DS4

Exercice : polynômes de Hermite - `CCINP MP 2016` - / 42 points

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = X\,H_n - H_n'$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré n.

- **1 pt : récurrence écrite correctement (dont initialisation correcte)**
- **1 pt :** $H_n = R + X^n$ **ou écriture similaire**
- **1 pt :** $H_{n+1} = XH_n + H_n' = \left(X\ \ R + H_n'\right) + X^{n+1}$ **de degré** $= n+1$ **et unitaire**

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)\ H_n$.

- **1 pt : récurrence écrite correctement (dont initialisation sans erreur logique)**
- **2 pts : hérédité**
  - × **0 pt :** $H_{n+2}' \ =\ \left(X\ H_{n+1} - H_{n+1}'\right)' \ =\ \left(X\ H_{n+1}\right)' - \left(H_{n+1}'\right)'$
  - × **1 pt :** $= H_{n+1} + X\ H_{n+1}' - \left(H_{n+1}'\right)' = H_{n+1} + X\ \left((n+1)\,H_n\right) - \left((n+1)\,H_n\right)'$ **par HR**
  - × **1 pt :** $= \left(X\ H_n - H_n'\right) + (n+1)\,X\ H_n - (n+1)\,H_n' \ =\ (n+2)\ X\,H_n - (n+2)\,H_n'$

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P \,|\, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,Q(x)\ f(x)\ dx,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$.

3. **Un produit scalaire sur** $\mathbb{R}[X]$

a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \,|\, Q\rangle$.

- **2 pts :** $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ **est convergente**
  - × **1 pt :** $t^k\,f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$
  - × **1 pt : comparaison de séries à termes positifs écrit correctement**
- **2 pts :** $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ **est convergente**
  - × **1 pt : cas** k **pair -> cv d'après le point précédent +** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \ =\ 2\ \int_0^{+\infty} \ldots$
  - × **1 pt : cas** k **impair -> cv d'après le point précédent +** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \ =\ 0$
- **1 pt : la convergence de** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ **implique celle de** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\ Q(t)\ f(t)\ dt$

b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt : $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale**
- **1 pt : $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est symétrique + bilinéaire car linéaire à gauche**
- **3 pts : $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie positive**
  - × **1 pt :** $\langle P \,|\, P \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 f(t)\, dt \geqslant 0$
  - × **1 pt :** $t \mapsto \big(P(t)\big)^2 f(t)$ **est : continue / positive / d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$ donc nulle sur $\mathbb{R}$**
  - × **1 pt : donc $\big(P(t)\big)^2 f(t) = 0$ donc $\big(P(t)\big)^2 = 0$ donc P s'annule une infinité de fois -> c'est le polynôme nul**

4. **Une famille orthogonale**

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

a) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \,|\, H_n \rangle = \left\langle P^{(n)} \,|\, H_0 \right\rangle$.

- **1 pt : récurrence écrite correctement (dont initialisation sans erreur logique)**
- **4 pts : hérédité**
  - × **1 pt :** $\langle P \,|\, H_{n+1} \rangle = \langle P \,|\, X\, H_n \rangle - \langle P \,|\, H_n' \rangle$
  - × **1 pt :** $\langle P \,|\, X\, H_n \rangle = -\left[\, P(t)\, H_n(t)\ f(t) \,\right]_{-\infty}^{+\infty} + \langle P' \,|\, H_n \rangle + \langle P \,|\, H_n' \rangle$
  - × **1 pt :** $\left[\, P(t)\, H_n(t)\ f(t) \,\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ **par croissances comparées**
  - × **1 pt :** $\langle P \,|\, H_{n+1} \rangle = \big(\langle P' \,|\, H_n \rangle + \cancel{\langle P \,|\, H_n' \rangle}\big) - \cancel{\langle P \,|\, H_n' \rangle} = \left\langle \big(P'\big)^{(n)} \,|\, H_0 \right\rangle$ **par HR**

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt : la famille est libre (car échelonnée / orthogonale et constituée de vecteurs non nuls)**
- **1 pt : si $i < j$,** $\langle H_i \,|\, H_j \rangle = \left\langle H_i^{(j)} \,|\, H_0 \right\rangle = \langle 0 \,|\, H_0 \rangle = 0$
- **1 pt : si $i > j$,** $\langle H_i \,|\, H_j \rangle = \langle H_j \,|\, H_i \rangle = 0$ **d'après le point précédent**

c) Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **1 pt :** $\|H_n\|^2 = \langle H_n \,|\, H_n \rangle = \left\langle H_n^{(n)} \,|\, H_0 \right\rangle$ **d'après *4.a)***
- **1 pt :** $= \left\langle \big(X^n + R\big)^{(n)} \,|\, H_0 \right\rangle = \left\langle \big(X^n\big)^{(n)} + R^{(n)} \,|\, H_0 \right\rangle \left\langle \big(X^n\big)^{(n)} \,|\, H_0 \right\rangle$
- **1 pt :** $= \langle\, n! \,|\, H_0 \rangle$ **(récurrence immédiate)**
- **1 pt :** $= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(n! \times 1\big)\ f(t)\ dt = n! \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = n!$

d) Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que $P = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i\, H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

- **1 pt :(** $H_0 = 1$**),** $H_1 = X$, $H_2 = X^2 - 1$ **et** $H_3 = X^3 - 3\,X$
- **2 pts :** $P = 1 \cdot H_3 + 1 \cdot H_2 + 4 \cdot H_1 + 2 \cdot H_0$
  - × **1 pt : raisonnement correct**
  - × **1 pt : résultat**

- **1 pt :** $p(P) = 2 \cdot H_0$ ($p(P) \in \mathbb{R}_0[X] \;\Leftrightarrow\; P - p(P) \in \Big(\mathbb{R}_0[X]\Big)^{\perp}$
- **1 pt :** $\|P - p(P)\|^2 \;=\; \|1 \cdot H_3 + 1 \cdot H_2 + 4 \cdot H_1\|^2 \;=\; \|H_3\|^2 + \|H_2\|^2 + \|4 \cdot H_1\|^2 \;=\; 24$

5. **Étude des racines des polynômes H_n**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, a_1, a_2, …, a_p ses racines et S le polynôme défini par :

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \;\text{ et }\; S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i) \text{ sinon.}$$

a) Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \,|\, H_n \rangle = 0$.

- **1 pt :** $\deg(S) = p < n$ **donc** $S = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot H_i$
- **1 pt :** $\left\langle \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot H_i \,|\, H_n \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \langle H_i \,|\, H_n \rangle = 0$ **car la famille** (H_i) **est orthogonale**

b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)\; H_n(x) \geqslant 0$.

- **1 pt : décomposition** $H_n \;=\; \left(\prod\limits_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\lambda_i} \right) \times \left(\prod\limits_{j=1}^{q} (X - b_j)^{\mu_j} \right) \times R(X)$
- **1 pt :** $S(x)\; H_n(x) = \left(\prod\limits_{i=1}^{p} (x - a_i)^{\lambda_i + 1} \right) \times \left(\prod\limits_{j=1}^{q} (x - b_j)^{\mu_j} \right) \times R(x)$
- **1 pt :** $S(x)\; H_n(x) \;\geqslant\; 0$ **par produit de termes positifs**

c) En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

- **1 pt : on procède par l'absurde. On suppose que H_n n'a pas n racines réelles distinctes. Ainsi,** $\deg(S) = p < n$.
- **1 pt : donc** $\langle S \,|\, H_n \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\; H_n(t)\; f(t)\; dt \;=\; 0$
- **1 pt : la fonction** $t \mapsto S(t)\; H_n(t)\; f(t)$ **est positive / continue / d'intégrale nulle sur** $\mathbb{R}$ **donc est nulle**
- **1 pt : comme** $f > 0$ **alors** $\forall x \in \mathbb{R},\; S(x)\; H_n(x) \;=\; 0$
  et donc $\forall x \in \mathbb{R},\; S(x) = 0 \;\;\texttt{OU}\;\; H_n(x) \;=\; 0$

PROBLÈME A : Étude de séries de pile ou de face - / 38 points

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

– si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;

– sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'événement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série

1. Rappeler (sans le démontrer) les valeurs x pour lesquelles la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ converge et rappeler alors la valeur de la somme de cette série.

- **1 pt :** $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ **est convergente pour tout** $x \in\ ]-1,1[$
- **1 pt :** $\forall x \in\ ]-1,1[,\ \sum\limits_{k\geqslant 0}^{+\infty} x^k \ = \ \dfrac{1}{1-x}$

2. En déduire que pour tout $x \in\ ]-1,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\ x^k$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\ x^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

- **1 pt :** $g_N : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{N} x^k = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$
- **1 pt : en dérivant** $\forall x \in\ ]-1,1[,\ \sum\limits_{k=1}^{N} k\, x^{k-1} = \dfrac{-(N+1)\ x^N + (N+1)\ x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2}$
- **1 pt :** $\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{(1-x)^2}$ **et ainsi** $\forall x \in\ ]-1,1[,\ \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\, x^k \ = \ \dfrac{x}{(1-x)^2}$

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer l'événement $\{L_1 = k\}$ en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

- **2 pts :** $\forall k \in \mathbb{N}^*$**,** $\{L_1 = k\} = \Big(F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}\Big) \ \cup \ \Big(P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}\Big)$

4. Montrer que $\mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 2^{-k}$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) = \mathbb{P}\Big(F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}\Big) \ + \ \mathbb{P}\Big(P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}\Big)$
- **1 pt :** $= \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) \ + \ \mathbb{P}(P_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_k) \times \mathbb{P}(F_{k+1})$ **par indépendance**
- **1 pt :** $= 2\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$

5. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\})$.

- **1 pt : la famille** $\big(\{L_1 = k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ **est un sce donc** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) \ = \ 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{L_1 = 0\}\big) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k - \left(\dfrac{1}{2}\right)^0\right) = 1 - \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} + 1 = 0$

6. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

- **1 pt :** L_1 **admet une espérance ssi** $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\ \mathbb{P}\big(\{L_1 = n\}\big)$ **est ACV ce qui revient à démontrer qu'elle CV**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{N} k\ \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) = 0 \times \mathbb{P}\big(\{L_1 = 0\}\big) + \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) = 0 \times 0 + \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
$= 0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{N} k\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$
- **1 pt : la première série dure en moyenne** 2 **lancers**

Partie II - Étude du nombre de séries

II.1 - Généralités

7. Déterminer les lois de N_1 et N_2.

- **1 pt :** $N_1(\Omega) = \{1\}$**,** $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- **1 pt :** $\{N_2 = 1\} = \big(P_1 \cap P_2\big) \cup \big(F_1 \cap F_2\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{N_2 = 1\}\big) = \mathbb{P}\left(\big(P_1 \cap P_2\big) \cup \big(F_1 \cap F_2\big)\right) = \mathbb{P}\big(P_1\big) \times \mathbb{P}\big(P_2\big) + \mathbb{P}\big(F_1\big) \times \mathbb{P}\big(F_2\big) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{N_2 = 2\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{N_2 = 1\}\big) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ **car** $\big(\{N_2 = 1\}, \{N_2 = 2\}\big)$ **est un sce**

8. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

- **2 pts :** $N_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$
  (dont 1 pt pour la qualité des explications)

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

9. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'événements :

$$\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

puis en déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}) \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big)$$

- **2 pts :** $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$**,** $\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$
  Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues et la dernière série débute lors d'un lancer de rang inférieur ou égal à n
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big)$
  $= \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n \mid P_{n+1}\big) \times \mathbb{P}\big(P_{n+1}\big) = \mathbb{P}\big(P_{n+1}\big) \times \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) = \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big)$

10. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$\Big(P_n \cap P_{n+1},\ F_n \cap F_{n+1},\ F_n \cap P_{n+1},\ P_n \cap F_{n+1}\Big)$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) + \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) + \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1}\big)$
  $+\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}\big) + \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1}\big)$ **par FPT**
- **1 pt :** $= \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) + \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap F_n\big) + \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap F_n\big) + \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap P_n\big)$
- **1 pt :** $= \dfrac{1}{2} \Big(\mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) + \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap F_n\big)\Big) + \dfrac{1}{2} \Big(\mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap P_n\big) + \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap F_n\big)\Big) = \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) + \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big(\{N_m = k\}\big) x^k\,.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = x\,.$$

11. Déduire de 10 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}\ G_n(x)\,.$$

- **1 pt :** $G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big)\ x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ +\ \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)\right)\ x^k$
- **0 pt :** $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^k\ +\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)\ x^k$

  $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^k\ +\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)\ x^k$
- **1 pt :** $= \frac{1}{2}\ G_n(x)\ +\ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^{k+1} = \frac{1}{2}\ G_n(x)\ +\ \frac{1}{2}\ x \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^k$

12. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

- **1 pt : récurrence écrit correctement (dont initialisation)**

  $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\forall x \in \mathbb{R}$**,** $G_n(x)\ =\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1}\ x$
- **1 pt : hérédité** $G_{n+1}(x) = \frac{x+1}{2}\ G_n(x) = \frac{x+1}{2}\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1}\ x$

13. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de G_n', dérivée de la fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.

- **1 pt :** $G_n'(x)\ =\ \sum_{k=1}^{n}\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) \times k\, x^{k-1}\ =\ \sum_{k=1}^{n}\ k\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^{k-1}$
- **1 pt :** $G_n'(1)\ =\ \sum_{k=1}^{n}\ k\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ 1^{k-1}\ =\ \sum_{k=1}^{n}\ k\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ =\ \mathbb{E}(N_n)$
- **1 pt :** $G_n'(x)\ =\ (n-1)\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-2}\ \frac{1}{2} \times x\ +\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1} \times 1$ **donc** $G_n'(1) = \frac{n+1}{2}$

14. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

- **1 pt :** $G_n(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-1}\ x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ x\ (x+1)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\ (x)^k\ (1)^{n-1-k}$
- **1 pt :** $= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\ x^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\ x^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ x^k$
- **1 pt : les polynômes** $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ X^k$ **et** $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\ X^k$ **sont égaux et ont donc même coefficients**
- **1 pt : finalement, la loi de N_n est donnée par :** $\begin{cases} N_n(\Omega)\ =\ [\![1, n]\!] \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big)\ =\ \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$

PROBLÈME B : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle - `Centrale 2 2020 PC` - / 57

I. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction ϕ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_X(t) = \mathbb{E}\Big(\mathrm{e}^{itX}\Big)$$

I.A - Premières propriétés

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire réelle discrète.

1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}\big(\{X = x_k\}\big)$.
Montrer que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} a_k\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_k}$.

- **1 pt : introduction de la fonction** $g_t : x \mapsto \mathrm{e}^{i\,t\,x}$
- **1 pt : par théorème de transfert, cas fini** $\phi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}) = \sum\limits_{k=1}^{r} \mathbb{P}(\{X = x_k\})\ g_t(x_k)$

2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.
Montrer que ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_n}$.

- **1 pt : introduction de la fonction** $g_t : x \mapsto \mathrm{e}^{i\,t\,x}$ **(attribué seulement si non attribué dans la question précédente)**
- **1 pt : par théorème de transfert, cas dénombrable,** $\phi_X(t)$ **existe si et seulement si la série** $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(\{X = x_n\})\ g_t(x_n)$ **est absolument convergente**
- **0 pt :** $\big|\ \mathbb{P}(\{X = x_n\})\ g_t(x_n)\ \big| = \big|\ \mathbb{P}(\{X = x_n\})\ \big| \times \big|\ g_t(x_n)\ \big| = \mathbb{P}(\{X = x_n\})$
- **1 pt : or** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = x_n\}) = 1$ **via le sce associé à la v.a.r.** X
- **1 pt : ainsi, par théorème de transfert,** $\phi_X(t)$ **existe pour tout** t **et vaut** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_n}$

3. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : cas** X **fini :** $\phi_X : t \mapsto \sum\limits_{i=1}^{r} a_k\ \mathrm{e}^{itx_k}$ **est continue par somme (finie) de fonctions continues**
- **3 pts : cas** X **dénombrable.**
  - × **1 pt : introduction de** $h_n : t \mapsto a_n\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_n}$**. Il s'agit de démontrer que la (fonction) somme de la série de fonctions** $\sum h_n$ **est continue**
  - × **1 pt :** $\forall n$, h_n **est continue sur** $\mathbb{R}$
  - × **1 pt :** $|\ h_n(t)\ | = |\ a_n\ | = \mathbb{P}(\{X = x_n\})$ **donc** $\|h_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\{X = x_n\})$ **et la série** $\sum h_n$ **converge normalement**

4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel t, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b.

Version longue

- **0 pt : d'après *2.*, ϕ_Y est définie sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : si $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$ (où $I \subset \mathbb{N}$) alors $Y(\Omega) = \{a\ x_k + b \mid k \in I\}$**
- **1 pt :** $\phi_Y(t) = \sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(\{Y = y_k\})\ \mathbf{e}^{ity_k} = \sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(\{a\ X + b = a\ x_k + b\})\ \mathbf{e}^{it(a\ x_k+b)}$
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(\{X = x_k\})\ \mathbf{e}^{iat\,x_k}\ \mathbf{e}^{itb} = \mathbf{e}^{itb} \sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(\{X = x_k\})\ \mathbf{e}^{iat\,x_k} = \mathbf{e}^{itb}\ \phi_X(a\,t)$

Version courte

- **1 pt :** $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbf{e}^{itY(\omega)} = \mathbf{e}^{it\ \left(a\,X(\omega)+b\right)} = \mathbf{e}^{itb}\ \mathbf{e}^{i\ (at)X(\omega)}$
- **1 pt : donc** $\mathbf{e}^{itY} = \mathbf{e}^{itb}\ \mathbf{e}^{iatX}$
- **1 pt : par linéarité de l'espérance** $\mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{itY}\right) = \mathbf{e}^{itb}\ \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{iatX}\right) = \mathbf{e}^{itb}\ \phi_X(at)$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction ϕ_X soit paire.

- **1 pt :** $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbf{e}^{-itX(\omega)} = \overline{\mathbf{e}^{itX(\omega)}}$ **donc** $\mathbf{e}^{-itX} = \overline{\mathbf{e}^{itX}}$
- **1 pt :** $\phi_X(-t) = \mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{-itX}\right) = \mathbb{E}\left(\overline{\mathbf{e}^{itX}}\right) = \overline{\mathbb{E}\left(\mathbf{e}^{itX}\right)} = \overline{\phi_X(t)}$ **d'après l'énoncé**
- **1 pt :** $\phi_X(-t) = \phi_X(t) \Leftrightarrow \overline{\phi_X(t)} = \phi_X(t) \Leftrightarrow \overline{\phi_X(t)} = \phi_X(t) \Leftrightarrow \phi_X(t) \in \mathbb{R}$

I.B - Trois exemples

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et on note $q = 1 - p$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \left(q + p\,\mathrm{e}^{it}\right)^n$.

- **1 pt :** $\phi_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \mathbf{e}^{i\,k\,t} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}\ \mathbf{e}^{i\,k\,t}$ **(loi binomiale)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ (p\ \mathbf{e}^{it})^k\ (1-p)^{n-k} = \left(p\ \mathbf{e}^{it} + (1-p)\right)^n$

7. Soit $p \in]0,1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p ?

- **1 pt :** $\phi_X(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \mathbf{e}^{i\,k\,t} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\ p\ \mathbf{e}^{i\,k\,t}$ **(loi géométrique)**
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)\right)^k\ p\ \mathbf{e}^{i\,(k+1)\,t} = p\ \mathbf{e}^{i\,t} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)\ \mathbf{e}^{i\,t}\right)^k$
- **1 pt :** $= p\ \mathbf{e}^{i\,t}\ \dfrac{1}{1-(1-p)\ \mathbf{e}^{i\,t}}$

8. Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?

- **1 pt :** $\phi_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = k\})\ \mathbf{e}^{i\,k\,t} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}\ \mathbf{e}^{i\,k\,t}$ **(loi de Poisson)**
- **1 pt :** $= \mathbf{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\left(\lambda\ \mathbf{e}^{i\,t}\right)^k}{k!} = \mathbf{e}^{-\lambda}\ \mathbf{e}^{\lambda\ \mathbf{e}^{i\,t}} = \exp\left(\lambda\ (\mathbf{e}^{i\,t} - 1)\right)$

I.C - Image de ϕ_X

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont on note ϕ_X la fonction caractéristique. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b\,\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{a + b\,k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.

- **0 pt :** $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$ **(où** $I \subset \mathbb{N}$**)**
- **1 pt :** $|\,\phi_X(t)\,| = \left|\ \sum_{k\in I} \mathbb{P}(\{X = x_k\})\ \mathbf{e}^{i\,t\,x_k}\ \right| \ \leqslant\ \sum_{k\in I} \left|\ \mathbb{P}(\{X = x_k\})\ \mathbf{e}^{i\,t\,x_k}\ \right|$
  par inégalité triangulaire généralisée (CVA)
- **1 pt :** $\ldots \sum_{k\in I} \left|\ \mathbb{P}(\{X = x_k\})\ \mathbf{e}^{i\,t\,x_k}\ \right| = \sum_{k\in I} \mathbb{P}(\{X = x_k\}) = 1$

10. Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\,\mathbb{Z}$, alors $|\phi_X(t_0)| = 1$.

- **0 pt : comme** $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\,\mathbb{Z}$**, il existe** $I \subset \mathbb{Z}$ **tel que** $X(\Omega) = \{a + \dfrac{2\pi}{t_0}\ k \mid k \in I\}$
- **1 pt :** $\phi_X(t_0) = \sum_{k\in I} \mathbb{P}\left(\left\{X = a + \dfrac{2\pi}{t_0}\ k\right\}\right)\ \mathbf{e}^{i\,t_0\,\left(a + \frac{2\pi}{t_0}\ k\right)} = \sum_{k\in I} \mathbb{P}\left(\left\{X = a + \dfrac{2\pi}{t_0}\ k\right\}\right)\ \mathbf{e}^{i\,\left(a\,t_0 + 2\,k\,\pi\right)}$
- **1 pt :** $= \mathbf{e}^{i\,a\,t_0} \sum_{k\in I} \mathbb{P}\left(\left\{X = a + \dfrac{2\pi}{t_0}\ k\right\}\right)\ \cancel{\mathbf{e}^{i\,(2\,k\,\pi)}} = \mathbf{e}^{i\,a\,t_0} \times 1$

On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_X(t_0)| = 1$.
Dans la suite de cette sous-partie ***I.C***, on suppose de plus que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

11. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\Big(i\ \left(t_0\,x_n - t_0\,a\right)\Big) = 1$.

- **1 pt : d'après l'énoncé, il existe** $b \in \mathbb{R}$ **tel que** $\phi_X(t_0) = \mathbf{e}^{i\,b}$ **et :** $b = t_0 \times \dfrac{b}{t_0} = a\,t_0$
- **1 pt : donc** $\phi_X(t_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\ \mathbf{e}^{i\,a_k\,t_0} = \mathbf{e}^{i\,a\,t_0}$ **d'où le résultat**

12. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ \Big(1 - \cos(t_0\,x_n - t_0\,a)\Big) = 0$.

- **1 pt : d'après la formule d'Euler**
  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\Big(i\ \left(t_0\,x_n - t_0\,a\right)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\Big(t_0\,x_n - t_0\,a\Big) + i \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin\Big(t_0\,x_n - t_0\,a\Big)$
- **1 pt : d'après la question précédente** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\Big(t_0\,x_n - t_0\,a\Big) = 1$
- **1 pt :** $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ **et différence des sommes infinies pour conclure**

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\ \mathbb{Z}$.

- **1 pt : pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** $\cos(t_0\,x_n - t_0\,a) \ \leqslant\ 1$ **donc** $1 - \cos(t_0\,x_n - t_0\,a) \ \geqslant\ 0$
  et ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ \Big(1 - \cos(t_0\,x_n - t_0\,a)\Big)$ **est une somme de termes positifs**
- **1 pt : ainsi :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $a_n = 0$ `OU` $\cos(t_0\,x_n - t_0\,a) = 0$ **donc** $t_0\,x_n - t_0\,a \in 2\,\pi\mathbb{Z}$
- **1 pt : ainsi :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $t_0\,x_n \in t_0\,a + 2\,\pi\mathbb{Z}$ **et** $x_n \in a + 2\,\dfrac{\pi}{t_0}\mathbb{Z}$

14. En déduire que $\mathbb{P}\Big(\Big\{ X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\, \mathbb{Z} \Big\} \Big) = 1$.

- **1 pt :** $X(\Omega) = \{x \in X(\Omega) \mid \mathbb{P}(\{X = x\}) = 0\} \ \cup \ \{x \in X(\Omega) \mid \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0\} = A \cup B$
- **1 pt : d'après la question précédente :** $\{x \in X(\Omega) \mid \mathbb{P}(\{X = x\}) \neq 0\} \subset a + \frac{2\pi}{t_0}\, \mathbb{Z}$
- **1 pt : finalement :** $1 = \mathbb{P}(\{X \in X(\Omega)\}) = \cancel{\mathbb{P}(\{X \in A\})} + \mathbb{P}(\{X \in B\}) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big\{ X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\, \mathbb{Z} \Big\}\Big)$

II. Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi.

II.A - Première méthode

Soit X une variable aléatoire réelle et discrète et $m \in \mathbb{R}$.
Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $V_m(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\, \mathrm{e}^{-imt}\, dt$.

II.A.1.

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

15. Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \sum\limits_{n=1}^{r} \mathrm{sinc}\Big(T(x_n - m)\Big)\ \mathbb{P}\big(\{X = x_n\} \big)$.

- **0 pt :** $V_m(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\ \mathbf{e}^{-imt}\ dt = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \left(\sum_{k=1}^{r} a_k\ \mathbf{e}^{i\, x_k\, t} \right)\ \mathbf{e}^{-imt}\ dt$
- **1 pt :** $\quad = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k \int_{-T}^{T} \mathbf{e}^{i\,(x_k - m)\, t}\ dt$ **par linéarité de l'intégrale**
- **1 pt :** $\quad = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k \left[\dfrac{\mathbf{e}^{i\,(x_k-m)\, t}}{i\,(x_k - m)} \right]_{-T}^{T} = \dfrac{1}{2T} \sum_{k=1}^{r} a_k\ \dfrac{\mathbf{e}^{i\,(x_k-m)\, T} - \mathbf{e}^{-i\,(x_k-m)\, T}}{i\,(x_k - m)}$
- **1 pt :** $\quad = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k\ \mathbf{sinc}\big((x_k - m)\, T\big)$**, expression vraie dans les cas où** $x_k = m$ **contrairement à la précédente (dans l'étape précédente, différencier les cas)**

16. En déduire que $V_m(T) \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\big(\{X = m\} \big)$.

- **1 pt : si** $x \neq 0$, $|\mathbf{sinc}(x)| = \dfrac{|\sin(x)|}{|x|} \leqslant \dfrac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **et (sinon)** $\mathbf{sinc}(0) = 1$
- **1 pt : cas où** $m \in X(\Omega)$ **(il existe** i_0 **tel que** $x_{i_0} = m$**)**
  $V_m(T) = a_{i_0} + \displaystyle\sum_{\substack{k\,=\,1 \\ k\, \neq\, i_0}}^{r} a_k\ \mathbf{sinc}\big((x_k - m)\, T\big) \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} a_{i_0} = \mathbb{P}\big(\{X = x_{i_0}\} \big) = \mathbb{P}\big(\{X = m\} \big)$
- **2 pts : cas où** $m \notin X(\Omega)$ **(il existe** i_0 **tel que** $x_{i_0} = m$**)**
  - × **1 pt :** $V_m(T) \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{X = m\} \big) = 0$

II.A.2.

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \text{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right) \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.

17. Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\dfrac{1}{T}\right)$.

- **0 pt :** $V_m(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\, \mathrm{e}^{-imt}\, dt = \dfrac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \mathrm{e}^{i\, x_n\, t}\right) \mathrm{e}^{-imt}\, dt$
- **2 pts : interversion $\int$ / $\sum$ possible**
  - × **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n : t \mapsto a_n\, \mathrm{e}^{i\,(x_n - m)\,t}$ **est continue sur** $[-T, T]$
  - × **1 pt :** $|h_n(t)| = a_n$ **donc** $\|h_n\|_{\infty,[-T,T]} = a_n$ **et** $\sum a_n$ **convergente**
- **1 pt :** $\quad = \dfrac{1}{2T} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k \left[\dfrac{\mathrm{e}^{i\,(x_k - m)\,t}}{i\,(x_k - m)}\right]_{-T}^{T} = \dfrac{1}{2T} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, \dfrac{\mathrm{e}^{i\,(x_k - m)\,T} - \mathrm{e}^{-i\,(x_k - m)\,T}}{i\,(x_k - m)}$
- **0 pt :** $\quad = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ **sinc**$\big((x_k - m)\,T\big)$**, comme précédent**

18. Montrer que la fonction g_n se prolonge en une fonction $\tilde{g_n}$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt :** g_n **est continue sur** $\mathbb{R}^*$ **par opérations sur les fonctions usuelles**
- **2 pts :**
  - × **1 pt : si** $x_n = m$**, et** $h > 0$**,** $g_n(h) = \mathbb{P}(\{X = x_n\}) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\{X = x_n\})$
  - × **1 pt : si** $x_n \neq m$**, et** $h > 0$**,** $g_n(h) =$ **sinc** $\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right) \mathbb{P}(\{X = x_n\}) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

19. Montrer que la fonction $G = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- **2 pts : interversion $\int$ / $\sum$ possible**
  - × **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{g_n}$ **est continue sur** $\mathbb{R}_+$
  - × **1 pt :** $|\tilde{g_n}(t)| \leqslant a_n$ **donc** $\|\tilde{g_n}\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant a_n$ **et** $\sum a_n$ **convergente**

20. Établir que $V_m(T) \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\big(\{X = m\}\big)$.

- **1 pt :** $V_m(T) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\dfrac{1}{T}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}\left(\dfrac{1}{T}\right) = G\left(\dfrac{1}{T}\right)$ **d'après *17***
- **1 pt :** $\underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} G(0)$ **par continuité de** G **en** 0 **et** $G(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}(0)$
- **2 pts : déjà** $\tilde{g_n}(0) = 0$ **si** $m \neq x_n$ **et** $\tilde{g_n}(0) = \mathbb{P}(\{X = x_n\})$ **si** $m = x_n$
  - × **1 pt : si** $m \in X(\Omega)$**,** $\lim\limits_{T \to +\infty} V_m(T) = \mathbb{P}(\{X = m\})$
  - × **1 pt : si** $m \notin X(\Omega)$**,** $\lim\limits_{T \to +\infty} V_m(T) = 0 = \mathbb{P}(\{X = m\})$

II.A.3. Application

21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big(\{X = m\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = m\}\big)$, autrement dit que X et Y ont la même loi.

- **1 pt :**
- **1 pt :**