DS3

Avertissements

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- Le Problème 1 est commun et devra être traité par tous les élèves.
  Le Problème 2 est laissé au choix de l'élève.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit**.

Exercice (`CCINP 2018`)

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = XP'$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Démonstration.

- Dans toute la suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note : $P_k(X) = X^k$.
- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent.
  × Si $k = 0$:
  $$\Big(\Delta(P_0)\Big)(X) = X\ P_0'(X) = 0$$
  × Si $k \in [\![1, n]\!]$:
  $$\Big(\Delta(P_k)\Big)(X) = X\ P_k'(X) = X \times \big(k\ X^{k-1}\big) = k\ X^k$$
  On remarque que cette formule est aussi valide dans le cas $k = 0$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ \Delta(X^k) = k\ X^k.}$$

□

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \mathrm{id})(P)$, où id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{array}{rcl} \Big(\Delta \circ (\Delta - \mathrm{id})\Big)(P) & = & \Delta\big(\Delta(P) - \mathrm{id}(P)\big) \\ & = & \Delta\big(X\ P' - P\big) \\ & = & X\ \big(X\ P' - P\big)' \\ & = & X\ \big((\cancel{P'} + X\ P'') - \cancel{P'}\big) \\ & = & X^2\ P'' \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Big(\Delta \circ (\Delta - \mathrm{id})\Big)(P) = X^2\ P''}$$

□

3. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

Démonstration.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

× $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(P') \leqslant n-1$.

× $\deg(X\ P') = \deg(X) + \deg\left(P'\right) \ \leqslant\ 1 + (n-1) = n$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = X\ P' \in \mathbb{R}_n[X].}$$

□

4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.
D'après la question ***1***, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\Delta_n(P_k) = k\ P_k = 0 \cdot P_0 + \ldots + 0 \cdot P_{k-1} + k \cdot P_k + 0 \cdot P_{k+1} + \ldots + 0 \cdot P_n$$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}\big(\Delta_n(P_k)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(P_0,\ldots,P_n)}\big(\Delta_n\big) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}}$$

□

5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = X^2 P'' + aXP'$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} \Big(\Delta^2 + (a-1)\Delta\Big)(P) &= \Big(\Delta^2 - \Delta + a\ \Delta\Big)(P) \\ &= \Big(\Delta \circ (\Delta - \mathrm{id}) + a\Delta\Big)(P) \\ &= \Big(\Delta \circ (\Delta - \mathrm{id})\Big)(P) + a\ \Delta(P) \quad \textit{(par linéarité de l'évaluation)} \\ &= X^2\ P'' + a\ X\ P' \quad \textit{(d'après la question 2)} \\ &= \Phi(P) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \Delta^2 + (a-1)\Delta = \Phi.}$$

- Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Phi(P) = X^2\ P'' + a\ X\ P'\ \in \mathbb{R}[X]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Phi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}[X].}$$

- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
  Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{array}{rcll} \Phi\big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\big) & = & X^2\ \big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\big)'' + a\ X\ \big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\big)' & \\ & = & X^2\ \big(\lambda \cdot P'' + \mu \cdot Q''\big) + a\ X\ \big(\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q'\big) & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ & = & \lambda\ X^2\ P'' + \mu\ X^2\ Q'' + \lambda\, a\ X\ P' + \mu\, a\ X\ Q' & \\ & = & \lambda\ \Phi(P) + \mu\ \Phi(Q) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \Phi \text{ est une application linéaire.}}$$

$$\boxed{\text{On déduit des deux points précédents que } \Phi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$$

□

6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

× $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(P') \leqslant n-1$ et $\deg(P'') \leqslant n-2$.

× $\deg(X^2\ P'') = \deg\big(X^2\big) + \deg\big(P''\big)\ \leqslant\ 2 + (n-2) = n$.

× $\deg(X\ P') = \deg\big(X\big) + \deg\big(P'\big)\ \leqslant\ 1 + (n-1) = n$
donc $\deg(a\ X\ P')\ =\ \deg(a) + \deg\big(X\ P'\big)\ \leqslant\ n$.
(attention : si $a = 0$, $\deg(a) = -\infty$)

Enfin :

$$\deg\big(X^2\ P'' + a\ X\ P'\big)\ \leqslant\ \max\Big(\deg(X^2\ P''), \deg\big(a\ X\ P'\big)\Big)\ \leqslant\ n$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]. \\ \text{On en conclut que } \Phi \text{ induit bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].\end{array}}$$

□

7. Démontrer que la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonale.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Trois cas se présentent.

× Si $k = 0$:

$$\Big(\Phi_n(P_0)\Big)(X)\ =\ X^2\ \cancel{P_0''(X)} + a\ X\ \cancel{P_0'(X)}\ =\ 0$$

$$\boxed{\Phi_n(P_0) = 0}$$

× Si $k = 1$:

$$\Big(\Phi_n(P_1)\Big)(X)\ =\ X^2\ \cancel{P_1''(X)} + a\ X\ P_1'(X)\ =\ a\ X$$

$$\boxed{\Phi_n(P_1) = a \cdot P_1}$$

× Si $k \in [\![2, n]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} \Big(\Phi_n(P_k)\Big)(X) & = & X^2\ P_k''(X) + a\ X\ P_k'(X) \\ & = & X^2 \times \big(k\ P_{k-1}\big)'(X) + a\ X \times k\ P_{k-1}(X) \\ & = & X^2 \times k\ (k-1)\ P_{k-2}(X) + a\ k\ X\ P_{k-1}(X) \\ & = & k\ (k-1)\ P_k(X) + a\ k\ P_k(X) \\ & = & (k\ (k-1) + a\ k) \cdot P_k \end{array}$$

On remarque que cette formule est aussi vérifiée dans les cas $k = 0$ et $k = 1$.

On en déduit que $\text{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}(\Phi_n)$ est diagonale et que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le $(k+1)^{\text{ème}}$ coefficient diagonal est $k\ (k-1) + k\ a$. □

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = X^2 P'' + aXP' + bP$$

8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n.
Exprimer φ_n en fonction de Δ_n.

Démonstration.
Remarquons : $\varphi = \Phi + b\ \text{id}_{\mathbb{R}[X]}$.

- On en déduit que φ est une application linéaire comme combinaison linéaire de Φ et $\text{id}_{\mathbb{R}[X]}$ qui sont toutes les deux linéaires.
- De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(P) & = & \Phi(P) + b\ P & \\ & = & \Phi_n(P) + b\ P & \textit{(car } P \in \mathbb{R}_n[X]\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

On en conclut que φ induit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Enfin :

$$\varphi_n \ = \ \Phi_n + b\ \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]} \ = \ \Big(\Delta_n^2 + (a-1)\ \Delta_n\Big) + b\ \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$$

$$\boxed{\varphi_n \ = \ \Delta_n^2 + (a-1)\ \Delta_n + b\ \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}}$$

□

9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} \text{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}\big(\varphi_n\big) & = & \text{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}\big(\Phi_n + b\ \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\big) & \\ & = & \text{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}\big(\Phi_n\big) + b\ \text{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}\big(\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\big) & \textit{(car } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\cdot) \textit{ est linéaire)} \\ & = & \text{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}\big(\Phi_n\big) + b\ I_{n+1} & \end{array}$$

On en déduit que $\text{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}(\phi_n)$ est diagonale et que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le $(k+1)^{\text{ème}}$ coefficient diagonal est $k\ (k-1) + k\ a + b = k^2 + (a-1)\ k + b$. □

On considère l'équation :

$$s^2 + (a-1)s + b = 0. \tag{1}$$

10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $[\![0, n]\!]$.

11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in [\![0, n]\!]$.

12. Déterminer le noyau de φ. En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Problème A - Autour de la transformation de Laplace (`CCINP 2011 - MP`)

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout f dans E, on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$$

1. **Question préliminaire**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.
On considère les propositions suivantes :

(i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
(ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre ***(i)*** et ***(ii)*** lorsque :

(a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
(b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

2. ***a)*** Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

3. ***a)*** On considère $\mathcal{U} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

$$h_\lambda(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

***5.* Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe $\mathscr{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$.
Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \mathcal{L}(f')(x) = x\,\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

***6.* Régularité d'une transformée de Laplace**

a) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a : $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 est définie à la question *4*.

b) [`ADMIS` *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

b) *Théorème de la valeur initiale*
On suppose, de plus, que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec f' bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

***8.* Théorème de la valeur finale**
On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \ell$ où ℓ est un réel.
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

a) Démontrer que f appartient à F.

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\, dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

c) [`MODIFICATION`] *On admet le théorème suivant, dit théorème de convergence domninée (cf cours à venir sur les intégrales à paramètres).*
Soient (f_n) et f des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I,
- pour tout $x \in I$: $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$,
- la fonction f est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ définie sur I telle que :
  - × φ est à valeurs positives,
  - × φ est intégrable sur I,
  - × $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable, la fonction f est intégrable et :

$$\int_I \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right) \, dt \ = \ \lim_{n \to +\infty} \left(\int_I f_n(t) \, dt \right)$$

Démontrer, à l'aide du théorème de convergence dominée : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

d) Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on pose : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\ dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

a) Démontrer que R est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'.
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

b) On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait : $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :

$$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)|\ dt + \varepsilon$$

c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

10. **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**

Ici, f est la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ pour $t > 0$ réel.

a) Démontrer que la fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ admet une limite finie réelle ℓ en $+\infty$.

b) En considérant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\ dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c) Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que, pour tout $X > 0$, on a :

$$\int_0^x \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ \ dt = -\ \frac{1}{1+x^2}\left(\mathrm{e}^{-xX}(x\sin(X) + \cos(X)) - 1\right)$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\ dt$.

d) [`MODIFICATION`]

(i) *On admet qu'on peut ici intervertir intégrale et dérivée (résultat du chapitre à venir sur les intégrales à paramètres).*
Démontrer alors, pour tout $x > 0$:

$$\big(\mathcal{L}(f)\big)'(x)\ \ =\ -\frac{1}{1+x^2}$$

(ii) En déduire, pour tout $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (la démarche de la preuve étant identique à celle de la question *9)*) : lorsque f dans E vérifie : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\ dt = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
On notera que, par rapport à la question *9*, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par l'hypothèse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\ dt = \ell \in \mathbb{R}$.

Problème B (`Mines 2 2019`)

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire :

$$\int_I f(x)\ dx = 1$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si :

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel :

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\ dx$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

I – Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,+\infty[$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- La fonction g est continue et positive sur $[0,+\infty[$.
- Démontrons que g est intégrable et de masse 1. Comme g est positive sur $[0,+\infty[$, cela revient à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\ dx$ est convergente et vaut 1.
  Soit $B \in [0,+\infty[$.
  $$\int_0^B g(x)\ dx = \int_0^B \mathrm{e}^{-x}\ dx = \big[-\mathrm{e}^{-x} \big]_0^B = -\mathrm{e}^{-B} + 1$$
  Or : $\lim\limits_{B \to +\infty} -\mathrm{e}^{-B} + 1 = 1$.
  On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\ dx$ converge et vaut 1.

  $$\boxed{\text{Finalement, la fonction } g \text{ est une densité sur } [0,+\infty[.}$$
- Démontrons que g admet des moments à tout ordre.
  × Soit $n \in \mathbb{N}$.
  La fonction $g_n : x \mapsto x^n\, g(x)$ est positive sur $[0,+\infty[$. Démontrer qu'elle est intégrable sur $]0,+\infty[$ revient donc à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx$ est convergente.
  La fonction g_n est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
  × On remarque :
  - $\forall x \in [0,+\infty[$, $g_n(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \geqslant 0$,

- $g_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)$. En effet :

$$\frac{g_n(x)}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}} = x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

- l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,dx$ est convergente.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ est convergente.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet des moments à tout ordre.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons $m_n(g)$.

$$m_n(g) = \int_0^{+\infty} x^n\,g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & & u'(x) & = & n\,x^{n-1} \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & & v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

Sous réserve de convergence, cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. On obtient :

$$m_n(g) = \int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[\,-x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} n\,x^{n-1}\,(-\mathrm{e}^{-x})\,dx$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} n\,x^{n-1}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)dx = -n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = -n\,m_{n-1}(g)$$

On a démontré dans le point précédent que g admet des moments à tout ordre. Ainsi $m_n(g)$ et $m_{n-1}(g)$ existent.
La réserve de convergence est donc levée. On obtient :

$$\begin{aligned} m_n(g) &= \left[\,-x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\right]_0^{+\infty} + n\,m_{n-1}(g) \\ &= \left(\lim_{x\to+\infty} -x^n\,\mathrm{e}^{-x}\right) - 0 + n\,m_{n-1}(g) \\ &= n\,m_{n-1}(g) \quad \textit{(par croissances comparées)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ m_n(g) = n\,m_{n-1}(g)}$$

- On obtient alors :

$$m_n(g) = n\,m_{n-1}(g) = n\,(n-1)\,m_{n-2}(g) = \cdots = n\,(n-1)\times\cdots\times 1\times m_0(g)$$

Or, d'après ce qui précède : $m_0(g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ m_n(g) = n!.}$$

Commentaire

On pouvait démontrer plus rigoureusement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$

où $\quad \mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} g_n : x \mapsto x^n\, g(x) \text{ intégrable sur } [0, +\infty[\\ m_n(g) \ = \ n! \end{array} \right.$.

- **Initialisation** :
  D'après ce qui précède, la fonction $g_0 = g$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et :
  $$m_0(g) \ = \ \int_0^{+\infty} g(x)\ dx \ = \ 1 \ = \ 0!$$
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($i.e.$ $\left\{ \begin{array}{l} g_{n+1} : x \mapsto x^{n+1}\, g(x) \text{ intégrable sur } [0, +\infty[\\ m_{n+1}(g) \ = \ (n+1)! \end{array} \right.$)
  - × La fonction g_{n+1} est positive sur $[0, +\infty[$. Démontrer qu'elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ revient donc à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)\ dx$ est convergente.
    La fonction g_{n+1} est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)\ dx$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
  - × Soit $B \in [0, +\infty[$.
    $$\int_0^B g_{n+1}(x)\ dx \ = \ \int_0^B x^{n+1}\, g(x)\ dx \ = \ \int_0^B x^{n+1}\, \mathrm{e}^{-x}\ dx$$
    On procède alors par intégration par parties (IPP).
    $$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^{n+1} & \quad & u'(x) & = & (n+1)\, x^n \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & & v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$$
    Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, B]$. On obtient :
    $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^B g_{n+1}(x)\ dx & = & \left[\, -x^{n+1}\, \mathrm{e}^{-x} \, \right]_0^B - \displaystyle\int_0^B (n+1)\, x^n\, (-\mathrm{e}^{-x})\ dx \\ & = & -B^{n+1}\, \mathrm{e}^{-B} + (n+1) \displaystyle\int_0^B x^n\, \mathrm{e}^{-x}\ dx \\ & = & -B^{n+1}\, \mathrm{e}^{-B} + (n+1) \displaystyle\int_0^B g_n(x)\ dx \end{array}$$
    Or :
    - par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} B^{n+1}\, \mathrm{e}^{-B} = 0$,
    - par hypothèse de récurrence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx$ est convergente et :
    $$\int_0^{+\infty} g_n(x)\ dx \ = \ m_n(g) \ = \ n!$$

Commentaire

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)\,dx$ est convergente et :

$$m_{n+1}(g) = \int_0^{+\infty} g_{n+1}(x)\,dx = 0 + (n+1)\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx = (n+1)\,n! = (n+1)!$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$. □

2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La densité φ admet un moment d'ordre n si et seulement si la fonction $\varphi_n : x \mapsto x^n\,\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Comme la fonction φ est paire, alors deux cas se présentent :
  × si n est pair, alors φ_n est paire.
  × si n est impair, alors φ_n est impaire.

  Dans tous les cas, on en déduit que démontrer l'intégrabilité de φ_n sur $\mathbb{R}$ revient à démontrer l'intégrabilité de φ_n sur $[0, +\infty[$.
- De plus, la fonction φ_n est positive sur $[0, +\infty[$. Démontrer qu'elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ revient donc à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx$ est convergente.

  La fonction φ_n est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
- On remarque :
  × $\forall x \in [0, +\infty[$, $\varphi_n(x) \geqslant 0$ et $x^n\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.
  × $\varphi_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^n\,\mathrm{e}^{-x}\right)$. En effet :

$$\frac{\varphi_n(x)}{x^n\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\cancel{x^n}\,\varphi(x)}{\cancel{x^n}\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{e}^{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente d'après la question précédente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx$ est convergente.

On a ainsi démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ admet un moment d'ordre n.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \varphi \text{ admet des moments à tout ordre.}}$$

Commentaire

On aurait également pu utiliser une autre relation de négligeabilité en remarquant : $\varphi_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\varphi_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^2\, x^n\, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{n+2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

Ainsi :
- × $\forall x \in [1, +\infty[$, $\varphi_n(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.
- × $\varphi_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- × l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi_n(x)\, dx$ est convergente.

Comme on sait de plus que la fonction φ_n est continue sur le `SEGMENT` $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$ est bien définie.

Ainsi, on retrouve bien que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\, dx$ est convergente. □

3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}$.
- Comme $2p + 1$ est impair et φ est paire, alors $\varphi_{2p+1} : x \mapsto x^{2p+1}\, \varphi(x)$ est impaire.
- Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{2p+1}(x)\, dx$ est convergente.

On en déduit : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{2p+1}(x)\, dx = 0$.

$$\boxed{\text{D'où, pour tout } p \in \mathbb{N} : m_{2p+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{2p+1}(x)\, dx = 0.}$$

□

4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.
On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}$.
- Tout d'abord :

$$m_{2p}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\, \varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p-1}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^{2p-1} & \quad & u'(x) & = & (2p-1)\, x^{2p-2} \\ v'(x) & = & x\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \quad & v(x) & = & -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right.$$

Sous réserve de convergence, cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On obtient :

$$m_{2p}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \Big[-x^{2p-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (2p-1)\, x^{2p-2} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (2p-1)\, x^{2p-2} \left(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = -(2p-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2(p-1)}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -(2p-1)\, m_{2(p-1)}(\varphi)$$

On a démontré dans en question ***2.*** que φ admet des moments à tout ordre. Ainsi $m_{2p}(\varphi)$ et $m_{2(p-1)}(\varphi)$ existent. La réserve de convergence est donc levée. On obtient :

$$\begin{aligned} m_{2p}(\varphi) &= \Big[-x^{2p-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} + (2p-1)\, m_{2(p-1)}(\varphi) \\ &= \left(\lim_{x\to+\infty} -x^{2p-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right) - \left(\lim_{x\to-\infty} -x^{2p-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right) + (2p-1)\, m_{2(p-1)}(\varphi) \\ &= (2p-1)\, m_{2(p-1)}(\varphi) \qquad \textit{(par croissances comparées)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ m_{2p}(\varphi) = (2p-1)\, m_{2(p-1)}(\varphi)}$$

- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} m_{2p}(\varphi) &= (2p-1)\, m_{2(p-1)}(\varphi) \\ &= (2p-1)\,(2p-3)\, m_{2(p-2)}(\varphi) \\ &= \cdots \\ &= (2p-1)\,(2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1 \times m_0(\varphi) \end{aligned}$$

Or, comme φ est une densité sur $\mathbb{R}$: $m_0(g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall p \in \mathbb{N},\ m_{2p}(\varphi) = (2p-1)\,(2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1.}$$

- Enfin, on cherche à simplifier l'expression précédente.
Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} m_{2p}(\varphi) &= (2p-1)\,(2p-3) \times \cdots \times 3 \times 1 \\ &= \frac{(2p)\,(2p-1)\,(2p-2)\,(2p-3)\,(2p-4) \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2p)\,(2p-2)\,(2p-4) \times \cdots \times 4 \times 2} \\ &= \frac{(2p)!}{2\,p \times 2\,(p-1) \times 2\,(p-2) \times \cdots \times (2 \times 2) \times (2 \times 1)} \\ &= \frac{(2p)!}{2^p\, p!} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall p \in \mathbb{N},\ m_{2p}(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p\, p!}.}$$

Commentaire

- Notons que, contrairement à la fonction g dans la question ***1.***, on admet que la fonction φ est effectivement une densité sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, il est aisé de voir que φ est :
  - × continue et positive sur $\mathbb{R}$,
  - × intégrable sur $\mathbb{R}$ (démontré en question ***2.***).

  C'est donc l'égalité suivante qui est admise ici :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \;=\; 1$$

- On aurait pu démontrer rigoureusement par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ où $\mathcal{P}(p)$: $m_{2p}(\varphi) = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$.
  - ▸ **Initialisation** :
    - × D'une part, comme φ est une densité : $m_0(\varphi) \;=\; \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \;=\; 1$.
    - × D'autre part : $\dfrac{(2 \times 0)!}{2^0 \times 0!} = 1$.

    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$.

    Supposons $\mathcal{P}(p)$ et démontrons $\mathcal{P}(p+1)$ (*i.e.* $m_{2(p+1)}(\varphi) = \dfrac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{p+1}\,(p+1)!}$).

$$m_{2(p+1)}(\varphi) \;=\; m_{2p+2}(\varphi) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+2}\,\varphi(x)\, dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1}\, x\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^{2p+1} & \qquad & u'(x) & = & (2p+1)\, x^{2p} \\[2mm] v'(x) & = & x\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \qquad & v(x) & = & -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right.$$

Sous réserve de convergence, cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On obtient :

$$m_{2(p+1)}(\varphi) \;=\; \Big[-x^{2p+1}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (2p+1)\, x^{2p} \left(-\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (2p+1)\, x^{2p} \left(-\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \;=\; -(2p+1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; -(2p+1)\, m_{2p}(\varphi)$$

On a démontré dans en question ***2.*** que φ admet des moments à tout ordre. Ainsi $m_{2(p+1)}(\varphi)$ et $m_{2p}(\varphi)$ existent. La réserve de convergence est donc levée.

Commentaire

On obtient :

$$\begin{aligned}
m_{2(p+1)}(\varphi) &= \Big[-x^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} + (2p+1)\, m_{2p}(\varphi) \\
&= \Big(\lim_{x\to+\infty} -x^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big) - \Big(\lim_{x\to-\infty} -x^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big) + (2p+1)\, m_{2p}(\varphi) \\
&= (2p+1)\, m_{2p}(\varphi) \qquad \textit{(par croissances comparées)} \\
&= (2p+1)\, \frac{(2p)!}{2^p\, p!} \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{p+1}\,(p+1)!} = \frac{(2p+2)!}{(2\times 2^p)\times(p+1)\,p!} = \frac{\cancel{(2p+2)}\,(2p+1)\,(2p)!}{\cancel{2\,(p+1)}\times 2^p\,p!} = (2p+1)\,\frac{(2p)!}{2^p\,p!}$$

On obtient bien : $m_{2(p+1)}(\varphi) = (2p+1)\,\dfrac{(2p)!}{2^p\,p!} = \dfrac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{p+1}\,(p+1)!}$.

D'où $\mathcal{P}(p+1)$. □

5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Démonstration.

- On cherche une fonction f :
  × continue et positive sur $\mathbb{R}$,
  × intégrable sur $\mathbb{R}$ et de masse 1 (c'est-à-dire telle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$),
  × telle que la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Pour construire une telle fonction, on privilégie l'utilisation de fonctions qui sont des intégrandes d'intégrales de référence du cours.
  × La fonction f doit être positive et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en $-\infty$ et $+\infty$. C'est la cas par exemple de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.
  × Notons qu'alors, la fonction $x \mapsto x\,\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $-\infty$ et $+\infty$, ce que l'on souhaite.
  × Cependant, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ n'est pas définie en 0. On définit donc la fonction f par disjonction de cas de la façon suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{c_1}{x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ c_2 & \text{si } x \in \,]-1,1[\\ \dfrac{c_1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{array} \right. \end{array}$$

  où c_1 et c_2 sont des constantes positives à déterminer pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et de masse 1.

- Remarquons tout d'abord que, comme c_1 et c_2 sont des réels positifs, alors la fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$.
- Comme la fonction f doit être continue sur $\mathbb{R}$ alors : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \ = \ f(1)$. D'où :

$$c_2 \ = \ \frac{c_1}{1^2} \ = \ c_1$$

- Ainsi définie, la fonction f est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, comme elle est positive sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente.
  Comme f est paire, il suffit même de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente.
  Puisque la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ est impropre seulement en $+\infty$.
  Soit $B \in [1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^B f(x)\ dx &= \int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^B f(x)\ dx \\ &= \int_0^1 c_1\ dx + \int_0^B \frac{c_1}{x^2}\ dx \\ &= c_1\ \left[\ x\ \right]_0^1 + c_1\ \left[-\frac{1}{x}\right]_1^B \\ &= c_1\,(1-0) + c_1 \left(-\frac{1}{B} + 1\right) \\ &= 2\,c_1 - \frac{c_1}{B} \end{aligned}$$

  Or : $\lim\limits_{B \to +\infty} \dfrac{c_1}{B} = 0$.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente (et vaut $2\,c_1$).
- Il reste à choisir c_1 pour que f soit de masse 1.
  Comme f est paire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ 2 \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ 4\,c_1$$

  On choisit donc $c_1 = \dfrac{1}{4}$ pour obtenir : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$.
- Résumons. En définissant la fonction f par :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{4\,x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in\ ]-1,1[\\ \dfrac{1}{4\,x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

  on obtient que la fonction f est :
  × continue et positive sur $\mathbb{R}$,
  × intégrable sur $\mathbb{R}$ et de masse 1.

- Il reste à démontrer que la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
  On remarque : $\forall x \geqslant 1,\ \left|x\, f(x)\right| = x\, \dfrac{1}{4\, x^2} = \dfrac{1}{4\, x}$.
  Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 1 $(1 \not> 1)$.
  Elle est donc divergente.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|x\, f(x)\right|\, dx$ est divergente. Et donc, la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ définie ci-dessus répond donc bien aux conditions de l'énoncé.}}$$

Commentaire

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\pi\, (1+x^2)}$ est un autre exemple de fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

- Elle est bien continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- De plus, pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$:

$$\int_A^B f(x)\, dx \;=\; \frac{1}{\pi} \int_A^B \frac{1}{1+x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{\pi} \left[\, \arctan(x)\, \right]_A^B \;=\; \frac{1}{\pi} \left(\arctan(B) - \arctan(A)\right)$$

  Or : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \arctan(B) = \frac{\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \arctan(A) = -\frac{\pi}{2}$. D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \;=\; \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \;=\; \frac{1}{\pi} \times \pi \;=\; 1$$

- Elle n'admet pas de moment d'ordre 1. En effet, pour tout $B \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^B x\, f(x)\, dx \;=\; \frac{1}{\pi} \int_0^B \frac{x}{1+x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{\pi} \left[\, \frac{1}{2} \ln\left(|1+x^2|\right) \right]_0^B \;=\; \frac{1}{2\pi} \ln(1+B^2)$$

  Or : $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \ln(1+B^2) = +\infty$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ est donc divergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ aussi.

$\square$

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est-elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que :

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0, 1]$ (partie ***III***), mais faux si $I = [0, +\infty[$ (partie ***V***) ou $I = \mathbb{R}$.

II – Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\dbinom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} \; = \; \big(\cancel{x} + (1-\cancel{x})\big)^n \; = \; 1$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} = 1}$$

Commentaire

On pouvait également raisonner de manière probabiliste en introduisant une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}(n,x)$. On remarque :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} \; = \; \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) \; = \; 1$$

car la famille $\big(\{X=k\}\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.

$\square$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on sait : $k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} x^k \, (1-x)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} \, (1-x)^{n-(k+1)} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= n\,x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \, (1-x)^{(n-1)-k} \\
&= n\,x \times \big(\cancel{x} + (1-\cancel{x})\big)^{n-1} && \textit{(par formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} = n\,x.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'on peut démontrer la relation sur les coefficients binomiaux avec les calculs suivants.
  Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
  - Tout d'abord :
  $$k \binom{n}{k} = k \, \frac{n!}{k! \, (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \, (n-k)!}$$
  - Par ailleurs :
  $$n \binom{n-1}{k-1} = n \, \frac{(n-1)!}{(k-1)! \, ((n-\cancel{1}) - (k-\cancel{1}))!} = \frac{n!}{(k-1)! \, (n-k)!}$$

  Ainsi : $k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.
- La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se retrouver par dénombrement.
  Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
  (on peut penser à une pièce qui contient n individus)
  On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure un représentant de ces individus).*
  Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :
  1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{n}{k}$ possibilités.
  On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
  (on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
  Ainsi, il y a $k \binom{n}{k}$ manières de construire P.
  2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.
  On choisit ensuite $k-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
  (on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $k-1$ individus)
  Ainsi, il y a $n \binom{n-1}{k-1}$ manières de construire P.
  On retrouve ainsi le résultat.
- On pouvait également raisonner de manière probabiliste pour répondre à cette question.
  On considère toujours une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}(n, x)$. Alors on remarque :
  $$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} k \, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \;=\; \mathbb{E}(X) \;=\; n\, x$$
  (la v.a.r. X admet bien une espérance car elle est finie)

□

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$$

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $k^2 = k(k-1) + k$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
= & \sum_{k=0}^{n} \Big(k(k-1)+k\Big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
= & \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
= & \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

- Or :
  - × d'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

  - × de plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\, k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} (k-1)\, n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=2}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=2}^{n} (n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n\,(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n\,(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2} (1-x)^{n-(k+2)} \\
&= n\,(n-1)\, x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{(n-2)-k} \\
&= n\,(n-1)\, x^2 \Big(\cancel{x} + (1-\cancel{x})\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n\,(n-1)\,x^2 + n\,x.}$$

Commentaire

On pouvait, comme pour les questions précédentes, raisonner de manière probabiliste. Considérons toujours une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}(n,x)$. Alors on remarque :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \, \mathbb{P}\big(\{X=k\}\big) = \mathbb{E}(X^2)$$

Or, par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= n\,x\,(1-x) + (n\,x)^2 \\ &= n\,x\,\big(1-x+n\,x\big) \\ &= n\,x\,\big(1+(n-1)\,x\big) \\ &= n\,x + n\,(n-1)\,x^2 \end{aligned}$$

Finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n\,x + n\,(n-1)\,x^2$.

□

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$

pour une constante $C > 0$ à préciser.

Démonstration.

- Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ = & \sum_{k=0}^{n} \big(k^2 - 2nxk + (nx)^2\big) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ = & \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ & - \; 2nx \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ & + \; (nx)^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ = & \; n\,x + n\,(n-1)\,x^2 - 2nx \times nx + (nx)^2 \times 1 \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.}}, \textbf{\textit{7.}} \textit{ et } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\ = & \; n\,x\,\big(1 + (n-1)\,x - 2nx + nx\big) \\ = & \; n\,x\,(1-x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n\,x\,(1-x)}$$

Commentaire

De manière probabiliste, en considérant toujours une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}(n, x)$, on remarque :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} (k - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big) \qquad \textit{(par théorème de transfert)} \\
&= \mathbb{V}(X) \\
&= n\, x\,(1-x)
\end{aligned}$$

- Il reste à démontrer qu'il existe C tel que : $\forall x \in [0,1]$, $x\,(1-x) \leqslant C$.
  Autrement dit, on cherche à démontrer que la fonction $h : x\,(1-x)$ est majorée sur $[0,1]$.
  × La fonction h est dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale.
  Soit $x \in [0,1]$.
  $$h'(x) = 1 - 2\,x$$
  Alors :
  $$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\,x > 0 \Leftrightarrow 1 > 2\,x \Leftrightarrow \frac{1}{2} > x$$
  × On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Signe de $h'(x)$	$+$		$-$
Variations de h	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in [0,1],\ x\,(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4}\, n.}$$

Commentaire

On pouvait également démontrer la majoration par $\frac{1}{4}$ de la façon suivante.
Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
x\,(1-x) \leqslant \frac{1}{4} &\Leftrightarrow x - x^2 \leqslant \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 - x + \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie. Ainsi, grâce au raisonnement par équivalence, la première l'est aussi.

□

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.
On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$:

$$|x-y| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{ k \in \{0,1,\dots,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \qquad \text{et} \qquad Y = \left\{ k \in \{0,1,\dots,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geqslant \alpha \right\}$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k}\ x^k (1-x)^{n-k},$$

où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\big|B_n(x) - f(x)\big| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\, f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| && \textit{(par définition de } B_n(x)\textit{)} \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \right| && \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\, f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| && \textit{(par inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \\
= \ &\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \\
= \ &\sum_{\substack{k=0 \\ k \in X}}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|
\end{aligned}$$

Étudions chacune de ces sommes.

× Soit $k \in X$. Alors : $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| < \alpha$. D'après la proposition (2), on obtient : $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon$.

Comme $\dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geqslant 0$, on en déduit :

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, \varepsilon$$

En sommant ces inégalités pour $k \in X$, on obtient :

$$\sum_{\substack{k=0\\ k \in X}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \sum_{\substack{k=0\\ k \in X}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, \varepsilon$$

Enfin, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $\dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geqslant 0$. Ainsi :

$$\varepsilon \sum_{\substack{k=0\\ k \in X}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon \times 1 \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{6.}}\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{\substack{k=0\\ k \in X}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.}$$

× Soit $k \in Y$. Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| &\leqslant \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \\ &\leqslant \|f\|_\infty + \|f\|_\infty\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\dbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geqslant 0$:

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times 2\,\|f\|_\infty$$

En sommant ces inégalités pour $k \in Y$, on obtient :

$$\sum_{\substack{k=0\\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \sum_{\substack{k=0\\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times 2\,\|f\|_\infty$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{\substack{k=0\\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty \sum_{\substack{k=0\\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.}$$

- En rassemblant ces résultats :

$$
\begin{array}{cl}
& \left|B_n(x) - f(x)\right| \\
\leqslant & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left|\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\
\leqslant & \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \in X}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \quad + \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \\
\leqslant & \varepsilon \quad + \quad 2\,\|f\|_\infty \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \in Y}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}
\end{array}
$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}}$$

□

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. D'après la question précédente :

$$\left|B_n(x) - f(x)\right| \ \leqslant\ \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

  Or, par définition de $\|\cdot\|_\infty$:

$$\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \ \leqslant\ \left\|\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\right\|_\infty$$

  D'où, comme $2\,\|f\|_\infty \geqslant 0$:

$$\left|B_n(x) - f(x)\right| \ \leqslant\ \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \left\|\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\right\|_\infty$$

  Ainsi :

$$\|B_n(x) - f(x)\|_\infty \ \leqslant\ \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \left\|\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\right\|_\infty$$

  On souhaite donc à majorer $\left\|\sum\limits_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\right\|_\infty$ par $\dfrac{\varepsilon}{2\,\|f\|_\infty}$ pour obtenir le résultat voulu par l'énoncé.
- Soit $x \in [0,1]$.
  On cherche à majorer $\sum\limits_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ par un réel ne dépendant pas de x. Pour cela, on cherche à exploiter la question ***9.*** (seule à nous fournir une majoration).
- Tout d'abord, on force l'apparition de la somme de la question ***9.*** :

$$\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \quad = \quad \sum_{k\in Y} \frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

- Soit $k \in Y$.

$$\begin{array}{llll} & \left|x - \dfrac{k}{n}\right| & \geqslant & \alpha \\[2ex] \text{donc} & |nx - k| & \geqslant & n\,\alpha \quad \textit{(car } n \geqslant 0\textit{)} \\[2ex] \text{d'où} & (nx-k)^2 & \geqslant & (n\,\alpha)^2 \quad \textit{(par croissance de } x \mapsto x^2 \textit{ sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\[2ex] \text{ainsi} & \dfrac{1}{(nx-k)^2} & \leqslant & \dfrac{1}{n^2\,\alpha^2} \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k\in Y} \frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leqslant \sum_{k\in Y} \frac{1}{n^2\,\alpha^2}\,(k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2\,n^2} \sum_{k\in Y} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha^2\,n^2} \times \frac{1}{4}\,n \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.}}\textit{)} \\ &\leqslant \frac{1}{4\,\alpha^2\,n} \end{aligned}$$

On en conclut :

$$\sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\,\alpha^2\,n}$$

D'où :

$$\left\| \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{4\,\alpha^2\,n}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4\,\alpha^2\,n} = 0$.

On en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$: $\dfrac{1}{4\,\alpha^2\,n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\,\|f\|_\infty}$. D'où :

$$\left\| \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{4\,\alpha^2\,n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_\infty}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} \|B_n(x) - f(x)\|_\infty &\leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \left\| \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \right\|_\infty \\ &\leqslant \varepsilon + 2\,\|f\|_\infty \times \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_\infty} \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ \|B_n(x) - f(x)\|_\infty \leqslant \varepsilon}$$

Commentaire

Encore une fois, on pouvait raisonner de manière probabiliste pour démontrer :

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\,\alpha^2\,n}$$

La démarche est même plus naturelle. On considère toujours une v.a.r. X de loi $\mathcal{B}(n, x)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k \in Y} \mathbb{P}\big(\{X = k\}\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\{X \in Y\}\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\left|x - \frac{X}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\big(\{\,|nx - X| \geqslant n\,\alpha\}\big) \qquad \textit{(car } n > 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\big(\{\,|X - nx| \geqslant n\,\alpha\}\big) \\ &= \mathbb{P}\big(\{\,|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant n\,\alpha\}\big) \end{aligned}$$

- Or la v.a.r. X admet une variance. Ainsi, par inégalité de Bienaymé-Tchebychev (énoncée dans le cours à venir sur les inégalités probabilistes) :

$$\mathbb{P}\big(\{\,|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant n\,\alpha\}\big) \leqslant \frac{V(X)}{(n\,\alpha)^2}$$

De plus :

$$\frac{\mathbb{V}(X)}{(n\,\alpha)^2} = \frac{n\,x\,(1-x)}{\alpha^2\,n^2} = \frac{x\,(1-x)}{\alpha^2\,n}$$

Or, comme démontré en question ***9.*** : $x\,(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$. On obtient finalement :

$$\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{V(X)}{(n\,\alpha)^2} \leqslant \frac{1}{4\,\alpha^2\,n}$$

□

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III – Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I = [0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g)$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a :

$$\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,P(x)\,dx = 0$$

Démonstration.
Soit P une fonction polynomiale. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k$$

- Commençons par remarquer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, P(x)\ dx$ est bien définie car la fonction $x \mapsto \big(f(x) - g(x)\big)\, P(x)$ est continue sur le `SEGMENT` $[0, 1]$.
- Démontrons ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, x^k\ dx \ = \ 0$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, x^k\ dx & = & \displaystyle\int_0^1 f(x)\, x^k\ dx - \int_0^1 g(x)\, x^k\ dx & \textit{(par linéarité de l'intégrale, les intégrales en présence étant convergentes)} \\ & = & m_k(f) - m_k(g) & \\ & = & 0 & \textit{(d'après l'hypothèse de cette } \textbf{Partie III}\textit{)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, P(x)\ dx & = & \displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big) \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\ dx & \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, x^k\ dx & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \times 0 & \textit{(d'après le point précédente)} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour toute fonction polynomiale } P : \displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, P(x)\ dx = 0.}$$

□

On sait par la partie ***II*** qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\|P_n - (f - g)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

13. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\ dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\ dx$$

(On pourra raisonner par encadrement)

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Notons d'abord que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - g(x))P_n(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\ dx$ sont bien définies car les fonctions $x \mapsto (f(x) - g(x))P_n(x)$ et $x \mapsto (f(x) - g(x))^2$ sont continues sur le `SEGMENT` $[0, 1]$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx - \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\ dx \right| \\
= \ & \left| \int_0^1 \Big(\big(f(x)-g(x)\big)\, P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big)^2 \Big)\ dx \right| && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
= \ & \left| \int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big) \Big(P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big) \Big)\ dx \right| \\
\leqslant \ & \int_0^1 \left| \big(f(x)-g(x)\big) \Big(P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big) \Big) \right|\ dx && \textit{(par inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left| \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx - \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\ dx \right| \ \leqslant \ \int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big| \left|P_n(x)-\big(f(x)-g(x)\big)\right|\ dx$$

- De plus, par définition de $\| \cdot \|_\infty$:

$$\left|P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big)\right| \ \leqslant \ \|P_n - (f-g)\|_\infty$$

D'où, puisque $\big|f(x)-g(x)\big| \geqslant 0$:

$$\big|f(x)-g(x)\big| \left|P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big)\right| \ \leqslant \ \big|f(x)-g(x)\big|\, \|P_n - (f-g)\|_\infty$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big| \left|P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big)\right|\ dx \ \leqslant \ \int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big|\, \|P_n - (f-g)\|_\infty\ dx$$

Or :

$$\int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big|\, \|P_n - (f-g)\|_\infty\ dx \ = \ \|P_n - (f-g)\|_\infty \int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big|\ dx$$

Ainsi :

$$\left| \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx - \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\ dx \right| \ \leqslant \ \|P_n - (f-g)\|_\infty \int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big|\ dx$$

- Or la suite (P_n) vérifie :

$$\|P_n - (f-g)\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \big|f(x)-g(x)\big|\ dx$ est un réel qui ne dépend pas de la variable n, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx - \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\ dx \right| \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\ dx.}$$

□

14. Montrer alors que $f = g$ sur $[0,1]$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\ dx$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme P_n est une fonction polynomiale, d'après la question ***12.*** :

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx = 0$$

En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)\ dx = 0$.

- Par unicité de la limite, on en déduit :

$$\int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\ dx \ = \ 0$$

Ainsi la fonction $x \mapsto \big(f(x)-g(x)\big)^2$ est :
$\times$ continue sur $[0,1]$,
$\times$ positive sur $[0,1]$,
$\times$ d'intégrale nulle sur $[0,1]$.
On en déduit, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{lrcl} & \big(f(x)-g(x)\big)^2 & = & 0 \\ \text{donc} & f(x)-g(x) & = & 0 \\ \text{d'où} & f(x) & = & g(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [0,1],\ f(x) = g(x).}$$

□

IV – Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{it\xi}\ \varphi(t)\ dt,$$

où φ est définie en (1).

15. ***a)*** Justifier que $\hat{\varphi}$ est correctement définie.

Démonstration.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

- Pour démontrer que $\hat{\varphi}(\xi)$ est bien définie, il suffit de montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{it\xi}\ \varphi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\left|\mathrm{e}^{it\xi}\ \varphi(t)\right| \ = \ \left|\mathrm{e}^{it\xi}\right|\ |\varphi(t)| \ = \ 1 \times |\varphi(t)| \ = \ |\varphi(t)| \ = \ \varphi(t)$$

- Or, d'après l'énoncé, la fonction φ est une densité sur $\mathbb{R}$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{it\xi}\ \varphi(t)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } \hat{\varphi} \text{ est donc bien définie.}}$$

□

b) [ADMIS *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Démontrer que $\hat{\varphi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
On note $f : (\xi, t) \mapsto e^{it\xi} \varphi(t)$. On sait que :

× tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(\xi, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
× ensuite, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(\xi, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
× enfin :
  - pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$, d'après la question précédente :
$$|f(\xi, t)| \ = \ \varphi(t) \ \leqslant \ \varphi(t)$$
  - la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de continuité sous le signe intégral, la fonction $\hat{\varphi} : \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, t)\, dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } \hat{\varphi} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

16. [ADMIS *(cours sur les intégrales à paramètres)*]
Justifier que $\hat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{\varphi}'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\, t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

Démonstration.
En conservant la notation $f : (\xi, t) \mapsto e^{it\xi} \varphi(t)$, on sait que :

× tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(\xi, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
× ensuite, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(\xi, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après ***15.a)***).
× de plus, pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$:
$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t) \ = \ it\, e^{it\xi}\, \varphi(t)$$
  Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
× enfin :
  - pour tout $(\xi, t) \in \mathbb{R}^2$:
$$\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t)\right| \ = \ \left|it\, e^{it\xi}\, \varphi(t)\right| \ = \ |t\, \varphi(t)| \ \leqslant \ |t\, \varphi(t)|$$
  - la fonction $t \mapsto |t\varphi(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, car la densité φ admet un moment d'ordre 1 d'après la question ***2.***

Par théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction $\hat{\varphi} : \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:
$$\hat{\varphi}'(\xi) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} it\, e^{it\xi}\, \varphi(t)\ dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, la fonction } \hat{\varphi} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et :} \\ \hat{\varphi}' : \xi \mapsto \dfrac{i}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\end{array}}$$

□

17. Montrer que $\hat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

Démonstration.
Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

- D'après la question précédente :

$$\hat{\varphi}'(\xi) \;=\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

- On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & e^{it\xi} & \quad & u'(t) & = & i\xi\, e^{it\xi} \\ v'(t) & = & t\, e^{-\frac{t^2}{2}} & \quad & v(t) & = & -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right.$$

Sous réserve de convergence, cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On obtient :

$$\hat{\varphi}'(\xi) \;=\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\Big[-e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi\, e^{it\xi} \left(-e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt \right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi\, e^{it\xi} \left(-e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt &= -i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\ &= -i\xi\, \sqrt{2\pi}\, \hat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

On a démontré en question ***15.*** que $\hat{\varphi}(\xi)$ est bien défini, et en question ***16.*** que $\hat{\varphi}'(\xi)$ est aussi bien défini. La réserve de convergence est donc levée. On obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}'(\xi) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\Big[-e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi\, \hat{\varphi}(\xi) \right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{t \to +\infty} \left(-e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \right) - \lim_{t \to -\infty} \left(-e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \right) + i\xi\, \sqrt{2\pi}\, \hat{\varphi}(\xi) \right) \end{aligned}$$

- De plus :

$$\left| -e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \;=\; e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

De même : $\left| -e^{it\xi}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

- On en déduit :

$$\hat{\varphi}'(\xi) \;=\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(0 + i\xi\, \sqrt{2\pi}\, \hat{\varphi}(\xi) \right) \;=\; -\xi\, \hat{\varphi}(\xi)$$

$$\boxed{\text{La fonction } \hat{\varphi} \text{ est donc solution de l'équation différentielle } y' + \xi\, y = 0.}$$

□

18. Montrer que $\hat{\varphi}(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction $\hat{\varphi}$ est solution de l'équation différentielle $y' + \xi\, y = 0$.
Or l'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{-A(\xi)} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
où A est une primitive de la fonction $\xi \mapsto -\xi$.
$$\boxed{\text{Il existe donc } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \hat{\varphi} : \xi \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.}$$
- Il reste à déterminer la valeur de λ.
Pour cela, on remarque :
$$\hat{\varphi}(0) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{it\times 0}\,\varphi(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt \;=\; 1 \quad \textit{(car } \varphi \textit{ est une densité)}$$
On en déduit :
$$\lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{0^2}{2}} \;=\; 1 \qquad \text{donc} \qquad \lambda \;=\; 1$$
$$\boxed{\text{Finalement : } \hat{\varphi} : \xi \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}.}$$
□

V – Le problème des moments sur $[0, +\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in [0, +\infty[,\; f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{array} \right.$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0, +\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Démonstration.

- $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est positive sur } [0, +\infty[.}$
- La fonction f est continue :
  × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
  × en 0. En effet :
    - d'une part, avec le changement de variable $\boxed{u = \ln(x)}$:
$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{u\to -\infty} f(\mathrm{e}^u)$$
    Or, pour tout $u \in \mathbb{R}$:
$$f(\mathrm{e}^u) \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^u\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2-u} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-u^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{u}\right)} \underset{u\to -\infty}{\longrightarrow} 0$$
    - d'autre part : $f(0) = 0$.
    Ainsi : $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

- Démontrons que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et de masse 1.
  - × Tout d'abord, comme la fonction f est positive sur $[0, +\infty[$, démontrer qu'elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ renvient à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente.

    De plus, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
  - × On rappelle :
$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \quad f(x) \;=\; \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln(x))^2}$$
    On effectue le changement de variable $\psi : u \mapsto \mathrm{e}^u$. La fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Ainsi, sous réserve de convergence, ce changement de variable est licite.
    On obtient :
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} (f \circ \psi)(u)\, \psi'(u)\ du \\
&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{e}^u)\, \mathrm{e}^u\ du \\
&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{\mathrm{e}^u}\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ u^2}\ \cancel{\mathrm{e}^u}\ du \\
&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du
\end{aligned}$$
  - × Or, d'après l'énoncé, la fonction φ est une densité sur $\mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du$ est donc convergente. La réserve de convergence est donc levée et :
$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\ du \;=\; 1 \qquad \textit{(car } \varphi \textit{ est une densité)}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc intégrable sur } [0, +\infty[\text{ et de masse 1.}}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une densité sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Notons qu'effectuer le changement de variable $\psi : u \mapsto \mathrm{e}^u$ revient à poser $\boxed{u = \ln(x)}$.

$$\left|\begin{array}{l}
u = \ln(x) \quad (\text{et donc } x = \mathrm{e}^u) \\
\hookrightarrow du = \dfrac{1}{x}\ dx \quad \text{ et } \quad dx = -\mathrm{e}^u\ du \\
\bullet\ x \to 0 \ \Rightarrow\ u \to -\infty \\
\bullet\ x \to +\infty \ \Rightarrow\ u \to +\infty
\end{array}\right.$$

Commentaire

- Remarquons que ce changement de variable permet également de montrer que la densité f admet des moments à tout ordre. En effet, sous réserve de convergence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} m_n(f) &= \int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\; dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^u)^n\, f(\mathrm{e}^u)\, \mathrm{e}^u\; du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{nu} \frac{1}{\cancel{\mathrm{e}^u}\,\sqrt{2\pi}}\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,u^2}\; \cancel{\mathrm{e}^u}\; du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,u^2+nu}\; du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(u-n)^2+\frac{1}{2}\,n^2}\; du \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,n^2}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(u-n)^2}\; du \end{aligned}$$

  On effectue alors le changement de variable affine $\Psi : t \mapsto t+n$. La fonction Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ dans $]-\infty, +\infty[$. Ainsi, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(u-n)^2}\; du \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t^2}\; dt$$

  On en déduit :

$$m_n(f) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,n^2}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t^2}\; dt \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\; dt$$

  Comme la fonction φ est une densité, les réserves de convergence sont levées. Ainsi, $m_n(f)$ existe et :

$$m_n(f) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,n^2} \times 1 \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,n^2}$$

□

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln(x))\; dx$$

20. Montrer :

$$I_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i(2\pi - in)u}\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\; du\right),$$

où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, remarquons que l'intégrale I_n est bien convergente. En effet :
  - × d'une part, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$:

$$0 \;\leqslant\; \left| x^n\, f(x)\, \sin\big(2\pi \ln(x)\big)\right| \;\leqslant\; x^n\, f(x)$$

  - × d'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\; dx$ est convergente car f admet un moment d'ordre n.

Par critère de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| x^n\, f(x)\, \sin\big(2\pi \ln(x)\big)\right| \, dx$ est convergente. Autrement dit, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\, \sin\big(2\pi \ln(x)\big)\, dx$ est absolument convergente, et donc convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_n \text{ est bien convergente.}}$$

- Toujours avec le changement de variable $\psi : u \mapsto e^u$ (où ψ est de classe $\mathscr{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$) :

$$I_n \;=\; \int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\, \sin\big(2\pi \ln(x)\big)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} (e^u)^n\, f(e^u)\, \sin\big(2\pi u\big)\, e^u\, du$$

- De plus, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(e^u)^n\, f(e^u)\, \sin(2\pi u)\, e^u &= e^{nu}\, \frac{1}{\cancel{e^u}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, \sin(2\pi u)\, \cancel{e^u} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{nu}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, \operatorname{Im} e^{2i\pi u} \\
&= \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{nu}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, e^{2i\pi u} \qquad \textit{(car } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{nu}\, e^{-\frac{1}{2}u^2} \in \mathbb{R}\textit{)} \\
&= \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{nu+2i\pi u}\, e^{-\frac{1}{2}u^2} \\
&= \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i(-in+2\pi)u}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$I_n \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i(-in+2\pi)u}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du \;=\; \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i(2\pi-in)u}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} : I_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(2\pi-in)u}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du\right).}$$

□

21. À l'aide de la partie ***IV***, en déduire que $I_n = 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(2\pi-in)u}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(2\pi-in)u}\, \varphi(u)\, du \\
&= \hat{\varphi}(2\pi - in)
\end{aligned}$$

- Or, d'après la question ***18.*** : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. De plus, l'énoncé précise que cette relation reste valable pour $\xi \in \mathbb{C}$. Ainsi :

$$\hat{\varphi}(2\pi - in) \;=\; e^{-\frac{(2\pi-in)^2}{2}} \;=\; e^{-\frac{1}{2}(4\pi^2-4i\pi n-n^2)} \;=\; e^{-2\pi^2+\frac{n^2}{2}}\, e^{2i\pi n} \;=\; e^{-2\pi^2+\frac{n^2}{2}} \times 1$$

- On en déduit :

$$I_n \;=\; \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{-2\pi^2+\frac{n^2}{2}}\right) \;=\; 0$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = 0}$$

□

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x)(1+\alpha\sin(2\pi\ln(x))) & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

22. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0,+\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- On sait déjà, d'après ***19.***, que la fonction f est une densité sur $[0,+\infty[$.
- Cherchons pour quelles valeurs de α, la fonction g_α est une densité sur $[0,+\infty[$.
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
  × La fonction g_α est continue :
  - sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$,
  - en 0. En effet, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} |g_\alpha(x)| &= \left| f(x)\left(1+\alpha\,\sin\left(2\pi\,\ln(x)\right)\right)\right| \\ &= f(x)\left|1+\alpha\,\sin\left(2\pi\,\ln(x)\right)\right| && \textit{(car } f(x) \geqslant 0\textit{)} \\ &\leqslant f(x)\left(1+|\alpha|\left|\sin\left(2\pi\,\ln(x)\right)\right|\right) \\ &\leqslant f(x)\left(1+|\alpha|\times 1\right) \end{aligned}$$

  Ainsi :

$$0 \;\leqslant\; |g_\alpha(x)| \;\leqslant\; (1+|\alpha|)\,f(x)$$

  Or : $\lim\limits_{x\to 0}\,(1+|\alpha|)\,f(x) = (1+|\alpha|)\times 0 = 0$. On en déduit, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} g_\alpha(x) \;=\; 0 \;=\; g_\alpha(0)$$

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } g_\alpha \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

  × Soit $x \in [0,+\infty[$. Deux cas se présentent :
  - si $x = 0$, alors : $g_\alpha(0) = 0 \geqslant 0$.
  - si $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned} g_\alpha(x) \geqslant 0 \;&\Leftrightarrow\; f(x)\left(1+\alpha\,\sin\left(2\pi\,\ln(x)\right)\right) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow\; 1+\alpha\,\sin\left(2\pi\,\ln(x)\right) \geqslant 0 && \textit{(car, comme } x>0\textit{, alors : } f(x)>0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow\; \alpha\,\sin\left(2\pi\,\ln(x)\right) \geqslant -1 \end{aligned}$$

Or : $0 \leqslant \Big|\sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)\Big| \leqslant 1$.
Ainsi, si $\alpha \in [-1,1]$, alors : $0 \leqslant |\alpha| \leqslant 1$. D'où :

$$0 \ \leqslant\ \underbrace{|\alpha|\,\Big|\sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)\Big|}_{\Big|\alpha\ \sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)\Big|}\ \leqslant\ 1$$

En particulier : $-1 \leqslant \alpha\ \sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)$. Et donc, grâce au raisonnement par équivalence : $g_\alpha(x) \geqslant 0$.

$\boxed{\text{On en conclut que, si } \alpha \in [-1,1], \text{ alors la fonction } g_\alpha \text{ est positive sur } [0,+\infty[.}$

× Soit $\alpha \in [-1,1]$. Démontrons que g_α est intégrable et de masse 1.

- Comme $\alpha \in [-1,1]$, alors g_α est positive sur $[0,+\infty[$. Démontrer que cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$ revient donc à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_\alpha(x)\ dx$ est convergente.
- Tout d'abord, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$:

$$g_\alpha(x) \ =\ f(x) + \alpha\, f(x)\ \sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)$$

Or :

► l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente (et vaut 1) car f est une densité d'après ***19.***

► l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ \sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)\ dx$ est convergente d'après ***20.***

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_\alpha(x)\ dx$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} g_\alpha(x)\ dx \ =\ 1 + I_0 \ =\ 1 + 0 \ =\ 1$$

$\boxed{\text{Finalement, pour tout } \alpha \in [-1,1], \text{ la fonction } g_\alpha \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[\text{ et de masse 1.}}$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \alpha \in [-1,1], \text{ la fonction } g_\alpha \text{ est une densité sur } [0,+\infty[.}$

- Soit $\alpha \in [-1,1]$. Cherchons alors les valeurs de α telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m_n(f) = m_n(g_\alpha)$.

× On sait déjà, d'après ***19.***, que la densité f admet des moments à tout ordre.

× Démontrons que la densité g_α admet des moments à tout ordre et calculons les.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord, la fonction $x \mapsto x^n\, g_\alpha(x)$ est positive sur $[0,+\infty[$ car $\alpha \in [-1,1]$. Démontrer que la fonction $x \mapsto x^n\, g_\alpha(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ revient donc à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, g_\alpha(x)\ dx$ est convergente.
- Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.

$$x^n\, g_\alpha(x) \ =\ x^n\, f(x)\Big(1 + \alpha\ \sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)\Big) \ =\ x^n\, f(x) + \alpha\, x^n\, f(x)\ \sin\big(2\pi\ \ln(x)\big)$$

Or :

- l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx$ est convergente car la densité f admet un moment d'ordre n,
- l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\, \sin\big(2\pi\, \ln(x)\big)$ est convergente d'après ***20.***

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\, g_\alpha(x)\, dx$ est convergente et :

$$m_n(g_\alpha) \ = \ \int_0^{+\infty} x^n\, g_\alpha(x)\, dx \ = \ \int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx + I_n \ = \ m_n(f) + 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } \alpha \in [-1,1], \text{ la densité } g_\alpha \text{ admet des moments à tout ordre et :}\\ \forall n \in \mathbb{N},\ m_n(g_\alpha) = m_n(f)\end{array}}$$

- Finalement, pour tout $\alpha \in [-1,1] \setminus \{0\}$, les fonctions f et g_α :
  × sont des densités sur $[0,+\infty[$ car $\alpha \in [-1,1]$,
  × sont distinctes car $\alpha \neq 0$,
  × admettent des moments à tout ordre et vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n(g_\alpha) \ = \ m_n(f)$$

De plus, l'ensemble $[-1,1] \setminus \{0\}$ est bien un ensemble non dénombrable.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'ensemble } [-1,1] \setminus \{0\} \text{ satisfait aux conditions de l'énoncé.}}$$

Commentaire

Bien sûr, tout ensemble non dénombrable inclus dans $[-1,1] \setminus \{0\}$ convenait également ($[-1,0[$ ou $]0,1]$ par exemple).

□