonction** $x \mapsto \big(f(x) - g(x)\big)^2$ **est continue sur** $[0,1]$**, positive sur** $[0,1]$**, d'intégrale nulle sur** $[0,1]$ **donc nulle sur** $[0,1]$

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\ \varphi(t)\ dt,$$

où φ est définie en (**??**).

15. ***a)*** Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie.

- **1 pt :** $\left|\mathbf{e}^{it\xi}\,\varphi(t)\right| \;=\; \left|\mathbf{e}^{it\xi}\right|\,|\varphi(t)| \;=\; 1 \times |\varphi(t)| \;=\; |\varphi(t)| \;=\; \varphi(t)$
- **1 pt : théorème de comparaison**

b) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que $\hat{\varphi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- **2 pts :**
- **1 pt :**

16. [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\, t\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

17. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

- **2 pts :**
- **1 pt :**

18. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

- **2 pts :**
- **1 pt :**

V – Le problème des moments sur $[0,+\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0,+\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

- **1 pt : f positive et continue sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{u\to -\infty} f(\mathbf{e}^u)$ et, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f(\mathbf{e}^u) = \dfrac{1}{\mathbf{e}^u\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}u^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}u^2-u} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{-u^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{u}\right)} \underset{u\to-\infty}{\longrightarrow} 0$**
- **2 pts : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (f\circ\psi)(u)\,\psi'(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{e}^u)\,\mathbf{e}^u\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\cancel{\mathbf{e}^u}\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\ u^2}\ \cancel{\mathbf{e}^u}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du$ dont 1 pt pour l'aspect croissant bijectif de ψ**

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\sin(2\pi\ln(x))\ dx$$

20. Montrer :

$$I_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi - in)u}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\ du\right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

- **1 pt : $0 \leqslant \left|x^n\, f(x)\, \sin\left(2\pi\ln(x)\right)\right| \leqslant x^n\, f(x)$**
- **1 pt : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\ dx$ est convergente car f admet un moment d'ordre n**
- **1 pt : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\, \sin\left(2\pi\ln(x)\right)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{e}^u)^n\, f(\mathbf{e}^u)\, \sin\left(2\pi u\right)\mathbf{e}^u\ du$ par changement de variable**
- **1 pt : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{e}^u)^n\, f(\mathbf{e}^u)\, \sin(2\pi u)\,\mathbf{e}^u = \mathrm{Im}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbf{e}^{i(-in+2\pi)u}\ \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}u^2}$**

21. À l'aide de la partie ***IV***, en déduire que $I_n = 0$.

- **1 pt : $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{i(2\pi-in)u}\ \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\ du = \hat{\varphi}(2\pi - in)$**
- **1 pt : *18.* : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(\xi) = \mathbf{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$ valable pour $\xi \in \mathbb{C}$. Ainsi : $\hat{\varphi}(2\pi - in) = \mathbf{e}^{-2\pi^2+\frac{n^2}{2}}$**
- **1 pt : finalement $I_n = \mathrm{Im}\left(\mathbf{e}^{-2\pi^2+\frac{n^2}{2}}\right) = 0$**

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1+\alpha\sin(2\pi\ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

22. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0,+\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **1 pt : ...**