DS3

EXERCICE 1 : Endomorphisme cyclique

Présentation générale

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\big(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\big)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

- **1 pt :** $f(v) \ = \ \big(4 \times 1 - 2 \times 0,\ 1 + 0\big) \ = \ (4,\ 1)$
- **1 pt : la famille** $\big((1,0),(4,1)\big)$ **est (constituée de** 2 **vecteurs non colinéaires) et telle que :** $\mathrm{Card}\Big(\big(v, f(v)\big)\Big) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ **donc forme une base de** $\mathbb{R}^2$

2. Déterminer $E_2(f)$ et $E_3(f)$.

- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $u = (x, y) \in E_2(f) \iff x = y$
  - × **1 pt :** $E_2(f) \ = \ \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $u = (x, y) \in E_2(f) \iff x = 2\,y$
  - × **1 pt :** $E_2(f) \ = \ \mathrm{Vect}\left((2,1)\right)$

3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

- **1 pt :** `OUI`**, par exemple** $w = (1, 1)$ **vérifie** $f(w) = 2\,w$

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

- **1 pt :** $M^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- **1 pt : donc** $M^2 = M + 2\ I_3$ **et** $g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} = g^2$

5. ***a)*** Déterminer $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$.

- **2 pts :**
  - $\times$ **1 pt :** $u = (x, y, z) \in E_{-1}(g) \iff x = y - z$
  - $\times$ **1 pt :** $E_{-1}(g) = \text{Vect}\left((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\right)$
- **2 pts :**
  - $\times$ **1 pt :** $u = (x, y, z) \in E_2(g) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\,x \quad & = & -2\,z \\ y & = & -z \end{array} \right.$
  - $\times$ **1 pt :** $E_2(g) = \text{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$

b) Démontrer : $\mathbb{R}^3 = E_{-1}(g) \oplus E_2(g)$.

- **0 pt :** $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$ **et** $u_3 = (1, -1, 1)$
  $\mathcal{F}_{-1} = \big((1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big) = (u_1, u_2)$**,** $\mathcal{F}_2 = \big((1, -1, 1)\big) = (u_3)$
- **1 pt :** $\mathcal{F}_{-1}$ **est une base de** $E_{-1}(g)$ **et** $\mathcal{F}_2$ **est une base de** $E_2(g)$
- **1 pt :** $\dim\big(E_{-1}(g)\big) + \dim\big(E_2(g)\big) \; = \; 3 \; = \; \dim(\mathbb{R}^3)$
- **2 pts :** $E_{-1}(g) \cap E_2(g) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
  - $\times$ **1 pt : si** $v \in E_{-1}(g) \cap E_2(g)$ **alors** $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \; = \; v \; = \; \lambda_3 \cdot u_3$
  - $\times$ **1 pt : liberté (à démontrer) de la famille** (u_1, u_2, u_3)

6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

- **1 pt : soit** $w \in \mathbb{R}^3$ **alors** $w = w_1 + w_2$ **avec** $w_1 \in E_{-1}(g)$ **et** $w_2 \in E_2(g)$
- **1 pt :** $g(w) = -w_1 + 2\,w_2$**,** $g^2(w) = w_1 + 4\,w_2$
- **1 pt :** $2 \cdot w + 1 \cdot g(w) + (-1) \cdot g^2(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$ **donc** g **n'est pas cyclique**

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt :** Δ **est linéaire**
- **1 pt :** $\deg\left(\Delta(P)\right) \; = \; \deg\left(P(X+1) - P(X)\right) \; \leqslant \; \max\Big(\deg\left(P(X+1)\right), \deg\left(P(X)\right)\Big) \; \leqslant \; n$

8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

- **1 pt :** $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \left(\sum\limits_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} \; X^p + \cancel{\binom{k}{k} \; X^k} \right) - \cancel{X^k}$

9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

- **1 pt :** $\Delta(P)(X) = \sum\limits_{k=0}^{r} \left(\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_k \; \binom{k}{p} \; X^p \right)$
- **1 pt :** $= \sum\limits_{k=0}^{r} \left(\sum\limits_{p=0}^{k-1} a_k \; \binom{k}{p} \; X^p \right) = \sum\limits_{0 \leqslant p < k \leqslant r} a_k \; \binom{k}{p} \; X^p = \sum\limits_{p=0}^{r-1} \left(\sum\limits_{k=p+1}^{r} a_k \; \binom{k}{p} \; X^p \right) = \sum\limits_{p=0}^{r-1} \left(\sum\limits_{k=p+1}^{r} a_k \; \binom{k}{p} \right)$
- **1 pt :** $b_{r-1} \; = \; \sum\limits_{k=(r-\cancel{1})+\cancel{1}}^{r} \binom{k}{r-1} \; a_k \; = \; \sum\limits_{k=r}^{r} \binom{k}{r-1} \; a_k \; = \; \binom{r}{r-1} \; a_r \; = \; r\,a_r$

10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

- **1 pt : notons** $Q(X) = X^n$
- **1 pt :** $\forall k \in [\![0, n]\!], \ \deg\left(\Delta^k(P)\right) \ = \ \deg(P) - k \ = \ n - k$
- **1 pt : la famille** $\left(Q, \Delta(Q), \ldots, \Delta^n(Q)\right)$ **est libre et de bon cardinal**

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose également qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que :

× d'une part : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $v_k \neq 0_E$,

× d'autre part, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que : $h(v_k) = \lambda_k \cdot v_k$.

Soit $v \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p \cdot v_n$$

- **1 pt :**

12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

- **1 pt :**

13. On suppose dans cette question que les nombres complexes λ_1, ..., λ_n sont deux à deux distincts.
Démontrer que l'endomorphisme h est cyclique.
Indication : on pourra considérer le vecteur $v = v_1 + \cdots + v_n$.

- **1 pt :**

EXERCICE 2 : Un jeu de société

Présentation générale

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Que modélisent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

- **1 pt :** X_n **modélise le nombre de cases franchies par le pion au** $n^{\text{ème}}$ **tour**
- **1 pt :** S_n **modélise le nombre de cases franchies par le pion depuis le début du jeu**

15. Que représente la variable aléatoire T ?

- **1 pt :** T **prend pour valeur le rang de victoire pour le joueur (et** 0 **si le joueur ne remporte jamais la partie)**

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$.

16. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

Récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, **f est $\mathscr{C}^k$ sur $]-1,1[$ et vérifie :** $\forall x \in]-1,1[$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $h_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h_n : x \mapsto x^n$.
En admettant qu'on peut dériver successivement terme à terme la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n$, démontrer :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

- **1 pt :** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} = f(x)$
- **1 pt :** $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n\right)^{(p)}(x) = \cancel{\sum\limits_{n=0}^{p-1} h_n{}^{(p)}(x)} + \sum\limits_{n=p}^{+\infty} h_n{}^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} n\,(n-1)\,\ldots\,\big(n-(p-1)\big)\; x^{n-p}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{x^p} \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!}\; x^n$ **et donc** $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}\; x^n = \dfrac{1}{p!}\; x^p\; f^{(p)}(x) = \dfrac{x^p}{(1-x)^p}$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

- **1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$
- **1 pt : l'expérience consiste en une succession de n épreuves de Bernoulli (génération aléatoire d'un 0 ou d'un 1) indépedantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{2}$ (en considérant qu'il y a succès si le nombre généré vaut 1)**
- **1 pt : S_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience (S_n prend pour valeur le nombre de cases dont le pion est avancé depuis le début de partie)**

19. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

- **2 pts :** $T(\Omega) = \{0\} \ \cup \ [\![A, +\infty[\![$

20. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $\{T = k\}$ en fonction des évènements $\{S_{k-1} = A-1\}$ et $\{X_k = 1\}$. En déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{T = k\}\big) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

- **1 pt :** $\forall k \geqslant A$, $\{T = k\} = \{S_{k-1} = A-1\} \cap \{X_k = 1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\ \{T = k\}\ \big) = \mathbb{P}\left(\{S_{k-1} = A-1\} \cap \{X_k = 1\}\right) = \mathbb{P}\big(\{S_{k-1} = A-1\}\big) \times \mathbb{P}\big(\{X_k = 1\}\big)$ **par le lemme des coalitions (doit être mentionné)**
- **1 pt : calcul** $\forall k \geqslant A$, $\mathbb{P}\big(\ \{T = k\}\ \big) = \dbinom{k-1}{A-1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

21. Calculer $\mathbb{P}\big(\{T=0\}\big)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{T=0\}\big)+\sum\limits_{k=A}^{+\infty}\mathbb{P}\big(\{T=k\}\big) \ = \ 1$ **car** $\Big(\{T=k\}\Big)_{k\in\{0\}\ \cup\ [\![A,+\infty[\![}$ **est un SCE**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{T=0\}\big)=1-\sum\limits_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1-\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^A}=1-\frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{A-1}\,2^A=0$

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant A}\mathbb{P}\big(\{T=k\}\big)x^k$ sur son intervalle de convergence.

22. `(5/2 UNIQUEMENT)`
Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant A}\mathbb{P}\big(\{T=k\}\big)x^k$ et démontrer :

$$\forall x\in\,]-R_T,R_T[,\quad G_T(x)=\left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

23. `(5/2 UNIQUEMENT)`
En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A\leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_n\leqslant k\}\big)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2,\quad \sum_{\ell=0}^{k}\binom{n+k-\ell}{n} \ = \ \binom{n+1+k}{n+1}$$

24. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
En considérant le système complet d'évènements $\Big(\{X_{n+1}=0\},\ldots,\{X_{n+1}=M-1\}\Big)$, démontrer :

$$\forall k\in[\![0,A-1]\!],\quad \mathbb{P}\big(\{S_{n+1}\leqslant k\}\big)=\frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k}\mathbb{P}\big(\{S_n\leqslant k-\ell\}\big)$$

- **1 pt : FPT** $\mathbb{P}\big(\ \{S_{n+1}\leqslant k\}\ \big)=\sum\limits_{j=0}^{M-1}\mathbb{P}\big(\ \{S_{n+1}\leqslant k\}\cap\{X_{n+1}=j\}\ \big)$

$=\sum\limits_{j=0}^{M-1}\mathbb{P}\big(\ \{S_n+j\leqslant k\}\cap\{X_{n+1}=j\}\ \big)$

- **1 pt :** $=\cancel{\sum\limits_{\substack{j=0\\k-j<0}}^{M-1}\mathbb{P}\big(\ \{S_n\leqslant k-j\}\cap\{X_{n+1}=j\}\ \big)}+\sum\limits_{\substack{j=0\\k-j\geqslant 0}}^{M-1}\mathbb{P}\big(\ \{S_n\leqslant k-j\}\cap\{X_{n+1}=j\}\ \big)$

$=\sum\limits_{j=0}^{k}\mathbb{P}\big(\ \{S_n\leqslant k-j\}\cap\{X_{n+1}=j\}\ \big)$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\ \{S_{n+1}\leqslant k\}\ \big)=\sum\limits_{j=0}^{k}\mathbb{P}\big(\ \{S_n\leqslant k-j\}\ \big)\times\frac{1}{M}$

25. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M^n}\binom{n+k}{n}$$

- **1 pt : (I)** $\mathbb{P}\big(\{S_1 \leqslant k\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X_1 \leqslant k\}\big) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{k} \{X_1 = j\}\right) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{X_1 = j\}\big) = \frac{k+1}{M}$
- **1 pt : (H)** $\mathbb{P}\big(\{S_{n+1} \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-\ell\}\big) = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant j\}\big) = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{M^n}\binom{n+j}{n}$
- **1 pt : (H)** $= \frac{1}{M^{n+1}}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n+(k-\ell)}{n} = \frac{1}{M^{n+1}}\binom{n+1+k}{n+1}$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

26. **Un résultat préliminaire**
Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\big(\{Z > n\}\big)$ converge.

a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z > j-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big)$$

- **1 pt :** $\{Z > j-1\} = \{Z \geqslant j\} = \{Z = j\} \cup \{Z > j\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\{Z > j-1\}) = \mathbb{P}(\{Z > j\} \ \cup \ \{Z = j\}) = \mathbb{P}(\{Z > j\}) + \mathbb{P}(\{Z = j\})$

b) Soit p un entier naturel non nul. Démontrer :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big) - p\,\mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big)$$

- **1 pt :** $\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z = j\}) = \sum_{j=1}^{p}\Big(j\ \mathbb{P}(\{Z > j-1\}) - j\ \mathbb{P}(\{Z > j\})\Big) = \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z > j-1\}) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z > j\})$
- **1 pt :** $0\times\mathbb{P}(\{Z > j\}) + \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}(\{Z > j\})} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z > j\}) - \left(\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}(\{Z > j\}} + p\ \mathbb{P}(\{Z > p\})\right)$

c) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big)$$

- **1 pt :** $v_{p+1} - v_p \ = \ \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big) \ = \ \mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big) \geqslant 0$

d) Comparer $\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z > j\}\big)$.

- **1 pt :** $\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}(\{Z = j\}) \ = \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z > j\}) - p\ \mathbb{P}(\{Z > p\}) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(\{Z > j\}) = v_p$
- **1 pt :** $\leqslant \ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{Z > j\})$ **car la série** $\sum \mathbb{P}(\{Z > n\})$ **est convergente**

e) En déduire que Z admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z > n\}\big)$$

- **1 pt : la suite** $\left(\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}\big(\{Z = j\}\big)\right)_{j \in \mathbb{N}^*}$ **est croissante / majorée donc** $\sum n\ \mathbb{P}\big(\{Z = n\}\big)$ **CV**
- **3 pts :** $\lim\limits_{p \to +\infty} p\ \mathbb{P}(\{Z > p\}) = 0$
  - × **1 pt :** $\{Z > p\} = \bigcup\limits_{k=p+1}^{+\infty} \{Z = k\}$ **donc** $p\ \mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big) = \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\ \mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big)$
  - × **1 pt :** $p\ \mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big) = \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\ \mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big) \leqslant \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big)$
  - × **1 pt : théorème d'encadrement avec** $0 \leqslant p\ \mathbb{P}\big(\{Z > p\}\big) \leqslant \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}\big(\{Z = k\}\big)$

27. Que peut-on dire des évènements $\{T > n\}$ et $\{S_n < A\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

- **1 pt :** $\{S_n < A\} = \{T > n\} \cup \{T = 0\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) = \mathbb{P}\big(\{S_n < A\}\big) = \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant A - 1\}\big) = \dfrac{1}{M^n} \dbinom{n + A - 1}{A - 1}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=0}^{N} \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) = \sum\limits_{n=0}^{N} \dbinom{n + A - 1}{A - 1} \left(\dfrac{1}{M}\right)^n = M^{A-1} \sum\limits_{n=A-1}^{N+A-1} \dbinom{n}{A - 1} \left(\dfrac{1}{M}\right)^n$
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{T > n\}\big) = \dfrac{M^A}{(M - 1)^A}$ **par la question *17* en** $p = A - 1$ **et** $x = \frac{1}{M}$

EXERCICE 3 : Une suite de fonctions - 10 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1}\ \mathrm{e}^{-n\,x^2} \cos\left(\sqrt{n}\,x\right)$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

- **1 pt :** $f_n(0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$
- **1 pt : si** $x_0 > 0$**,** $0 \leqslant |\,f_n(x_0)\,| \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}\ \mathbf{e}^{-n\,x_0{}^2}$ **et** $\lim\limits_{n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} f_n(x_0) = 0$
- **1 pt :** (f_n) **converge simplement sur** $[0, +\infty[$ **vers la fonction :** $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x > 0 \end{cases}$

2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

- **1 pt : méthode annoncée clairement (« on procède par l'absurde - on suppose ... »)**
- **1 pt : la limite uniforme de la suite (f_n) devrait être continue car les fonctions de la suite le sont**

3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

- **1 pt :** $\forall x \in [a, +\infty[,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}\ \mathbf{e}^{-n\,x^2} \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}\ \mathbf{e}^{-n\,a^2}$

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $\ 0 \ \leqslant \ \|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} \ \leqslant \ \dfrac{n+2}{n+1} \ \mathbf{e}^{-a^2 n}$
- **1 pt : conclusion par théorème d'encadrement**

4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

- **1 pt : on considère la suite de tg** $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$**. Alors :** $|\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| = \dfrac{n+2}{n+1} \times \mathbf{e}^{-1} \times \cos(1)$
- **1 pt :** $|\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| \ \leqslant \ \|f_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[}$**.**
  Par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} \ \geqslant \ \lim\limits_{n\to+\infty} |\, f_n(x_n) - f(x_n)\,| \ = \ \mathbf{e}^{-1} \ \cos(1) \ > \ 0$