DS2

Exercice 1

Notations et définitions

- On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.
- On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \big(|u_n|\big)$.
- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes.
  a) **Homogénéité** : $\forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\,x \in E,\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda|\ N(x)$.
  b) **Propriété de séparation** : $\forall\,x \in E,\ N(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E$.
  c) **Inégalité triangulaire** : $\forall\,(x, y) \in E^2,\ N(\ x + y\ ) \leqslant N(x) + N(y)$.
- On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

Étude de l'application σ

1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞.

2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente. On note :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$$

3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire sur ℓ^∞.

4. Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0, 1]$.

5. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau_n = 0 \qquad ; \qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau'_n = 2$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0, 1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n(x) = \lfloor 3^n\,x \rfloor - 3\ \lfloor 3^{n-1}\,x \rfloor$$

6. Démontrer que $t(x) \in T$.

7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{3^n}$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{\begin{array}{ccc} T & \to & [0,1] \\ u & \mapsto & \sigma(u) \end{array}\right.$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée développement ternaire propre de x.

8. Écrire en langage **Python** une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel n et un flottant x et qui renvoie sous forme d'une liste les n premiers chiffres $t_1(x), \dots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x.

Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

Exercice 2

- Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1, +\infty[$.
- On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles.
  On note $\mathcal{E}_1 = \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs réelles.
- Lorsque V est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, on rappelle que $V^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et que si n est un entier naturel non nul, $V^n = \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n}$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et V un endomorphisme de E, on dit que F est stable par V si : $\forall f \in F,\ V(f) \in F$.
- Dans tout le problème, a désigne un **réel strictement positif**.
- Pour tout f de $\mathcal{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - ay + f = 0 \qquad \left(E_a^f\right)$$

  et on note $\mathscr{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur I.

Étude de l'équation $\left(E_a^f\right)$

1. Soient $f \in \mathcal{E}$ et $y \in \mathcal{E}_1$.
Montrer que y est solution de $\left(E_a^f\right)$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in I,\ y(x) = \mathrm{e}^{ax} \left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at}\ f(t)\ dt\right)$$

2. Prouver que s'il existe une solution de $\left(E_a^f\right)$ qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.

3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\ dt$ est convergente.

4. Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\ dt$ est l'unique solution de $\left(E_a^f\right)$ bornée sur I.

On définit ainsi une application U_a de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à toute fonction f de $\mathcal{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

Étude de quelques propriétés de U_a

5. Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.

6. Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

7. ***a)*** L'endomorphisme U_a est-il injectif ?
b) Montrer que pour tout f élément de $\mathcal{E}$, $U_a(f) \in \mathcal{E}_1$.
c) L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?

8. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que** $a = 1$.

a) Montrer que le sous-espace de $\mathcal{E}$: $F = \text{Vect}\,(\sin, \cos)$ est stable par U_1. En donner une base $\mathscr{B}$.

b) Écrire la matrice M de la restriction de U_1 à F dans cette base.

Une autre expression de $U_a(f)$

9. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathcal{E}$:

$$\forall x \in I,\ U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\ dt$$

Une autre famille de fonctions

10. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $g_k(x) = \mathrm{e}^{-x}\ x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.

Pour tout entier naturel p, on note $F_p = \text{Vect}\,(g_0, \ldots, g_p)$.

a) Donner une base $\mathscr{B}_p$ de F_p.

b) Vérifier que F_p est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par U_a.

c) Calculer le déterminant de l'endomorphisme induit par U_a sur F_p.

Positivité de U_a

11. Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathcal{E},\ |U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

12. Soit f dans $\mathcal{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

13. Soit f dans $\mathcal{E}$ décroissante. Prouver que : $a\,U_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

Commutation de U_a avec la dérivation

14. On note :

× $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et tels que f' est bornée sur I.

× D l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}$.

Soit $f \in \mathcal{H}$.

a) Montrer que l'on a : $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

b) En déduire que U_a et D commutent dans $\mathcal{H}$.

15. Soit $f \in \mathcal{E}$. Vérifier que pour tout entier naturel n, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-at}\ f(t)\ dt$$

On pourra procéder par intégration par parties.

Exercice 3

- Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.
- On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Pour tout élément f de $\mathscr{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\ dt$$

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\ dt = \int_0^T f(t)\ dt$.

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'.

Montrer que la réciproque est fausse.

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

- ***a)*** Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.
- ***b)*** Écrire la matrice de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$.
- ***c)*** L'endomorphisme U_n est-il bijectif ?

6. Justifier que, si f, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\mathrm{Ker}(U)$, alors :

- ***(i)*** $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0$.
- ***(ii)*** f est périodique de période 1.

7. A-t-on : $\mathrm{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0 \right\}$?

8. Donner explicitement une fonction f non nulle, élément de $\mathrm{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$.

- ***a)*** Déterminer $F_a = U(f_a)$.
- ***b)*** Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.