DS4

Avertissements

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont invités à encadrer leurs résultats.
- L'exercice est commun et devra être traité par tous les élèves.
- Les problèmes sont au choix :
  × le Problème A est de type CCINP.
  × le Problème B est de type Centrale.
  Un seul des deux problèmes devra être traité.
- **L'usage des calculatrices, ou de tout autre dispositif électronique, est interdit**.

Exercice : polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = X\,H_n - H_n'$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré n.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)\,H_n$.

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P \,|\, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,f(x)\,dx,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

3. **Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$**

a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \,|\, Q\rangle$.

b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

4. **Une famille orthogonale**

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

a) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \,|\, H_n\rangle = \left\langle P^{(n)} \,|\, H_0\right\rangle$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que $P = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i\,H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

5. **Étude des racines des polynômes H_n**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, a_1, a_2, …, a_p ses racines et S le polynôme défini par :

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \quad \text{et} \quad S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i) \text{ sinon.}$$

a) Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n \rangle = 0$.

b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)\ H_n(x) \geqslant 0$.

c) En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

PROBLÈME A : Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

- On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face avec la probabilité $\frac{1}{2}$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne face ».
- On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
- Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$$

Exemple 2 : $$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k}_{\text{Série n° 3}}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'événement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série

1. Rappeler (sans le démontrer) les valeurs x pour lesquelles la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} x^k$ converge et rappeler alors la valeur de la somme de cette série.

2. En déduire que pour tout $x \in\ ]-1, 1[$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} k\ x^k$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\ x^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer l'événement $\{L_1 = k\}$ en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

4. Montrer que $\mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 2^{-k}$.

5. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\})$.

6. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

7. Déterminer les lois de N_1 et N_2.

8. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

9. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'événements :

$$\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

puis en déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big)$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap F_n\big)$$

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap P_n\big)$$

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap F_n\big)$$

10. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$\Big(P_n \cap P_{n+1},\ F_n \cap F_{n+1},\ F_n \cap P_{n+1},\ P_n \cap F_{n+1}\Big)$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) + \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big(\{N_m = k\}\big)x^k\,.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = x\,.$$

11. Déduire de 10 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}\, G_n(x)\,.$$

12. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

13. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de G_n', dérivée de la fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.

14. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

PROBLÈME B : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Si la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.
- Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\bar{z}$ son conjugué.
- On appelle *sinus cardinal* la fonction définie, pour tout réel x, par $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

  On admet que cette fonction est continue et que, pour tout réel x, $|\mathrm{sinc}(x)| \leqslant 1$.
- On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles.
  Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de Z par :

  $$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\big(\mathrm{Re}(Z)\big) + i\, \mathbb{E}\big(\mathrm{Im}(Z)\big)$$
- On admettra les résultats suivants qui étendent aux variables aléatoires complexes les résultats analogues sur les variables aléatoires réelles.
  - Toute variable aléatoire Z complexe finie est d'espérance finie. Si $Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_r\}$, où les z_i sont deux à deux distincts, alors :

    $$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{r} z_k\, \mathbb{P}\big(\{Z = z_k\}\big)$$
  - *Théorème de transfert* (cas $X(\Omega)$ fini).
    Soit X une variable aléatoire réelle d'image finie $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
    Alors $f(X)$ est d'espérance finie et :

    $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}\big(\{X = x_k\}\big)\, f(x_k)$$

- Soit Z une variable aléatoire complexe telle que $Z(\Omega)$ soit dénombrable égal à $\{z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où les z_n sont deux à deux distincts. Alors Z est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} z_n\, \mathbb{P}\big(\{Z = z_n\}\big)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n\, \mathbb{P}\big(\{Z = z_n\}\big)$$

- *Théorème de transfert* (cas $X(\Omega)$ dénombrable).
  Soit X une variable aléatoire réelle d'image dénombrable $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
  Alors $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)\ f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas,
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)\ f(x_n)$$

- Soit Z une variable aléatoire complexe et $\bar{Z} : \omega \in \Omega \mapsto \overline{Z(\omega)}$ sa variable aléatoire conjuguée.
  Si Z est d'espérance finie, alors $\bar{Z}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(\bar{Z}\right) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$.
- Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes d'espérance finie et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
  Alors $Z_1 + Z_2$ et λZ_1 sont d'espérance finie et $\mathbb{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}(\lambda Z_1) = \lambda \mathbb{E}(Z_1)$.

I. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction ϕ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itX}\right)$$

I.A - Premières propriétés

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire réelle discrète.

1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}\big(\{X = x_k\}\big)$.
Montrer que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} a_k\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_k}$.

2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.
Montrer que ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_n}$.

3. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel t, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b.

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction ϕ_X soit paire.

I.B - Trois exemples

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et on note $q = 1-p$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \left(q + p\,\mathrm{e}^{it}\right)^n$.

7. Soit $p \in]0,1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p ?

8. Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?

I.C - Image de ϕ_X

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont on note ϕ_X la fonction caractéristique. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b\,\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{a + b\,k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.

10. Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\,\mathbb{Z}$, alors $|\phi_X(t_0)| = 1$.

On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_X(t_0)| = 1$.
Dans la suite de cette sous-partie ***I.C***, on suppose de plus que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

11. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\Big(i\ \left(t_0\,x_n - t_0\,a\right)\Big) = 1$.

12. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ \Big(1 - \cos(t_0\,x_n - t_0\,a)\Big) = 0$.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\,\mathbb{Z}$.

14. En déduire que $\mathbb{P}\Big(\Big\{X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\,\mathbb{Z}\Big\}\Big) = 1$.

II. Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi.

II.A - Première méthode

Soit X une variable aléatoire réelle et discrète et $m \in \mathbb{R}$.
Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $V_m(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\ \mathrm{e}^{-imt}\ dt$.

II.A.1.

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

15. Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \sum\limits_{n=1}^{r} \mathrm{sinc}\Big(T(x_n - m)\Big)\ \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.

16. En déduire que $V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\big(\{X = m\}\big)$.

II.A.2.

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right) \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.

17. Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)$.

18. Montrer que la fonction g_n se prolonge en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

19. Montrer que la fonction $G = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

20. Établir que $V_m(T) \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\big(\{X = m\}\big)$.

II.A.3. Application

21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big(\{X = m\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = m\}\big)$, autrement dit que X et Y ont la même loi.