DS4

Exercice : polynômes de Hermite - (CCINP MP 2016)

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = X\,H_n - H_n'$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré n.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: H_n est un polynôme unitaire de degré n.

- **Initialisation** :
  Le polynôme $H_0 = 1$:
  × est de degé 0.
  × est de coefficient dominant 1.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* H_{n+1} est un polynôme unitaire de degré $n+1$).
  - Par hypothèse de récurrence, H_n est un polynôme unitaire de degré n.
    Il existe donc $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
    $$H_n \;=\; R + X^n$$
    Ainsi :
    $$\begin{aligned} H_{n+1} &= X\;H_n + H_n' && \textit{(par définition)} \\ &= X\,\big(R + X^n\big) + H_n' \\ &= \Big(X\;R + H_n'\Big) + X^{n+1} \end{aligned}$$
    On remarque enfin :
    × $\deg(X\;R) = \deg(X) + \deg(R) \leqslant 1 + (n-1) = n$ car $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
    × $\deg(H_n') \leqslant n-1$ (on a même $\deg(H_n') = n-1$ si $n \neq 0$) car $\deg(H_n) = n$ par hypothèse de récurrence.
    On en déduit :
    $$\deg\Big(X\;R + H_n'\Big) \;\leqslant\; \max\Big(\deg(X\;R), \deg(H_n')\Big) \;\leqslant\; n$$
    Ainsi, H_{n+1} est bien un polynôme unitaire de degré $n+1$.
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

Commentaire

Dans la démonstration, on écrit H_n sous la forme : $H_n = R + X^n$. Il est possible de détailler l'obtention de ce polynôme R. Comme H_n est de degré n alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
$$H_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k\;X^k$$
Comme on sait de plus que H_n est unitaire, alors $a_n = 1$ et ainsi H_n s'écrit bien sous la forme $H_n = R + X^n$ avec $R = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\;X^k$.

□

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H'_{n+1} = (n+1)\ H_n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $H'_{n+1} = (n+1)\ H_n$.

- **Initialisation** :
  - D'une part :

$$\begin{array}{rcll} H_1 & = & X\ H_0 - H'_0 & \textit{(par définition)} \\ & = & X - 0 & \textit{(car } H_0 = 1\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi : $H_1 = X$ et $H'_1 = 1$.
  - D'autre part : $(0+1)\ H_0 = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

Commentaire

Lors de cette première étape, il faut démontrer : $H'_1 = (0+1)\ H_0$. Le résultat s'obtient par des manipulations algébriques sans difficulté. La seule difficulté de cette première étape réside dans la rédaction. Il s'agit de mettre en place un raisonnement logique. On peut, au choix :
× partir de l'un des deux polynômes et, par des manipulations algébriques, montrer que l'on aboutit à l'expression du second polynôme.
× rédiger comme dans le corrigé. À savoir : simplifier l'expression de chaque polynôme et conclure quant à leur égalité.

Mais en aucun cas, on ne peut écrire :

$$\begin{array}{rcll} H'_{0+1} & = & (0+1)\ H_0 & \textit{(cette ligne démontre une incompréhension de la notion de raisonnement et constitue une erreur logique : on veut démontrer cette égalité, on ne peut donc pas l'utiliser)} \\ & = & 1 & \\ & = & H'_1 & \textit{(car } H_1 = X\textit{)} \end{array}$$

Résumons cette rédaction : on suppose en 1ère ligne le résultat que l'on doit démontrer (à savoir $H'_{0+1} = (0+1)\ H_0$) pour parvenir à conclure fièrement $H'_1 = H'_1$. Établir ce dernier résultat ne requiert ni hypothèse ni démonstration ; l'avoir démontré ne permet en aucun cas de conclure $H'_{0+1} = (0+1)\ H_0$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $H'_{n+2} = (n+2)\ H_{n+1}$).
  - D'une part :

$$\begin{array}{rcl} (n+2)\ H_{n+1} & = & (n+2)\ \Big(X\,H_n - H'_n\Big) \\ & = & (n+2)\ X\,H_n - (n+2)\,H'_n \end{array}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} H'_{n+2} & = & \Big(X\ H_{n+1} - H'_{n+1}\Big)' & \textit{(par définition)} \\ & = & \Big(X\ H_{n+1}\Big)' - \Big(H'_{n+1}\Big)' & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ & = & H_{n+1} + X\ H'_{n+1} - \Big(H'_{n+1}\Big)' & \\ & = & H_{n+1} + X\ \Big((n+1)\,H_n\Big) - \Big((n+1)\,H_n\Big)' & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \Big(X\ H_n - H'_n\Big) + (n+1)\,X\ H_n - (n+1)\,H'_n & \textit{(par définition)} \\ & = & (n+2)\ X\,H_n - (n+2)\,H'_n & \end{array}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P \,|\, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,Q(x)\ f(x)\ dx,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$.

3. **Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$**

a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \,|\, Q\rangle$.

Démonstration.

- Commençons par démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ est convergente.
  - Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k\ f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
    L'intégrale étudiée est donc impropre seulement en $+\infty$.
  - Or :
    × $\forall t \in [0, +\infty[$, $e^{-t}\ \geqslant\ 0$.
    × $t^k\ f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-t}\right)$ car : $\dfrac{t^k\ f(t)}{e^{-t}}\ =\ \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ t^k\ e^{-\frac{1}{2}\,t^2}\ e^t\ =\ \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \dfrac{t^k}{e^t}\ e^{t-\frac{1}{2}\,t^2}\ \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0.$

      Plus précisément :
      ▶ $\dfrac{t^k}{e^t}\ \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0$ par croissances comparées.
      ▶ $e^{t-\frac{1}{2}\,t^2}\ \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}\ 0$ par composition de limite.

    × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt$ est convergente (d'après le cours).

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\ f(t)$ est convergente.

- Démontrons alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ est convergente.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.
  × Si k est pair alors, comme f est paire sur $\mathbb{R}$, l'intégrande $t \mapsto t^k\ f(t)$ est pair sur $\mathbb{R}$.
  On en conclut, par l'étude précédente, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ et convergente. De plus :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt \ = \ 2 \int_{0}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$$
  × Si k est impair alors, comme f est paire sur $\mathbb{R}$, l'intégrande $t \mapsto t^k\ f(t)$ est impair sur $\mathbb{R}$.
  On en conclut, par l'étude précédente, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ et convergente. De plus :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall r \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt \text{ est convergente.}}$$

- Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.
  Comme $PQ \in \mathbb{R}[X]$, il existe $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que : $PQ = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k\ X^k$.
  Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\ f(t)\ dt$ est convergente, alors, par linéarité de l'intégrale généralisée, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(a_k\, t^k\ f(t)\big)\ dt$ est convergente. De plus :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(a_k\, t^k\ f(t)\big)\ dt \ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(a_k\, t^k\big)\ f(t)\ dt \\ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\ f(t)\ dt\end{aligned}$$
  L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\ f(t)\ dt$ est donc bien convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \text{ l'intégrale qui définit } \langle P \,|\, Q\rangle \text{ est convergente.}}$$ □

b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration.
- L'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.
- Démontrons que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est symétrique.
  Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$. Alors :
$$\begin{aligned}\langle Q \,|\, P\rangle \ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)\, P(t)\ f(t)\ dt \\ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\ f(t)\ dt \qquad \textit{(car la loi } \times \textit{ est commutative)} \\ &= \ \langle P \,|\, Q\rangle\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application } \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \text{ est symétrique.}}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$.
  Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.
  Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda \cdot P + \mu \cdot Q \,|\, R \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\big)(t)\, R(t)\ f(t)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\lambda \cdot P(t) + \mu \cdot Q(t)\big)\, R(t)\ f(t)\ dt && \textit{(par linéarité de l'évaluation)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\lambda \cdot P(t)\ R(t)\ f(t) + \mu \cdot Q(t)\ R(t)\ f(t)\big)\ dt \\
&= \quad \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, R(t)\ f(t)\ dt \\
&\quad + \ \mu \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)\, R(t)\ f(t)\ dt \\
&= \lambda\ \langle P \,|\, R \rangle + \mu\ \langle Q \,|\, R \rangle
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application } \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \text{ est linéaire à gauche.}}$$

- D'après ce qui précède :
  - × l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est symétrique.
  - × l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

  On en déduit que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est linéaire à droite.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \text{ est bilinéaire.}}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ est définie positive.
  - × Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\langle P \,|\, P \rangle \ = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, P(t)\ f(t)\ dt$$

    Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t)\, P(t)\ f(t) \ \geqslant\ 0$$

    Ainsi, par croissance de l'intégrale généralisée (la convergence étant démontrée), les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\langle P \,|\, P \rangle \ = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\,P(t)\,\big)^2\ f(t)\ dt \ \geqslant\ 0$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P \,|\, P \rangle \ \geqslant\ 0}$$

  - × Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons $\langle P \,|\, P \rangle = 0$.

    La fonction $t \mapsto \big(\,P(t)\,\big)^2\ f(t)$ est :
    - × continue sur $\mathbb{R}$,
    - × positive sur $\mathbb{R}$,
    - × d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} & \big(P(t)\big)^2 \; f(t) \;=\; 0 \\ \text{donc} & \big(P(t)\big)^2 \; \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t^2} \;=\; 0 \\ \text{donc} & \big(P(t)\big)^2 \; \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t^2} \times \sqrt{2\,\pi}\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \;=\; 0 \times \sqrt{2\,\pi}\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,t^2} \\ \text{donc} & \big(P(t)\big)^2 \;=\; 0 \\ \text{donc} & P(t) \;=\; 0 \end{array}$$

Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = 0$. On en conclut : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application } \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \text{ est définie positive.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application } \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle \text{ est bien un produit scalaire.}}$$

□

4. **Une famille orthogonale**

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\cdot\|$.

a) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \,|\, H_n \rangle = \big\langle P^{(n)} \,|\, H_0 \big\rangle$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\quad \mathcal{P}(n) : \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P \,|\, H_n \rangle = \big\langle P^{(n)} \,|\, H_0 \big\rangle$.

- **Initialisation** :
  Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme $P^{(0)} = P$ alors : $\big\langle P^{(0)} \,|\, H_0 \big\rangle = \langle P \,|\, H_0 \rangle$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P \,|\, H_{n+1} \rangle = \big\langle P^{(n+1)} \,|\, H_0 \big\rangle$)

$$\begin{array}{rcll} \langle P \,|\, H_{n+1} \rangle & = & \langle P \,|\, X\,H_n - H_n' \rangle & \textit{(par définition)} \\ & = & \langle P \,|\, X\,H_n \rangle - \langle P \,|\, H_n' \rangle & \textit{(par linéarité à droite de } \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle\textit{)} \end{array}$$

Or :

$$\langle P \,|\, X\,H_n \rangle \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\; \big(t\,H_n(t)\big)\, f(t)\; dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \big(P(t)\,H_n(t)\big) \times t\, f(t)\; dt$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & P(t)\; H_n(t) & & u'(t) & = & P'(t)\; H_n(t) + P(t)\; H_n'(t) \\ v'(t) & = & t\; \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t^2} & & v(t) & = & \dfrac{-1}{\sqrt{2\,\pi}}\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,t^2} \;=\; -f(t) \end{array} \right.$$

Sous réserve de convergence, on a alors :

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(P(t)\,H_n(t)\big) \times t\, f(t)\; dt \\ = & -\big[\; P(t)\,H_n(t)\; f(t)\; \big]_{-\infty}^{+\infty} \;+\; \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(P'(t)\; H_n(t) + P(t)\; H_n'(t)\Big)\; f(t)\; dt \\ = & -\big[\; P(t)\,H_n(t)\; f(t)\; \big]_{-\infty}^{+\infty} \;+\; \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)\; H_n(t)\; f(t)\; dt \;+\; \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\; H_n'(t)\; f(t)\; dt \quad (*) \\ = & -\big[\; P(t)\,H_n(t)\; f(t)\; \big]_{-\infty}^{+\infty} \;+\; \langle P' \,|\, H_n \rangle \;+\; \langle P \,|\, H_n' \rangle \end{array}$$

$\left(\right.$ *L'égalité* $(*)$ *est obtenue par linéarité de l'intégration, toutes les intégrales en présence étant convergentes, d'après la question* ***3.a)****.* $\left.\right)$

On remarque alors :

× $P(t)\, H_n(t)\ f(t) = \dfrac{P(t)\, H_n(t)}{\mathrm{e}^t} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}\,t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$

par croissances comparées car $P\,H_n$ est un polynôme.

× $P(t)\, H_n(t)\ f(t) = \dfrac{P(t)\, H_n(t)}{\mathrm{e}^{-t}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-t-\frac{1}{2}\,t^2} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$

par croissances comparées car $P\,H_n$ est un polynôme.

Ainsi, le crochet est convergent et il en est de même des intégrales en présence (d'après la question ***3.a)***) ce qui permet de lever la réserve de convergence et valide ainsi l'intégration par parties. Finalement :

$$\begin{aligned} \langle P \,|\, H_{n+1} \rangle &= \langle P \,|\, X\,H_n \rangle \ - \ \langle P \,|\, H_n' \rangle \\ &= \langle P' \,|\, H_n \rangle \ + \ \cancel{\langle P \,|\, H_n' \rangle} \ - \ \cancel{\langle P \,|\, H_n' \rangle} \\ &= \left\langle (P')^{(n)} \,|\, H_0 \right\rangle && \textit{(par hypothèse de récurrence appliquée à } P'\textit{)} \\ &= \left\langle P^{(n+1)} \,|\, H_0 \right\rangle \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n).}$$

□

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La famille $\mathcal{F} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est :
  × libre car échelonnée en degré et constituée de polynômes non nuls.
  En effet, en question ***1***, on a démontré que pour tout $i \in \mathbb{N}$, le polynôme H_i est de degré i.
  × telle que $\mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = n+1 = \dim\,(\mathbb{R}_n[X])$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

- Démontrons maintenant que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale.
  Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,n]\!]$. Supposons $i \neq j$. Deux cas se présentent.
  × Si $i < j$ alors :

$$\begin{aligned} \langle H_i \,|\, H_j \rangle &= \left\langle H_i^{(j)} \,|\, H_0 \right\rangle && \textit{(d'après la question } \boldsymbol{4.a)}\textit{)} \\ &= \left\langle 0_{\mathbb{R}[X]} \,|\, H_0 \right\rangle && \textit{(car } \deg(H_i) = i < j\textit{)} \\ &= 0 && \textit{(par propriété des produits scalaires)} \end{aligned}$$

  × Si $i > j$

$$\begin{aligned} \langle H_i \,|\, H_j \rangle &= \langle H_j \,|\, H_i \rangle && \textit{(par symétrie)} \\ &= 0 && \textit{(d'après le point précédent et car } \deg(H_j) = j < i\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est donc orthogonale.}}$$

Commentaire

- Commençons par rappeler la définition d'orthogonalité. Une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in I}$ d'une espace vectoriel E est orthogonale si :

$$\boxed{\forall (i,j) \in I^2, \Big(i \neq j \ \Rightarrow\ \langle u_i, u_j\rangle = 0\Big)}$$

Pour démontrer qu'une famille est orthogonale, on doit tester tous les couples de vecteurs **distincts**. Il n'y a donc pas lieu de déterminer $\langle H_i, H_i\rangle$ dans cette question. C'est d'ailleurs l'objet de la question qui suit.

- On rappelle que toute famille orthogonale constituée de **vecteurs non nuls** est libre. On pouvait utiliser cette propriété ici en lieu et place de l'argument concernant la famille échelonnée.
- La démonstration ***4.a)*** même si elle n'utilise que des arguments élementaires, n'est pas si simple. Dans la démonstration, la quantité $\langle P \,|\, H_n'\rangle$ s'élimine à l'aide de son opposé. Si on s'y prend mal, on risque de s'empêtrer dans les calculs pour se débarrasser de cette quantité. Il est donc possible de ne pas aboutir au résultat. Il faut alors ne pas se décourager et conserver en tête le résultat de cette question qui pourra servir dans la suite.

□

c) Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
\|H_n\|^2 & = & \langle H_n \,|\, H_n\rangle & \\
& = & \left\langle H_n^{(n)} \,|\, H_0\right\rangle & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\
& = & \left\langle \big(X^n + R\big)^{(n)} \,|\, H_0\right\rangle & \textit{(en reprenant les notations de la question } \textbf{\textit{1}} \\
& & & \textit{et car } H_n \textit{ est unitaire de degré } n\textit{)} \\
& = & \left\langle \big(X^n\big)^{(n)} + R^{(n)} \,|\, H_0\right\rangle & \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
& = & \left\langle \big(X^n\big)^{(n)} \,|\, H_0\right\rangle & \textit{(car } R^{(n)} = 0_{\mathbb{R}[X]} \textit{ puisque } \deg(R) < n\textit{)} \\
& = & \langle\, n! \,|\, H_0\rangle & \textit{(par une récurrence immédiate)} \\
& = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(n! \times 1\big)\ f(t)\ dt & \\
& = & n! \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ n! &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \|H_n\| = \sqrt{n!}.}$$

□

d) Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que $P = \sum_{i=0}^{3} a_i\, H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $H_0 = 1$. Par définition :

$$H_1 \;=\; X\, H_0 - \cancel{H_0'} \;=\; X$$

De même :

$$H_2 \;=\; X\, H_1 - H_1' \;=\; X \times X - 1 \;=\; X^2 - 1$$

Enfin :

$$H_3 \;=\; X\, H_2 - H_2' \;=\; X \times \big(X^2 - 1\big) - 2\,X \;=\; X^3 - 3\,X$$

$$\boxed{H_0 = 1,\ H_1 = X,\ H_2 = X^2 - 1 \text{ et } H_3 = X^3 - 3\,X}$$

- Soit $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot H_i &= a_3 \cdot (X^3 - 3X) + a_2 \cdot (X^2 - 1) + a_1 \cdot X + a_0 \\ &= a_3 \cdot X^3 + a_2 \cdot X^2 + (a_1 - 3\,a_3) \cdot X + (a_0 - a_2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot H_i \quad &\Longleftrightarrow \quad X^3 + X^2 + X + 1 \;=\; a_3 \cdot X^3 + a_2 \cdot X^2 + (a_1 - 3\,a_3) \cdot X + (a_0 - a_2) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} a_3 & & & & & & & = & 1 \\ & & a_2 & & & & & = & 1 \\ -3\,a_3 & & & + & a_1 & & & = & 1 \\ & & -a_2 & & & + & a_0 & = & 1 \end{array} \right. \quad \textit{(par identification)} \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 + 3\,L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a_3 & & & & & = & 1 \\ & a_2 & & & & = & 1 \\ & & a_1 & & & = & 4 \\ & -a_2 & & + & a_0 & = & 1 \end{array} \right. \\ &\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrcl} a_3 & & & & = & 1 \\ & a_2 & & & = & 1 \\ & & a_1 & & = & 4 \\ & & & a_0 & = & 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } P = 1 \cdot H_3 + 1 \cdot H_2 + 4 \cdot H_1 + 2 \cdot H_0}$$

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,(P, \mathbb{R}_0[X]) &= \inf_{Q \in \mathbb{R}_0[X]} \|P - Q\| && \textit{(comme rappelé dans l'énoncé)} \\ &= \|P - p(P)\| && \textit{(où } p(P) \textit{ est le projeté orhtogonal de } P \textit{ sur } \mathbb{R}_0[X]\textit{)} \end{aligned}$$

Déterminons alors $p(P)$.
Comme $p(P) \in \mathbb{R}_0[X]$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $p(P) = \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot H_0$.

$$\begin{array}{rcll} p(P) \in \mathbb{R}_0[X] & \Leftrightarrow & P - p(P) \in \Big(\mathbb{R}_0[X]\Big)^{\perp} & \\ & \Leftrightarrow & \langle P - p(P) \,|\, H_0 \rangle = 0 & \textit{(car } \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}\,(H_0)\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \langle 1 \cdot H_3 + 1 \cdot H_2 + 4 \cdot H_1 + (2-\alpha) \cdot H_0 \,|\, H_0 \rangle = 0 & \\ & \Leftrightarrow & \cancel{\langle H_3 \,|\, H_0 \rangle} + \cancel{\langle H_2 \,|\, H_0 \rangle} + 4\ \cancel{\langle H_1 \,|\, H_0 \rangle} + (2-\alpha)\ \langle H_0 \,|\, H_0 \rangle = 0 & \\ & \Leftrightarrow & (2-\alpha) = 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } p(P) = 2 \cdot H_0.}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \|P - p(P)\|^2 & = & \|1 \cdot H_3 + 1 \cdot H_2 + 4 \cdot H_1\|^2 & \\ & = & \|H_3\|^2 + \|H_2\|^2 + \|4 \cdot H_1\|^2 & \textit{(d'après le théorème de Pythagore)} \\ & = & 3! + 2! + 4^2 \times 1! & \textit{(car } \|4 \cdot H_1\|^2 = 4^2\ \|H_1\|^2\textit{)} \\ & = & 6 + 2 + 16 \ = \ 24 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathrm{d}\,(P, \mathbb{R}_0[X]) = \sqrt{24}.}$$

Commentaire

- Pour le calcul de la distance, il est aussi possible de remarquer :

$$\|P\|^2 \ = \ \|\big(P - p(P)\big) + p(P)\|^2 \ = \ \|\,P - p(P)\,\|^2 + \|\,p(P)\,\|^2 \qquad \textit{(par le théorème de Pythagore)}$$

On en déduit alors :

$$\boxed{\|\,P - p(P)\,\|^2 = \|P\|^2 - \|\,p(P)\,\|^2}$$

Ce résultat peut s'avérer utile si on a déjà déterminé la norme de P (ce n'est pas le cas ici).

- Afin de déterminer la distance d'un vecteur u d'un espace vectoriel E à un sous-espace vectoriel de dimension finie F, on doit déterminer le projeté orthogonal de u sur F.
Il existe deux méthodes pour déterminer ce projeté.
  × Méthode 1 : exploitation de l'orthogonalité ($u - p(u) \in F^{\perp}$)
  On a présenté dans l'exercice la méthode permettant de déterminer la distance à F d'un vecteur $u \in E$ **connu** (on ne traite pas ici le cas général d'un vecteur quelconque de E. Cette méthode ne requiert que de connaître une famille génératrice de F.
  Plus précisément, si $F = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_m)$ alors on écrit :

(i) comme $p(u) \in F$, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que : $p(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot e_i$.

(ii) on détermine les valeurs du m-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ en remarquant :

$$p(u) \in F \quad \Leftrightarrow \quad u - p(u) \in F^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle u - p(u) \,|\, e_1 \rangle = 0 \\ \quad \vdots \\ \langle u - p(u) \,|\, e_m \rangle = 0 \end{array} \right.$$

Il est important de comprendre que u est un vecteur connu et pas un vecteur quelconque de E. C'est primordial pour obtenir un système linéaire à m équations et m inconnues. Si $(e_1, \dots, e_m)$ est une base de F alors ce système possède une unique solution.

Commentaire

Dans la question ci-dessus, on utilise cette méthode avec $F = \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(H_0)$.
On obtient ainsi un système avec une seule équation et une seule inconnue.

Dans l'énoncé, on étudie un cas très particulier puisque l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni d'une base orthogonale (H_0, H_1, H_2, H_3) est que F est engendré par une sous-famille de cette base. On commence alors par écrire P selon cette base (étape spécifique à l'énoncé mais qui n'est généralement pas réalisée dans le cas général).

× Méthode 2 : expression générale de p, projection orthogonale sur F

On peut aussi vouloir obtenir l'expression de $p(u)$ pour tout vecteur $u \in E$ et plus seulement pour un vecteur fixé. Si l'on dispose d'une **base orthonormale** $(e_1, \ldots, e_m)$ de F alors :

$$\boxed{p(u) \ = \ \sum_{i=1}^{m} \langle u \mid e_i \rangle \cdot e_i}$$

Ici, il n'est plus utile que u soit un vecteur fixé (mais on peut évidemment utiliser la méthode dans ce cas).
Dans l'exercice, $F = \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(H_0)$. Comme $\|H_0\| = \sqrt{0!} = 1$ alors (H_0) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_0[X]$. On en conclut :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \ p(P) \ = \ \langle P \mid H_0 \rangle \cdot H_0$$

- en appliquant cette définition au vecteur P fourni par l'énoncé :

$$\begin{aligned} p(P) &= \langle 1 \cdot H_3 + 1 \cdot H_2 + 4 \cdot H_1 + 2 \cdot H_0 \mid H_0 \rangle \cdot H_0 \\ &= 2 \ \langle H_0 \mid H_0 \rangle \cdot H_0 \\ &= 2 \cdot H_0 \end{aligned}$$

Évidemment, le fait que l'on possède une base orthonormale de $E = \mathbb{R}_3[X]$ simplifie les calculs. Mais, comme dit précédemment, cela n'est pas obligatoire.

- en appliquant cette définition à un vecteur P quelconque, de coefficients $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) on obtient :

$$\begin{aligned} p(P) &= \langle a_3 \cdot H_3 + a_2 \cdot H_2 + a_1 \cdot H_1 + a_0 \cdot H_0 \mid H_0 \rangle \cdot H_0 \\ &= a_0 \ \langle H_0 \mid H_0 \rangle \cdot H_0 \\ &= a_0 \cdot H_0 \end{aligned}$$

Comme mis en avant dans l'exposé de la méthode précédente, on étudie dans cette question un cas très particulier où $E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni d'une base orthogonale (H_0, H_1, H_2, H_3) est où F est engendré par une sous-famille de cette base. Comme H_3, H_2 et H_1 sont tous des éléments de $\left(\mathbb{R}_0[X]\right)^{\perp}$, il est évident que le projeté orthogonal de $P = a_3 \cdot H_3 + a_2 \cdot H_2 + a_1 \cdot H_1 + a_0 \cdot H_0$ sur $\text{Vect}(H_0)$ n'est autre que la partie de $a_0 \cdot H_0$. De la même manière, si on avait demandé le projeté orthogonal sur $\text{Vect}(H_3)$, on aurait obtenu $a_3 \cdot H_3$. Si on avait demandé le projeté orthogonal sur $\text{Vect}(H_1, H_2)$, on aurait obtenu $a_1 \cdot H_1 + a_2 \cdot H_2 \ldots$

□

5. Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, a_1, a_2, …, a_p ses racines et S le polynôme défini par :

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \text{ et } S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i) \text{ sinon.}$$

a) Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \,|\, H_n \rangle = 0$.

Démonstration.
On suppose dans cette question $p < n$.
Le polynôme $S = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - a_i)$ est de degré p. Comme $(H_0, H_1, \dots, H_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, il existe un unique $(p+1)$-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que : $S = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot H_i$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \langle S \,|\, H_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot H_i \,|\, H_n \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \langle H_i \,|\, H_n \rangle \\ &= 0 \qquad \textit{(car pour tout } i \neq n\textit{, } \langle H_i \,|\, H_n \rangle = 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } p < n \text{ alors } \langle S \,|\, H_n \rangle = 0.}$$

□

b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)\ H_n(x) \geqslant 0$.

Démonstration.

- Décomposons le polynôme H_n à l'aide de facteurs irréductibles :
  - × l'énoncé note p le nombre de racines réelles distinctes d'ordre impair de H_n et a_1, …, a_p ces racines. On note de plus, pour tout $i \in]\!]1, p[\![$, λ_i l'ordre de multiplicité de a_i dans H_n.
  - × de la même manière, on note q le nombre de racines réelles distinctes d'ordre pair de H_n et b_1, …, b_q ces racines. On note de plus, pour tout $i \in]\!]1, q[\![$, μ_i l'ordre de multiplicité de b_i dans H_n.

  Le polynôme H_n peut alors s'écrire sous la forme :

  $$H_n = \left(\prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\lambda_i} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{q} (X - b_j)^{\mu_j} \right) \times R(X)$$

  où R est un polynôme de degré $m = n - \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i - \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j$ et sans racine réelle.
  Comme R ne possède pas de racine réelle, sa fonction polynomiale associée (que l'on confond avec R) est de signe constant. De plus, comme H_n est unitaire, le terme de plus haut degré de R est forcément X^m. Ainsi, R est toujours positive (car $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^m = +\infty$).

- On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{aligned} S(x)\ H_n(x) &= \left(\prod_{i=1}^{p} (x - a_i)^{\lambda_i} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{q} (x - b_j)^{\mu_j} \right) \times R(x) \times \prod_{i=1}^{p} (x - a_i) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{p} (x - a_i)^{\lambda_i + 1} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{q} (x - b_j)^{\mu_j} \right) \times R(x) \end{aligned}$$

On remarque alors :

× pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i est impair (par définition) et donc $\lambda_i + 1$ est pair.
Ainsi : $(x - a_i)^{\lambda_i+1} \geqslant 0$. Enfin : $\prod\limits_{i=1}^{p} (x - a_i)^{\lambda_i+1} \ \geqslant\ 0$.

× pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, μ_j est impair (par définition).
Ainsi : $(x - b_i)^{\mu_j} \geqslant 0$. Enfin : $\prod\limits_{i=1}^{q} (x - b_j)^{\mu_j} \ \geqslant\ 0$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x)\ H_n(x) \ \geqslant\ 0$ comme produit de termes positifs.

Commentaire

- Dans la démonstration, le polynôme H_n n'a pas été décomposé entièrement en produit de facteurs irréductibles. En l'occurence, R n'est pas forcément irréductible même s'il ne possède pas de racines réelles. Plus précisément, il existe $r \in \mathbb{N}$, $(c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{R}^r$, $(d_1, cdot, d_r) \in \mathbb{R}^r$ et $(\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que :
$$R \ = \ \prod_{k=1}^{r} \left(X^2 + c_k X + d_k\right)^{\nu_k}$$
En effet, les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ qui n'ont pas de racines réelles sont les trinômes du second degré dont le discriminant est strictement négatif. Il est à noter que les trinômes présentés ici sont unitaires ce qui est autorisé par le fait que H_n l'est.
- Cette décomposition peut servir à démontrer le caractère positif de l'application polynomiale associée à R ent tant que produit d'applications positives (les applications polynomiales associées aux trinômes en présence sont positives).

□

c) En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

Démonstration.
On procède par l'absurde. On suppose que H_n n'a pas n racines réelles distinctes.
On reprend alors les notations S et p introduites en début de question ***5***.

- Démontrons tout d'abord que S n'est pas de degré n.
On procède par l'absurde. Supposons que S est de degré n.
Alors, par définition :
$$S = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$$
où $a_1, \ldots, a_n$ sont les racines réelles distinctes d'ordres impairs de H_n.
Comme H_n est de degré n, il possède au plus n racines qui sont donc $a_1, \ldots, a_n$.
Absurde car H_n ne possède pas n racines distinctes par hypothèse.

On en conclut : $p < n$.

- On déduit du point précédent : $\langle S \mid H_n \rangle = 0$. Autrement dit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\ H_n(t)\ f(t)\ dt \ = \ 0$$

La fonction $t \mapsto S(t)\ H_n(t)\ f(t)$ est :

× positive sur $\mathbb{R}$ comme produit de f, positive sur $\mathbb{R}$ et de $t \mapsto S(t)\ H_n(t)$ positive sur $\mathbb{R}$.

× continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

× d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x)\ H_n(x)\ f(x) \ = \ 0$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} > 0$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x)\ H_n(x) \ = \ 0 \quad \text{et donc} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = 0 \ \texttt{OU} \ H_n(x) \ = \ 0$$

L'un au moins des polynômes S ou H_n (éventuellement les deux) s'annule un nombre infini de fois. L'un de ces deux polynômes est donc nul. Absurde ! En effet :

× S est non nul par définition.

× H_n est de degré n et n'est donc pas nul.

$$\boxed{\text{On en déduit que } H_n \text{ possède } n \text{ racines réelles distinctes.}}$$

□

PROBLÈME A : Étude de séries de pile ou de face - (CCINP PC 2022)

Présentation générale

- On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face avec la probabilité $\frac{1}{2}$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne face ».
- On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
- Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \ \cap \ \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \ \cap \ \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \ \cap \ F_8 \cap \dots$$

Exemple 2 : $$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \ \cap \ \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \ \cap \ \underbrace{\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k}_{\text{Série n° 3}}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'événement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série

1. Rappeler (sans le démontrer) les valeurs x pour lesquelles la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ converge et rappeler alors la valeur de la somme de cette série.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La série } \sum\limits_{k\geqslant 0} x^k \text{ est convergente pour tout } x \in\,]-1,1[\text{. De plus :}\\ \forall x \in\,]-1,1[,\ \sum\limits_{k\geqslant 0}^{+\infty} x^k \ = \ \dfrac{1}{1-x}.\end{array}}$$

Commentaire

- La démonstration de cette égalité est élémentaire. Il suffit de remarquer que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{N} x^k &= \sum_{k=0}^{N} x^k - \sum_{k=0}^{N} x^{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{N} x^k - \sum_{k=1}^{N+1} x^k\\ &= \Big(x^0 + \cancel{\sum_{k=1}^{N} x^k}\Big) - \Big(\cancel{\sum_{k=1}^{N} x^k} + x^{N+1}\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

- L'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un polynôme de degré $+\infty$. On appelle cet objet une **série entière** et on dit alors que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière (DSE) sur l'intervalle $]-1,1[$. Toutes les fonctions ne sont pas développables en séries entières. L'intérêt de ce type de développement est la relative simplicité de l'objet $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et notamment son bon comportement vis-à-vis de certaines opérations telles que la dérivation. Un chapitre (à venir) est dédié à l'étude des séries entières.

$\square$

2. En déduire que pour tout $x \in \,]-1,1[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\ x^k$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\ x^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]-1,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

- L'application $g_N : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{N} x^k$ est polynomiale (de degré N). Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
  De plus :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_N'(x) \ = \ \sum_{k=1}^{N} k\, x^{k-1}$$
- Par ailleurs : $\forall x \in \,]-1,1[,\quad g_N(x) = \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$ (l'égalité est en réalité vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).
  On en déduit, en dérivant cette expression :
$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[,\quad \sum_{k=1}^{N} k\, x^{k-1} \quad &= \quad \frac{-(N+1)\ x^N\ (1-x) - \left(1-x^{N+1}\right)\ (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \quad \frac{-(N+1)\ x^N + (N+1)\ x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$
  En effet, comme $x \in \,]-1,1[$:
  × $\lim\limits_{N\to+\infty} x^{N+1} = 0$,
  × $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)\ x^N$ par croissances comparées,
  × $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)\ x^{N+1}$ par croissances comparées.

  Ainsi : $\forall x \in \,]-1,1[,\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} \ = \ \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Enfin :
$$\forall x \in \,]-1,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^k \ = \ x \sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^k \ = \ \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \,]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} k\, x^k \ = \ \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Commentaire

On a ici fait une démonstration élémentaire de la convergence de la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\, x^k$. Comme annoncé dans la remarque précédente, ce type d'objets donne lieu à une étude et des résultats spécifiques notamment pour ce qui est de la dérivation (et de l'interversion des symboles $\sum$ et dérivation).

□

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer l'événement $\{L_1 = k\}$ en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, k+1]\!]$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

L'événément $\{L_1 = k\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ La première série est de longueur k

$\Leftrightarrow$ La première série est de longueur k et constituée uniquement de Face
OU la première série est de longueur k et constituée uniquement de Pile

$\Leftrightarrow$ On a obtenu intialement k Face suivi d'un Pile
OU on a obtenu intialement k Pile suivi d'un Face

$\Leftrightarrow$ L'événement $F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}$ est réalisé
OU l'événement $P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événément $\Big(F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}\Big) \cup \Big(P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}\Big)$ est réalisé

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \{L_1 = k\} = \Big(F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}\Big) \cup \Big(P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}\Big)}$$

□

4. Montrer que $\mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 2^{-k}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\Big(\Big(F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}\Big) \cup \Big(P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}\Big)\Big) \\
= \ & \mathbb{P}\Big(F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}\Big) + \mathbb{P}\Big(P_1 \cap \ldots \cap P_k \cap F_{k+1}\Big) && \textit{(car les 2 événements considérés sont incompatibles)} \\
= \ & \mathbb{P}(F_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) + \mathbb{P}(P_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_k) \times \mathbb{P}(F_{k+1}) && \textit{(car les lancers sont indépendants)} \\
= \ & \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
= \ & \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
= \ & 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.}$$

□

5. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\})$.

Démonstration.

- La famille $\big(\{L_1 = k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) \;=\; 1$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{L_1 = 0\}\big) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right) \\
&= 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 1 \\
&= 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finralement : } \mathbb{P}\big(\{L_1 = 0\}\big) = 2 - 2 = 0.}$$

Commentaire

On démontre ici que la probabilité que la première chaîne soit de longueur infinie est nulle. Pour ce faire, on se sert du système complet d'événements $\big(\{L_1 = k\}\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Il est aussi possible de faire une démonstration directe en remarquant :

$$\{L_1 = 0\} \;=\; \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) \;\cup\; \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right)$$

Par incompatibilité, on en déduit alors :

$$\mathbb{P}\big(\{L_1 = 0\}\big) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) \;+\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right)$$

Or, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right) \;=\; \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} F_k\right)$$

Et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} F_k\right) &= \prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}(F_k) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } \tfrac{1}{2} \in\,]-1,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

De la même manière : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) = 0$ ce qui permet bien de conclure : $\mathbb{P}\big(\{L_1 = 0\}\big) = 0$.

□

6. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Démonstration.

- La variable aléatoire L_1 admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} n \ \mathbb{P}\big(\{L_1 = n\}\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=0}^{N} k \ \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) & = & 0 \times \mathbb{P}\big(\{L_1 = 0\}\big) + \sum\limits_{k=1}^{N} k \ \mathbb{P}\big(\{L_1 = k\}\big) & \\
 & = & 0 \times 0 + \sum\limits_{k=1}^{N} k \ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k & \textit{(d'après la question 4)} \\
 & = & 0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + \sum\limits_{k=1}^{N} k \ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k & \textit{(car } 0 \times 0 = 0 \times 1\textit{)} \\
 & = & \sum\limits_{k=0}^{N} k \ \left(\dfrac{1}{2}\right)^k & \\
 & \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} & \textit{(en appliquant la question 2 à } x = \tfrac{1}{2}\textit{)} \\
 & = & \dfrac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}} \ = \ 2 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } L_1 \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(L_1) = 2.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la première série dure en moyenne 2 lancers.}}$$

□

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

7. Déterminer les lois de N_1 et N_2.

Démonstration.

- La variable aléatoire N_1 prend pour valeur le nombre de séries apparues en 1 lancer.
  En 1 lancer, il apparaît exactement 1 série.

$$\boxed{\text{Ainsi } N_1(\Omega) = \{1\} \text{ et } N_1 \text{ est donc la variable aléatoire certaine égale à 1.}}$$

- La variable aléatoire N_2 prend pour valeur le nombre de séries apparues en 2 lancers.
  En 2 lancers, il peut apparaître :
  - × exactement 1 série. C'est le cas par exemple du 2-lancer (P, P).
  - × exactement 2 séries. C'est le cas par exemple du 2-lancer (P, F).

$$\boxed{\text{Ainsi } N_2(\Omega) = \{1, 2\}.}$$

De plus :

$$\begin{array}{ll} & \text{L'événément } \{N_2 = 1\} \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{Lors des 2 premiers lancers, 1 seule série apparaît} \\ \Leftrightarrow & \quad \text{Lors des 2 premiers lancers, on obtient une série de Pile} \\ & \texttt{OU} \ \text{lors des 2 premiers lancers, on obtient une série de Face} \\ \Leftrightarrow & \quad \text{Lors des 2 premiers lancers, on obtient deux Pile} \\ & \texttt{OU} \ \text{lors des 2 premiers lancers, on obtient deux Face} \\ \Leftrightarrow & \quad \text{L'événement } P_1 \cap P_2 \text{ est réalisé} \\ & \texttt{OU} \ \text{l'événement } F_1 \cap F_2 \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événément } \big(P_1 \cap P_2\big) \cup \big(F_1 \cap F_2\big) \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\{N_2 = 1\} = \big(P_1 \cap P_2\big) \cup \big(F_1 \cap F_2\big)}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big(\{N_2 = 1\}\big) & = & \mathbb{P}\left(\big(P_1 \cap P_2\big) \cup \big(F_1 \cap F_2\big)\right) & \\ & = & \mathbb{P}\big(P_1 \cap P_2\big) + \mathbb{P}\big(F_1 \cap F_2\big) & \textit{(par incompatibilité)} \\ & = & \mathbb{P}\big(P_1\big) \times \mathbb{P}\big(P_2\big) + \mathbb{P}\big(F_1\big) \times \mathbb{P}\big(F_2\big) & \\ & = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\{N_2 = 1\}\big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.}$$

De plus comme la famille $\big(\{N_2 = 1\}, \{N_2 = 2\}\big)$ est un système complet d'événements, alors :

$$\mathbb{P}\big(\{N_2 = 1\}\big) + \mathbb{P}\big(\{N_2 = 1\}\big) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement : } \mathbb{P}\big(\{N_2 = 2\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{N_2 = 1\}\big) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}. \\ \text{Autrement dit : } N_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket). \end{array}}$$

□

8. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

Démonstration.
Lors des n premiers lancers, il peut apparaître :
- $\times$ 1 seule série. C'est notamment réalisé par le n-lancer $(\text{Pile}, \dots, \text{Pile})$.
- $\times$ exactement 2 séries. C'est notamment réalisé par le n-lancer $(\text{Face}, \text{Pile}, \dots, \text{Pile})$.
- $\times$ exactement 3 séries. C'est notamment réalisé par le n-lancer $(\text{Pile}, \text{Face}, \text{Pile}, \dots, \text{Pile})$.
- $\times$ ...
- $\times$ exactement n séries. C'est le cas si le n-lancer est une alternance de Pile et de Face.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$
□

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.

9. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Justifier que l'on a l'égalité d'événements :

$$\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

puis en déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big)$$

Démonstration.
- Tout d'abord :

L'événement $\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues
ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile
ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

$\Leftrightarrow$ Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues et la dernière série n'apparaît pas lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer (sinon les lancers n et $n+1$ seraient différents)
ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile
ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

$\Leftrightarrow$ Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues et la dernière série débute lors d'un lancer de rang inférieur ou égal à n
ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile
ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

$\Leftrightarrow$ Lors des n premiers lancers, exactement k séries sont apparues
ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile
ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

$\Leftrightarrow$ L'événement $\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}.}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(P_{n+1} \mid \{N_n = k\} \cap P_n\big) \times \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) && \textit{(par définition de la probabilité conditionnelle)} \\
= \ & \mathbb{P}\big(P_{n+1}\big) \times \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) && \textit{(car les événements } \{N_n = k\} \cap P_n \textit{ et } P_{n+1} \textit{ sont indépendants puisque le } (n+1)^{\grave{e}me} \textit{ lancer est indépendant de tous les précédents)} \\
= \ & \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \ = \ \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big)}$$

□

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ les relations :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap F_n\big)$$

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap P_n\big)$$

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap F_n\big)$$

10. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$\Big(P_n \cap P_{n+1},\ F_n \cap F_{n+1},\ F_n \cap P_{n+1},\ P_n \cap F_{n+1}\Big)$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ la relation :

$$\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) + \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)$$

Commentaire

Dans l'énoncé, il est signalé que la famille $\Big(P_n \cap P_{n+1},\ F_n \cap F_{n+1},\ F_n \cap P_{n+1},\ P_n \cap F_{n+1}\Big)$ est un système complet d'événements. On peut le démontrer :

(i)

$$\begin{aligned}
& P_n \cap P_{n+1} \ \cup\ F_n \cap F_{n+1} \ \cup\ F_n \cap P_{n+1} \ \cup\ P_n \cap F_{n+1} \\
= \ & P_n \cap P_{n+1} \ \cup\ F_n \cap P_{n+1} \ \cup\ F_n \cap F_{n+1} \ \cup\ P_n \cap F_{n+1} && \textit{(par commutativité de } \cup\textit{)} \\
= \ & \Big(P_n \cap P_{n+1} \ \cup\ F_n \cap P_{n+1}\Big) \cup \Big(F_n \cap F_{n+1} \ \cup\ P_n \cap F_{n+1}\Big) && \textit{(par associativité)} \\
= \ & \Big(\big(P_n \cup F_n\big) \ \cap\ P_{n+1}\Big) \cup \Big(\big(F_n \cup P_n\big) \ \cap\ F_{n+1}\Big) && \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ sur } \cup\textit{)} \\
= \ & \Big(\Omega \ \cap\ P_{n+1}\Big) \cup \Big(\Omega \ \cap\ F_{n+1}\Big) \ = \ P_{n+1} \ \cup\ F_{n+1} \ = \ \Omega
\end{aligned}$$

(ii) Les événements de cette famille sont deux à deux incompatibles.
Traitons l'un des 6 cas (les autres se traitent de manière similaire) :

$$\big(P_n \cap P_{n+1}\big) \ \cap\ \big(F_n \cap P_{n+1}\big) \ = \ \big(P_n \cap F_n\big) \ \cap\ \big(P_{n+1} \cap P_{n+1}\big) \ = \ \varnothing \ \cap\ \big(P_{n+1} \cap P_{n+1}\big) \ = \ \varnothing$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- La famille $\Big(P_n \cap P_{n+1},\ F_n \cap F_{n+1},\ F_n \cap P_{n+1},\ P_n \cap F_{n+1}\Big)$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big) & = & \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}\big) \\
& + & \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1}\big) \\
& + & \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}\big) \\
& + & \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1}\big) \\
& = & \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) \\
& + & \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap F_n\big) \\
& + & \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap F_n\big) \\
& + & \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap P_n\big) \\
& = & \dfrac{1}{2}\, \Big(\mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) + \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap F_n\big)\Big) \\
& + & \dfrac{1}{2}\, \Big(\mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap P_n\big) + \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap F_n\big)\Big) \\
& = & \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) \ + \ \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)
\end{array}$$

- La dernière ligne est obtenue en remarquant que la famille (F_n, P_n) est un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap P_n\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\} \cap F_n\big)$$

  De même : $\mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap P_n\big) \ + \ \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\} \cap F_n\big)$.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) \ + \ \frac{1}{2}\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)}$$

Commentaire

- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-questions. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives et plus le sujet est difficile. Ainsi, un même thème peut amener à un traitement différent s'il est abordé dans un sujet de type `CCINP` ou de type `Centrale`.
- Dans les sujets, on distingue grossièrement trois types de questions :

(1) des questions abordables qui sont traitées par un grand nombre de candidats. Il peut s'agir de questions de cours ou de questions classiques (qui reviennent fréquemment aux concours).

(2) des questions plus difficiles qui permettent de bien classer les candidats. Celles-ci ont un rôle fort pour le classement des candidats car sont abordées avec plus ou moins de succès.

(3) des questions très difficiles qui ne sont bien traitées par presque aucun candidat.

Dans les sujets les plus abordables, on trouve essentiellement des questions de type ***1)*** et ***2)***. Dans les sujets de plus haut niveau, on trouve les trois types de questions, avec un pourcentage élevé de questions de type ***2)***. C'est d'ailleurs essentiellement sur ces questions que se font les différences et en aucun cas les questions de type ***3)***.

Commentaire

- Un sujet actuel comporte environ 40 questions. Pour finir un sujet, un candidat ne dispose donc que d'environ 6 minutes pour traiter chaque question. Il ne faut pas s'inquiéter pour autant car les barèmes permettent de rebattre les cartes. En effet, pour obtenir 20, il n'est pas obligatoire d'obtenir tous les points du sujet. Un candidat qui obtient 50% des points d'un sujet est assuré d'obtenir une très bonne note ($\geqslant 14$). Évidemment, ce constat doit être modulé en fonction des années et des épreuves. Lorsqu'un sujet est bien réussi en moyenne, le barème sera plus sévère dans le sens où il faudra cumuler beaucoup plus de points pour obtenir la même note que dans un sujet mal réussi en moyenne.
  Cette considération sur la taille des sujets et la distinction précédente permettent d'éclairer sur la stratégie à adopter lors des concours :
  - il est essentiel de savoir repérer la difficulté d'une question. Ce n'est pas chose aisée car cela requiert d'avoir du recul.
  - il est essentiel de savoir traiter la majorité des questions de type ***(1)***.
  - il est important de réussir à traiter correctement des questions de type ***(2)***. C'est sur le bon traitement de ces questions que se joue le classement.
  - pour les questions de type ***(3)*** (ou les questions de type ***(2)*** les plus difficiles), il faut garder en tête que plus une question est difficile, plus le correcteur est indulgent avec les candidats qui s'y aventurent. On peut donc aborder ces questions avec l'idée que tout ce qu'un candidat écrit de juste sera retenu en sa faveur (quelques points accordés). Mais tenter de traiter ces questions en entier est une perte de temps préjudiciable : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi.

  En résumé, il faut aborder en priorité les questions de type ***(1)*** et ***(2)*** et les traiter en entier. Il ne faut surtout pas abandonner une question que l'on sait tratiter. L'important est de maximiser le nombre de questions que l'on traite entièrement. En revanche, il ne faut pas hésiter à passer ou ne pas traiter en entier (on signalera alors au correcteur qu'on ne sait pas comment conclure) les questions les plus difficiles.
- Le début de question ***10*** ne présente pas de difficulté puisque l'énoncé donne la stratégie à suivre : il s'agit d'appliquer la formule des probabilités totales. Ne pas savoir traiter ce début de question démontre un défaut d'apprentissage du cours.

$\square$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}\big(\{N_m = k\}\big)x^k\,.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_1(x) = x\,.$$

11. Déduire de 10 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}\ G_n(x)\,.$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
G_{n+1}(x) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_{n+1} = k\}\big)\ x^k & \textit{(par définition)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ +\ \frac{1}{2}\ \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)\right)\ x^k & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^k\ +\ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)\ x^k & \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^k\ +\ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\big(\{N_n = k-1\}\big)\ x^k & \textit{(car } \mathbb{P}\big(\{N_n = n+1\}\big) = 0 \textit{ puisque } N_n(\Omega) = [\![1,n]\!]\textit{)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\ G_n(x)\ +\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^{k+1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\ G_n(x)\ +\ \frac{1}{2}\ x\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\ x^k & \textit{(car } \mathbb{P}\big(\{N_n = 0\}\big) = 0 \textit{ puisque } N_n(\Omega) = [\![1,n]\!]\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(x)\ =\ \frac{1}{2}\ G_n(x) + \frac{1}{2}\ x\ G_n(x)\ =\ \frac{1+x}{2}\ G_n(x).}$$

□

12. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x)\ =\ \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{n-1}\ x$.

- **Initialisation** :
  - × D'une part : $G_1(x) = x$.
  - × D'autre part : $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{1-1}\ x\ =\ x$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_{n+1}(x) = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^n x$).

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \frac{x+1}{2}\, G_n(x) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{x+1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1} x && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n} x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1} x.}$$

□

13. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de G_n', dérivée de la fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.

Démonstration.

- La fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.
  De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) \times k\, x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\, x^{k-1}$$

  En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big)\, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}\big(\{N_n = k\}\big) = \mathbb{E}(N_n)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N_n) = G_n'(1)}$$

- Déterminons alors G_n' à l'aide de l'expression obtenue dans la question précédente.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} G_1'(x) = 1 \\ \forall n \geqslant 2,\ G_n'(x) = (n-1)\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{n-2} \dfrac{1}{2} \times x + \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{n-1} \times 1 \end{cases}$$

  Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$G_n'(1) = (n-1)\left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{2} + \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

  Cette formule est aussi vérifiée pour $n = 1$ (en effet : $G_1'(1) = 1$ et $\frac{1+1}{2} = 1$).

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(N_n) = G_n'(1) = \frac{n+1}{2}.}$$

□

14. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***12*** :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-1} x \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x \ (x+1)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)^k \ (1)^{n-1-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^k
\end{aligned}$$

- Or, par définition : $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ x^k$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ x^k$$

L'égalité en tout point des fonctions $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ x^k$ et $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} x^k$ démontre que les polynômes $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} X^k$ et $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) \ X^k$ sont égaux.
Ils ont donc même coefficients.

$$\boxed{\text{Finalement, la loi de } N_n \text{ est donnée par : } \left\{\begin{array}{l} N_n(\Omega) = [\![1, n]\!] \\ \forall k \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}\big(\{X_n = k\}\big) = \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{array}\right.}$$

□

PROBLÈME B : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle - (`Centrale 2 2020 - PC`)

- Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
- Si la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.
- Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\bar{z}$ son conjugué.
- On appelle *sinus cardinal* la fonction définie, pour tout réel x, par $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

  On admet que cette fonction est continue et que, pour tout réel x, $|\mathrm{sinc}(x)| \leqslant 1$.
- On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles.
  Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de Z par :
$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\big(\mathrm{Re}(Z)\big) + i\,\mathbb{E}\big(\mathrm{Im}(Z)\big)$$
- On admettra les résultats suivants qui étendent aux variables aléatoires complexes les résultats analogues sur les variables aléatoires réelles.
  - Toute variable aléatoire Z complexe finie est d'espérance finie. Si $Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_r\}$, où les z_i sont deux à deux distincts, alors :
$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{r} z_k\,\mathbb{P}\big(\{Z = z_k\}\big)$$
  - *Théorème de transfert* (cas $X(\Omega)$ fini).
    Soit X une variable aléatoire réelle d'image finie $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
    Alors $f(X)$ est d'espérance finie et :
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}\big(\{X = x_k\}\big)\,f(x_k)$$
  - Soit Z une variable aléatoire complexe telle que $Z(\Omega)$ soit dénombrable égal à $\{z_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où les z_n sont deux à deux distincts. Alors Z est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 0} z_n\,\mathbb{P}\big(\{Z = z_n\}\big)$ converge absolument. Dans ce cas,
$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n\,\mathbb{P}\big(\{Z = z_n\}\big)$$
  - *Théorème de transfert* (cas $X(\Omega)$ dénombrable).
    Soit X une variable aléatoire réelle d'image dénombrable $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
    Alors $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)\,f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas,
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)\,f(x_n)$$

– Soit Z une variable aléatoire complexe et $\bar{Z} : \omega \in \Omega \mapsto \overline{Z(\omega)}$ sa variable aléatoire conjuguée.
Si Z est d'espérance finie, alors $\bar{Z}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(\bar{Z}\right) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$.

– Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes d'espérance finie et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors $Z_1 + Z_2$ et λZ_1 sont d'espérance finie et $\mathbb{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}(\lambda Z_1) = \lambda \mathbb{E}(Z_1)$.

I. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction ϕ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itX}\right)$$

I.A - Premières propriétés

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire réelle discrète.

1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}\big(\{X = x_k\}\big)$.
Montrer que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} a_k\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_k}$.

2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.
Montrer que ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ \mathrm{e}^{i\,t\,x_n}$.

3. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel t, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b.

5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction ϕ_X soit paire.

I.B - Trois exemples

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et on note $q = 1 - p$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \left(q + p\,\mathrm{e}^{it}\right)^n$.

7. Soit $p \in]0, 1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p ?

8. Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?

I.C - Image de ϕ_X

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont on note ϕ_X la fonction caractéristique. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b\,\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{a + b\,k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.

10. Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\,\mathbb{Z}$, alors $|\phi_X(t_0)| = 1$.

On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_X(t_0)| = 1$.
Dans la suite de cette sous-partie ***I.C***, on suppose de plus que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

11. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\Big(i\ \big(t_0\, x_n - t_0\, a\big)\Big) = 1$.

12. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\ \Big(1 - \cos(t_0\, x_n - t_0\, a)\Big) = 0$.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\ \mathbb{Z}$.

14. En déduire que $\mathbb{P}\big(\Big\{X \in a + \frac{2\pi}{t_0}\ \mathbb{Z}\Big\}\big) = 1$.

II. Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi.

II.A - Première méthode

Soit X une variable aléatoire réelle et discrète et $m \in \mathbb{R}$.
Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $V_m(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\ \mathrm{e}^{-imt}\ dt$.

II.A.1.

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

15. Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \sum\limits_{n=1}^{r} \operatorname{sinc}\Big(T(x_n - m)\Big)\ \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.

16. En déduire que $V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\big(\{X = m\}\big)$.

II.A.2.

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right)\ \mathbb{P}\big(\{X = x_n\}\big)$.

17. Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\dfrac{1}{T}\right)$.

18. Montrer que la fonction g_n se prolonge en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

19. Montrer que la fonction $G = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tilde{g_n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

20. Établir que $V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\big(\{X = m\}\big)$.

II.A.3. Application

21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\big(\{X = m\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Y = m\}\big)$, autrement dit que X et Y ont la même loi.