

DS4

Exercice 1 - (CCINP 2014 MP1)

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \quad (\text{transformation d'Abel})$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) && (\text{car pour tout } k \geq 1, \\ &&& b_k = B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} && (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} && (\text{car } B_0 = \sum_{k=0}^0 b_k = b_0) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n \right) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k && (\text{par décalage d'indice}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Commentaire

- Pour pouvoir utiliser une propriété, il faut s'assurer qu'on est dans le cadre d'utilisation de cette propriété. Cette remarque apparaît évidente et pourtant l'absence de vérification des conditions d'utilisation est certainement l'une des erreurs les plus fréquentes aux concours. Cela peut avoir des conséquences fâcheuses car certaines questions ne consistent qu'à demander au candidat de vérifier que ces conditions sont bien remplies.
- Dans cette question :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k \quad \neq \quad \sum_{k=0}^n a_k (B_k - B_{k-1})$$

En effet, l'égalité : $b_k = B_k - B_{k-1}$ n'est vérifiée que sous la condition $k \geq 1$.
On ne peut donc l'appliquer ... que si $k \geq 1$! □

2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) &= a_0 - a_{n+1} && \text{(par sommation télescopique)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_0 && \text{(car } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0) \end{aligned}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) \right)$ est convergente.

On en déduit que la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ est convergente. □

b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Démonstration.

• Par hypothèse la suite (B_n) est bornée. Autrement dit, il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, |B_i| \leq M \tag{*}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons tout d'abord que d'après la question 1 :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Démontrons la convergence des deux termes de cette somme.

× La suite $(a_n B_n)$ est le produit :

- de la suite (B_n) bornée,
- de la suite (a_n) de limite nulle.

On en déduit qu'elle est convergente de limite nulle.

× Par ailleurs :

- $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| |B_k| \leq M |a_k - a_{k+1}| = M (a_k - a_{k+1})$
(la dernière égalité est obtenue car la suite (a_n) est décroissante)
- La série $\sum (a_k - a_{k+1})$ est convergente d'après la question précédente.

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ est (absolument) convergente. Autrement dit, la suite $\left(\sum_{k=0}^m (a_k - a_{k+1}) B_k \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Finalement, la suite $\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ apparaît comme somme de deux suites convergentes. Elle est donc convergente. Autrement dit, la série $\sum a_n b_n$ est convergente. □

- c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème des séries alternées.

<ul style="list-style-type: none"> • $\sum u_n$ est une série alternée (s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n a_n$ où (a_n) de signe constant) • (a_n) est décroissante, • $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. 	}	\Rightarrow La série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente
--	---	---

- Afin de pouvoir utiliser le résultat de la question 2.b), il faut vérifier que la suite (B_n) est bornée. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$$

On est donc dans le cadre d'application de la question 2.b).

Ainsi, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est précisé qu'il faut appliquer le résultat de la question 2.b) dans le cas d'une suite (b_n) de terme général $b_n = (-1)^n$. Il n'y a donc aucune initiative à prendre et il faut absolument traiter ce type de questions où la méthodologie à utiliser est entièrement décrite. Le concepteur vous offre des points, il faut les prendre !
- Il y a un sous-entendu dans la question, à savoir que la série $\sum (-1)^n a_n$ est bien une série alternée. Pour que ce soit le cas, il faut que la suite (a_n) soit de signe constant. Démonstrons-le. La suite (a_n) est décroissante et de limite nulle. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$$

Ainsi, la suite (a_n) est positive. La série $\sum (-1)^n a_n$ est donc bien une série alternée. □

3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.

Démonstration.

Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq 2k\pi$. On en déduit que $e^{i\theta} \neq 1$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} &= \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k \\ &= \frac{(e^{i\theta})^1 - (e^{i\theta})^{n+1}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= e^{i\theta} \times \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{\cancel{e^{i\frac{n\theta}{2}}} - e^{-i\frac{n\theta}{2}}}{\cancel{e^{i\frac{\theta}{2}}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\theta} \times \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}} - e^{-i\frac{n\theta}{2}}}{2i} \times \frac{2i}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \times \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \times \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Commentaire

Il n'était a priori pas nécessaire d'obtenir une expression simplifiée. On peut donc penser que la totalité (ou presque) des points est attribuée si le candidat est capable d'écrire correctement la formule de la somme des termes d'une suite géométrique sous l'hypothèse que la raison est différente de 1. □

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Démonstration.

Remarquons tout d'abord :

$$\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{|e^{in\theta}|}{|n^\alpha|} = \frac{1}{n^\alpha}$$

Trois cas se présentent.

• Si $\alpha \leq 0$ alors :

$$\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, on conclut : $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est donc (grossièrement) divergente.

- Si $\alpha > 1$:

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$.

On en conclut que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est (absolument) convergente.

- Si $\alpha \in]0, 1]$:

Démontrons que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha} e^{in\theta}$ vérifie les conditions d'application de la question **2.b**).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ et $b_n = e^{i(n+1)\theta}$.

La suite (a_n) :

- × une suite de réels,
- × est décroissante et de limite nulle (car $\alpha > 0$),

La suite (b_n) :

- × une suite de complexes,
- × est telle que la suite (B_n) est bornée. Démontrons ce point.

D'après la question **3.a**), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^n b_k \\ &= \sum_{k=0}^n e^{i(k+1)\theta} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} e^{ik\theta} \\ &= e^{i\frac{n+2}{2}\theta} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |B_n| &= \left| e^{i\frac{n+2}{2}\theta} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| \\ &= \left| e^{i\frac{n+2}{2}\theta} \right| \times \left| \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right| \\ &= \frac{\left| \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|} \quad (\text{car } \left| e^{i\frac{n+2}{2}\theta} \right| = 1) \\ &\leq \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|} \quad (\text{car } \left| \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \right| \leq 1) \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant le résultat de la question **2.b**), la série $\sum a_n b_n$, c'est-à-dire la série $\sum \frac{1}{(n+1)^\alpha} e^{i(n+1)\theta}$ (ou encore la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$) est convergente.

Finalement, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

□

4. Soit la série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de \mathbb{R} .

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x , $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démonstration.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors :

$$u_n(x_0) = \frac{\sin(nx_0)}{\sqrt{n}} = 0$$

Comme la série $\sum 0$ est convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $2\pi\mathbb{Z}$.

- Si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\begin{aligned} z_n &: x \mapsto \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}} \\ &\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ainsi : $u_n = \operatorname{Im}(z_n)$)

D'après la question précédente, la série $\sum z_n(x_0)$ (cas $\alpha = \frac{1}{2} > 0$).

Autrement dit, la série de fonctions $\sum z_n$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Cela démontre que la série de fonctions $\sum \operatorname{Im}(z_n)$ (c'est-à-dire la série de fonctions $\sum u_n$) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Finalement, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . □

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de \mathbb{C} et à valeurs dans \mathbb{C} .

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n : $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée).

a) Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions

$$\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k \text{ converge normalement sur } A.$$

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord la convergence simple de la suite de fonctions $(a_n F_n)$.

Soit $z_0 \in A$.

$$|(a_n F_n)(z_0)| = |a_n F_n(z_0)| = |a_n| \times |F_n(z_0)| \leq M |a_n|$$

Ainsi : $0 \leq |(a_n F_n)(z_0)| \leq M |a_n|$. Or :

$$\times 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\times M |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $\left(|(a_n F_n)(z_0)| \right)$ est convergente de limite nulle. Il en est de même de la suite $\left((a_n F_n)(z_0) \right)$.

La suite de fonctions $(a_n F_n)$ converge simplement sur A vers la fonction nulle $h : z \mapsto 0$.

- Démontrons maintenant que la suite de fonctions $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A vers h . Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall z \in A, |a_n F_n(z) - h(z)| &= |a_n F_n(z) - 0| \\ &= |a_n| |F_n(z)| \\ &\leq |a_n| M \quad \text{(car la suite } (F_n) \text{ est} \\ &\quad \text{uniformément bornée)} \end{aligned}$$

Finalemment :

$$\forall z \in A, |a_n F_n(z) - h(z)| \leq M |a_n|$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_n F_n - h$ est bornée et :
 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|a_n F_n - h\|_{\infty, A} \leq M |a_n|$

- Or :

$$\begin{aligned} &\times 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \\ &\times M |a_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $\|a_n F_n - h\|_{\infty, A} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

La suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

- Démontrons maintenant que la série de fonctions $\sum (a_n - a_{n+1}) F_n$ converge normalement sur A . Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall z \in A, |(a_n - a_{n+1}) F_n(z)| &= |a_n - a_{n+1}| |F_n(z)| \\ &= (a_n - a_{n+1}) |F_n(z)| \quad \text{(car la suite } (a_n) \text{ est} \\ &\quad \text{décroissante)} \\ &\leq M (a_n - a_{n+1}) \quad \text{(car la suite } (F_n) \text{ est} \\ &\quad \text{uniformément bornée)} \end{aligned}$$

Finalemment :

$$\forall z \in A, |(a_n - a_{n+1}) F_n(z)| \leq M (a_n - a_{n+1})$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $(a_n - a_{n+1}) F_n$ est bornée et :
 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|(a_n - a_{n+1}) F_n\|_{\infty, A} \leq M (a_n - a_{n+1})$

- $\times \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|(a_n - a_{n+1}) F_n\|_{\infty, A} \leq M (a_n - a_{n+1})$
- \times La série $\sum (a_n - a_{n+1})$ est convergente d'après la question **2.a**) (on est bien dans le cadre d'application car la suite (a_n) est décroissante de limite nulle).

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \|(a_n - a_{n+1}) F_n\|_{\infty, A}$ converge.

La série $\sum (a_n - a_{n+1}) F_n$ converge normalement sur A .

Commentaire

- Il faut bien faire attention aux objets présents dans cette question :
 - × la suite (a_n) est une suite **numérique** de réels. Ce n'est pas une suite de fonctions.
 - × la suite (F_n) est une suite de fonctions.

En outre, on demandait de démontrer la convergence uniforme d'une **suite** de fonctions puis de démontrer la convergence normale d'une **séries** de fonctions (rappelons que la notion de convergence normale n'est définie que pour une série de fonctions).

- Dans le cadre du programme PSI, on se limite à des fonctions complexes de la variable réelle. Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est une fonction de la variable complexe. On sort donc du cadre du programme actuel.
- D'ailleurs, la question **6.** qui illustre cette question **5.** traite de suites de fonctions de la variable **réelle** et à valeurs réelles. Il n'y avait donc pas d'intérêt, pour résoudre les questions sélectionnées dans ce devoir, de travailler en toute généralité. Cela étant dit, il est toujours intéressant de connaître le résultat le plus général et faire l'étude avec des fonctions complexes de la variable complexe n'ajoute pas de difficulté insurmontable. □

b) À l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A .

Démonstration.

- Par transformation d'Abel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall z \in A, \sum_{k=0}^n a_k f_k(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k(z) + a_n F_n(z)$$

Cela se traduit par l'égalité de fonctions ci-dessous :

$$\sum_{k=0}^n a_k f_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k + a_n F_n$$

- D'après la question précédente :
 - × la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A (vers la fonction h).
 - × la série $\sum (a_n - a_{n+1}) F_n$ converge normalement donc uniformément sur A . On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) F_k \right)$ et la suite extraite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k \right)$ converge uniformément sur A (vers la fonction $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) F_k$).

La suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^n a_k f_k \right)$ s'écrit comme somme de deux suites de fonctions qui convergent uniformément sur A . Elle converge donc uniformément sur A (vers la fonction $h + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) F_k$).

Finalement, la série de fonctions $\sum (a_n - a_{n+1}) F_n$ converge uniformément sur A . □

6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul : $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1 - e^{ix} &= e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \right) \\ &= -e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} \times 2i \\ &= -e^{i\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times 2i \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{ix} = -2i e^{i\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

□

b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$. En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Démonstration.

Soit $a \in]0, \pi[$.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$$

Il s'agit alors d'appliquer le résultat de la question 5. en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- × $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
- × $f_n : x \mapsto \sin((n+1)x)$.
- × $A = [a, 2\pi - a] \subset \mathbb{C}$.
- × La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est bien décroissante et de limite nulle.
- × Démontrons que la suite (F_n) est uniformément bornée.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [a, 2\pi - a]$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^n f_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \sin((k+1)x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{Im}\left(e^{ikx}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n+1} e^{ikx}\right) && \text{(par linéarité de la partie imaginaire)} \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{n+2}{2}x} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) && \text{(comme en question 3.b) avec } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 |F_n(x)| &= \left| \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{n+2}{2} x} \times \frac{\sin \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \right) \right| \\
 &= \left| e^{i \frac{n+2}{2} x} \times \frac{\sin \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} \right| \\
 &\leq \frac{1}{\left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|} && \text{(comme en question 3.b)} \\
 &= \frac{1}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} && \text{(car la fonction sin est positive sur } [0, \pi])
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $x \in [a, 2\pi - a]$ alors :

$$\begin{aligned}
 a &\leq x \leq 2\pi - a \\
 \text{donc } \frac{a}{2} &\leq \frac{x}{2} \leq \pi - \frac{a}{2} \\
 \text{donc } \sin \left(\frac{a}{2} \right) &\leq \sin \left(\frac{x}{2} \right) && \text{(car sur } [\frac{a}{2}, \pi - \frac{a}{2}], \text{ la fonction sin admet pour minimum } \sin \left(\frac{a}{2} \right), \text{ atteint en } \frac{a}{2} \text{ et } \pi - \frac{a}{2}) \\
 \text{donc } \frac{1}{\sin \left(\frac{a}{2} \right)} &\geq \frac{1}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} && \text{(car la fonction inverse est décroissante }]0, +\infty[)
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, 2\pi - a], |F_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \left(\frac{a}{2} \right)}$$

Cela démontre que la suite de fonctions (F_n) est uniformément bornée.

Ainsi, pour tout $a \in]0, \pi[$, le résultat de la question 5. permet de conclure que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n f_n$ (c'est-à-dire la série $\sum_{n \geq 1} u_n$) converge uniformément sur $[a, 2\pi - a]$.

• Comme :

- × pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $[a, 2\pi - a]$ (puisque la fonction sin l'est),
- × la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, 2\pi - a]$,

on en conclut que la fonction $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[a, 2\pi - a]$ et ce pour tout $a \in]0, \pi[$.

Démontrons alors que la fonction U est continue en tout point $x_0 \in]0, 2\pi[$.

Notons $a = \min \left(\frac{x_0}{2}, \frac{2\pi - x_0}{2} \right) = \begin{cases} \frac{x_0}{2} & \text{si } x_0 \in [0, \pi] \\ \pi - \frac{x_0}{2} & \text{si } x_0 \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$. Alors :

$$a < x_0 < 2\pi - a$$

et comme la fonction U est continue sur $[a, 2\pi - a]$, elle l'est notamment en x_0 .

Ainsi, la fonction U est continue sur $]0, 2\pi[$.

Commentaire

- Dans le programme actuel, le théorème qui assure la continuité d'une fonction somme d'une série qui converge uniformément, il est spécifié que l'on peut démontrer la convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle d'étude ou même sur tout intervalle adapté au problème. Dans cette question, c'est le 2^{ème} choix qui est fait : on démontre la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$.
- On a fait le choix dans cette question d'expliquer pourquoi travailler sur tout intervalle adapté au problème permet de conclure quant à la continuité sur l'intervalle en entier. Il faut savoir faire ce type de raisonnement car un examinateur peut le réclamer lors d'un oral. À l'écrit, au vu du programme officiel, on peut penser qu'écrire :
 - × pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$,
 - × la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$ (intervalle adapté au problème),
 doit suffire à récupérer tous les points.
- Il était aussi possible de signaler que la fonction U étant continue sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$, elle l'est aussi sur $\bigcup_{k=1}^{+\infty} [\frac{1}{k}, 2\pi - \frac{1}{k}] =]0, 2\pi[$. □

c) Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel

$$\text{non nul, } v_n(x) = \frac{\sin(nx) \sin(px)}{\sqrt{n}}.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel p , la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi[$.

On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration : $\forall x \in [0, \pi], \frac{x}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Démonstration.

- On raisonne comme dans la question précédente. Il s'agit alors d'appliquer le résultat de la question 5. en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\times a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\times f_n : x \mapsto \sin((n+1)x) \sin(px).$$

$$\times A = [0, \pi[\subset \mathbb{C}.$$

- × La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est bien décroissante et de limite nulle.

× Il reste à démontrer que la suite (F_n) est uniformément bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in]0, \pi[$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^n f_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \sin((k+1)x) \sin(px) \\ &= \sin(px) \sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) \\ &= \sin(px) \times \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{n+2}{2} x} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \quad (\text{comme en question précédente avec } x \notin 2\pi \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(c'est pour ce point qu'on a supposé $x \in]0, \pi[$ et pas $x \in [0, \pi[$)

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 |F_n(x)| &= |\sin(px)| \times \left| \operatorname{Im} \left(e^{i \frac{n+2}{2} x} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \right| \\
 &\leq \frac{|\sin(px)|}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} && \text{(comme dans la question précédente)} \\
 &\leq \frac{|px|}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} && \text{(car pour tout } t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| \leq |t|) \\
 &\leq p x \times \frac{\pi}{x} && \text{(par décroissance de la fonction inverse sur } [0, +\infty[\text{ et car } \sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq \frac{x}{\pi})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, \pi], |F_n(x)| \leq p\pi}$$

Cette inégalité est aussi vérifiée en 0 car :

$$F_n(0) = \sum_{k=0}^n \sin(0) \times \sin(0) = 0 \leq p\pi$$

La suite (F_n) est donc uniformément bornée sur $[0, \pi]$.

Ainsi, le résultat de la question 5. permet de conclure que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} a_n f_n$ (c'est-à-dire la série $\sum_{n \geq 1} v_n$) converge uniformément sur $[0, \pi]$. □

Sujet A

Exercice 2 - (CCINP 2020 PC)

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et de calculer sa valeur.

On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, u(x, t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

7. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

Dans toute la suite :

× pour tout $x \in [0, +\infty[$, on note : $\underline{f}_x : t \mapsto f(x, t)$.

× pour tout $t \in]0, +\infty[$, on note : $\underline{f}_t : x \mapsto f(x, t)$.

Soit $x_0 > 0$.

- La fonction $\underline{f}_{x_0} : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-x_0 t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ par produit de fonctions qui le sont.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \underline{f}_{x_0}(t) dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

- Comme $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$ alors :

$$\underline{f}_{x_0}(t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-x_0 t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} e^0 = 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \underline{f}_{x_0}(t) dt$ est faussement impropre en 0.

- $\forall t \in]0, +\infty[, |\underline{f}_{x_0}(t)| = \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-x_0 t} \right| = \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| |e^{-x_0 t}| = \frac{|\sin(t)|}{t} e^{-x_0 t} \leq e^{-x_0 t}$
(car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$)

× L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x_0 t} dt$ est convergente car $x_0 > 0$.

Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \underline{f}_{x_0}(t) dt$ est absolument convergente.

Pour tout $x_0 > 0$, la fonction \underline{f}_{x_0} est bien intégrable sur $]0, +\infty[$.

Commentaire

- On a renommé en début de question x_0 la variable x introduite dans l'énoncé. Ce choix se veut pédagogique et a pour objectif de différencier plus facilement la variable x_0 de la variable t .
- De la même manière, on a introduit les notations \underline{f}_x et \underline{f}_t dans l'espoir que cela permette de différencier plus facilement les fonctions :

$$(x, t) \mapsto f(x, t) \quad x \mapsto f(x, t) \quad t \mapsto f(x, t)$$

Il est à noter que ces notations ne sont pas au programme. Il faut donc les définir pour pouvoir s'en servir.

- Rappelons qu'une fonction h est dite intégrable sur un intervalle I de \mathbb{R} si :
 - × h est continue par morceaux sur I ,
 - × l'intégrale $\int_I h(t) dt$ est absolument convergente.
- Déterminer l'intégrabilité d'une fonction h sur un intervalle I , c'est déterminer la nature d'une intégrale. Pour ce faire, la méthodologie est toujours la même.

1) Étude de la continuité de h sur I .

Dans le cas particulier où la fonction h est continue (par morceaux) sur le SEGMENT $I = [a, b]$ alors l'intégrale $\int_a^b h(t) dt$ est bien définie. Ainsi, la fonction h est intégrable sur $[a, b]$ et l'étude prend fin.

2) Étude de la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b h(t) dt$

On est alors dans le cas où la fonction h est continue (par morceaux) sur l'intervalle $I =]a, b[$ (resp. $[a, b[$, resp. $]a, b]$).

Il faut alors vérifier que l'intégrale généralisée $\int_a^b h(t) dt$, impropre en a (resp. b , resp. impropre à la fois en a et en b), est **absolument** convergente.

Pour ce faire, le bon outil est celui du **théorème de comparaison** des intégrales généralisées de fonctions continues positives.

- Il arrive parfois qu'on se ramène à l'intégrabilité d'une autre fonction par changement de variable ou par intégration par parties. Lorsque c'est le cas (comme dans la question suivante), l'énoncé précisera la démarche à suivre.
- Attention à ne pas surinterpréter le point précédent. Lorsque la question consiste à déterminer la nature d'une intégrale (ou même d'une série), il est illusoire de penser qu'on va réussir à résoudre le problème par un calcul. En particulier, il est (presque) certain que l'intégrande étudiée ne possède pas de primitive à vue. Si c'était le cas, l'exercice proposé aurait peu d'intérêt : si on connaît une primitive, le symbole d'intégration disparaît et il ne s'agit plus d'un exercice d'intégration.
- Le seul cas où il est pertinent d'envisager le calcul est lorsque l'énoncé le suggère :

« Démontrer que l'intégrale est convergente et déterminer sa valeur »

Dans ce cas, le théorème de comparaison est inutile. On calcule l'intégrale sur le SEGMENT $[A, b]$ (resp. $[a, B]$, resp. $[A, B]$) et on vérifie que le résultat possède une limite finie lorsque $A \rightarrow a$ (resp. $B \rightarrow b$, resp. $A \rightarrow a$ et $B \rightarrow b$). □

8. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

Démonstration.

- On procède par intégration par parties. Sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt &= \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) \times \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[(1 - \cos(t)) \times \frac{-1}{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \sin(t) \times \frac{-1}{t} dt \\ &= \left[\frac{\cos(t) - 1}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \end{aligned}$$

- Démontrons alors que le crochet généralisé est convergent.

$$\times \forall t > 0, \left| \frac{\cos(t) - 1}{t} \right| = \frac{|\cos(t) - 1|}{t} \leq \frac{|\cos(t)| + |-1|}{t} \leq \frac{2}{t}$$

$$\text{Ainsi : } 0 \leq \left| \frac{\cos(t) - 1}{t} \right| \leq \frac{2}{t}.$$

Or :

$$\blacktriangleright 0 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

$$\blacktriangleright \frac{2}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos(t) - 1}{t} \right) = 0$.

$$\times \text{ Comme : } \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$$

$$\text{alors : } \cos(t) - 1 = -\frac{t^2}{2} + O(t^4)$$

$$\text{donc : } \frac{\cos(t) - 1}{t} = -\frac{t}{2} + O(t^3)$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\cos(t) - 1}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t}{2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Finalement : $\left[\frac{\cos(t) - 1}{t} \right]_0^{+\infty} = 0$. Ainsi, sous réserve d'existence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

On en déduit que ces deux intégrales sont de même nature (l'une est convergente si et seulement si l'autre l'est).

- Il reste alors à démontrer que cette nouvelle intégrale est convergente.

× La fonction $h : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ car elle est le quotient $h = \frac{h_1}{h_2}$ où :

▶ $h_1 : t \mapsto 1 - \cos(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

▶ $h_2 : t \mapsto t^2$ est :

– continue sur $]0, +\infty[$.

– NE S'ANNULE PAS sur $]0, +\infty[$.

× Comme $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$ (à l'aide de l'équivalent calculé en début de question) :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ est faussement impropre en 0.

$$\times - \left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \right| = \frac{|1 - \cos(t)|}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

– La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ par critère de Riemann avec exposant $2 > 1$.

Ainsi, par théorème de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives, la fonction $\frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ est convergente.

Il en est donc de même de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Commentaire

- On a démontré l'égalité des deux intégrales (sous réserve d'existence) en partant du membre droit. Il n'y paraît rien mais cela élimine en grande partie la difficulté de la question. Si on part de I , on a naturellement tendance à écrire que par intégration par parties, sous réserve d'existence :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_0^{+\infty} \sin(t) \times \frac{1}{t} dt \\ &= \left[-\cos(t) \times \frac{1}{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-\cos(t)) \times \frac{-1}{t^2} dt \\ &= - \left[\frac{\cos(t)}{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

Cependant, le crochet généralisé ne converge pas puisque : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(t)}{t} = +\infty$.

L'écriture ci-dessus n'est donc pas autorisée puisque la réserve d'existence ne peut être levée.

Au passage, il est simple de démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est divergente (la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ n'est pas intégrable en 0).

Commentaire

- Dans le point précédent, on a choisi $-\cos$ comme primitive de la fonction \sin . Ce choix n'était pas judicieux. Il aurait mieux fallu choisir la fonction $t \mapsto 1 - \cos(t)$ (comme suggéré par l'expression de l'intégrale à obtenir).

Sous réserve d'existence, on obtient alors, par intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_0^{+\infty} \sin(t) \times \frac{1}{t} dt \\ &= \left[(1 - \cos(t)) \times \frac{1}{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) \times \frac{-1}{t^2} dt \\ &= \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

- Dans la rédaction, on s'est permis de rédiger « sous réserve d'existence ». Cela sert essentiellement dans le cas de l'énoncé c'est-à-dire lorsque l'on doit démontrer la convergence d'une intégrale en procédant par intégration par parties. Il est à noter que cette réserve est levée puisqu'on démontre la convergence du crochet généralisée ET de l'intégrale obtenue.
- Lorsque l'on travaille avec des intégrales généralisées, toutes les étapes de calcul doivent être soigneusement justifiées. En particulier :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt \quad \not\equiv \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

La propriété de linéarité de l'intégrale ne peut être utilisée que si les intégrales en jeu sont convergentes (ce qui n'est clairement pas le cas de celles de droite). \square

9. Soit $x \geq 0$.

Montrer que $t \mapsto u(x, t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t) e^{-xt}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Démonstration.

Soit $x_0 \geq 0$.

- La fonction $\underline{u}_{x_0} : t \mapsto \frac{-1}{1+x_0^2} (x_0 \sin(t) + \cos(t)) e^{-x_0 t}$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} \underline{u}'_{x_0}(t) &= \frac{-1}{1+x_0^2} \left((x_0 \cos(t) - \sin(t)) e^{-x_0 t} + (x_0 \sin(t) + \cos(t)) (-x_0) e^{-x_0 t} \right) \\ &= \frac{-1}{1+x_0^2} \left((\cancel{x_0 \cos(t)} - \sin(t)) + (-x_0^2 \sin(t) - \cancel{x_0 \cos(t)}) \right) e^{-x_0 t} \\ &= \frac{-1}{\cancel{1+x_0^2}} \left(-\sin(t) (\cancel{1+x_0^2}) \right) e^{-x_0 t} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction \underline{u}_{x_0} est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t) e^{-x_0 t}$.

Commentaire

Cette question consiste uniquement à effectuer une dérivation en la variable t . Il suffit de s'appliquer pour obtenir les points qui sont offerts par le concepteur. \square

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

10. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, +\infty[, \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| &= \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| e^{-xt} \\ &= \frac{|\sin(t)|}{|t|} e^{-xt} \\ &\leq e^{-xt} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ |\sin(t)| \leq |t| \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 < +\infty$) et car les intégrales en jeu sont convergentes, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

Par ailleurs :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{x} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xt} - e^{-0} \right) = -\frac{1}{x} (0 - 1) = \frac{1}{x}$$

Enfin, par inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées de fonctions intégrables :

$$0 \leq \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| dt = \frac{1}{x}$$

On a bien : $\forall x > 0, |F(x)| \leq \frac{1}{x}$.

- Or :

$$\times 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\times \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} |F(x)| = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

Commentaire

- Même si cet exercice traite globalement des intégrales à paramètre, il apparaît que seule la question 11. est spécifique à ce chapitre. Les autres questions peuvent toutes être traitées à l'aide du chapitre sur les intégrales généralisées.
- Ici, on cherche à déterminer la limite « en x » d'une intégrale à paramètre. Pour ce faire, on pourrait utiliser le théorème de convergence dominé à paramètre continu qui permet d'échanger les symboles $\int_0^{+\infty}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty}$. L'énoncé indique une autre marche à suivre. Il y a sûrement 2 raisons à ce choix :
 - × il faut éviter « d'utiliser un marteau-pilon pour écraser une mouche », c'est-à-dire qu'entre deux méthodes, il est préférable d'utiliser la plus simple (inutile d'utiliser un théorème compliqué si une méthode plus directe permet de conclure rapidement).
 - × l'utilisation des théorèmes spécifiques aux intégrales à paramètre est testé dans la question suivante. On peut donc s'en passer pour cette question.
- Détaillons la rédaction associée au théorème de convergence dominée.

a) Existence de la limite quand $x \rightarrow +\infty$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{N.B. : peut être une quantité qui} \\ \text{dépend de } t \text{ mais elle ne peut} \\ \text{évidemment pas dépendre de } x ! \end{array} \right)$$

b) Hypothèse de domination

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| = \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| e^{-xt} \leq \left| \frac{\sin(t)}{t} \right|$$

La fonction $t \mapsto \left| \frac{\sin(t)}{t} \right|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 8.

Ainsi, par théorème de convergence dominée à paramètre continu :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0 \quad \square$$

11. Soit $a > 0$.

Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, F'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt$$

Démonstration.

Démontrons que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ par utilisation du théorème de dérivation sous le symbole intégrale.

- Bonne définition de $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$

Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f_x : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 7 en $x = a > 0$.

• Régularité

- × Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $\underline{f}_t : x \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$.
- × De plus, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\underline{f}'_t(x) = \frac{\sin(t)}{t} (-t) \times e^{-tx} = -\sin(t) e^{-tx}$$

• Hypothèse de domination

$$\forall x \in [a, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, |-\sin(t) e^{-xt}| = | -1 | |\sin(t)| e^{-xt} \leq e^{-xt} \leq e^{-at} \quad (*)$$

Et la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(*) En effet, comme $x \in [a, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \text{alors} \quad x &\geq a \\ \text{donc} \quad -x &\leq -a \\ \text{donc} \quad -xt &\leq -at \quad (\text{car } t \geq 0) \\ \text{donc} \quad e^{-xt} &\leq e^{-at} \quad (\text{car la fonction exp} \\ &\quad \text{est croissante sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème de dérivation sous le symbole d'intégration, la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$. De plus :

$$\forall x \in [a, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \underline{f}'_t(x) dt = \int_0^{+\infty} -\sin(t) e^{-xt} dt$$

En particulier, pour tout $a > 0$, la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$. □

12. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure :

$$\forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction F est dérivable sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Ainsi, la fonction F est dérivable sur $\bigcup_{k=1}^{+\infty}]\frac{1}{k}, +\infty[=]0, +\infty[$.

- Par ailleurs, comme détaillé dans la question précédente, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} -\sin(t) e^{-xt} dt \\ &= - [\underline{u}_x(t)]_0^{+\infty} \quad (\text{d'après la question 9.}) \\ &= \cancel{\left[\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt} \right]}_0^{+\infty} \\ &= \left[\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt} \right]_0^{+\infty} \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt} \right) - \frac{x \sin(0) + \cos(0)}{1+x^2} e^{-0} \end{aligned}$$

- Déterminons cette limite :

$$0 \leq \left| \frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt} \right| \leq (x |\sin(t)| + |\cos(t)|) \frac{e^{-xt}}{1 + x^2} \leq \frac{(x + 1)}{1 + x^2} e^{-xt}$$

Or :

$$\times 0 \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0,$$

$$\times \frac{(x + 1)}{1 + x^2} e^{-xt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ car } x > 0.$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt} = 0$.

$$\text{Finalement, pour tout } x > 0, F'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

- Notons $H : x \mapsto -\arctan(x)$. D'après ce qui précède :

$$\forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = H'(x)$$

On en déduit que les fonction F et H sont égales, à une constante près, sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = H(x) + \alpha = \alpha - \arctan(x)$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha - \arctan(x)) \\ &= \alpha - \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) \\ &= \alpha - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$ alors $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{On a bien : } \forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

□

Exercice 3

- On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
- Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n -ième.
- On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.

- Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n .

Partie I - Quelques résultats généraux

13. Déterminer L_0 , L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$L_0 = \frac{1}{2^0 \times 0!} U_0^{(0)} = \frac{1}{1} U_0 = (X^2 - 1)^0 = 1$$

- Puis :

$$L_1 = \frac{1}{2^1 \times 1!} U_1^{(1)} = \frac{1}{2} U_1' = \frac{1}{2} \left((X^2 - 1)^1 \right)' = \frac{1}{2} 2X = X$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2^2 \times 2!} U_2^{(2)} \\ &= \frac{1}{4 \times 2} U_2^{(2)} \\ &= \frac{1}{8} \left((X^2 - 1)^2 \right)^{(2)} \\ &= \frac{1}{8} \left(2(X^2 - 1)2X \right)' && \text{(en dérivant une première fois)} \\ &= \frac{4}{8} \left((X^2 - 1)X \right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(2X \times X + (X^2 - 1) \times 1 \right) && \text{(en dérivant une deuxième fois)} \\ &= \frac{1}{2} (3X^2 - 1) \end{aligned}$$

$L_0 = 1, L_1 = X \text{ et } L_2 = \frac{1}{2} (3X^2 - 1)$

□

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

14. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n .

Démonstration.

- Par définition :

$$\begin{aligned} U_n &= (X^2 - 1)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^2)^{n-k} (-1)^k \\ &= \binom{n}{0} (X^2)^n (-1)^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (X^2)^{n-k} (-1)^k \\ &= X^{2n} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (X^2)^{n-k} (-1)^k \right) \end{aligned}$$

Notons alors : $R_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (X^2)^{n-k} (-1)^k$.

- On en déduit :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2^n n!} (U_n)^{(n)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} (X^{2n} + R_n)^{(n)} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left((X^{2n})^{(n)} + R_n^{(n)} \right) \quad (\text{par linéarité des} \\ &\quad \text{dérivations successives}) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (X^{2n})^{(n)} &= (2n X^{2n-1})^{(n-1)} && (\text{en dérivant une première fois}) \\ &= (2n \times (2n-1) X^{2n-2})^{(n-2)} && (\text{en dérivant une nouvelle fois}) \\ &= (2n \times (2n-1) \times (2n-2) X^{2n-3})^{(n-3)} && (\text{en dérivant une nouvelle fois}) \\ &= \dots \\ &= \left(2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times (2n-(n-2)) X^{2n-(n-1)} \right)^{(n-(n-1))} \\ &= \left(2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times (n+2) X^{n+1} \right)^{(1)} \\ &= 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times (n+2) \times (n+1) X^n \\ &= 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times (n+2) \times (n+1) \times \frac{n!}{n!} X^n \\ &= \frac{2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times (n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} X^n \\ &= \frac{(2n)!}{n!} X^n \end{aligned}$$

• Ainsi :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2^n n!} \left((X^{2n})^{(n)} + R_n^{(n)} \right) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{(2n)!}{n!} X^n + R_n^{(n)} \right) \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} X^n + R_n^{(n)} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\deg \left(R_n^{(n)} \right) = \deg \left(R_n \right) - n = (2n - 2) - n = n - 2 < n$$

Le polynôme L_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est demandé de « Justifier » que L_n est de degré n . Cette terminologie est souvent associée à des démonstrations courtes et éventuellement moins formelles. C'est pourquoi on s'est autorisé à démontrer : $(X^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n$ sans faire de récurrence.
- Plus précisément, on pourrait démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où :

$\mathcal{P}(n)$: le polynôme L_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

□

15. Montrer que la famille (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration.

La famille $\mathcal{F} = (L_0, \dots, L_n)$ est :

× libre car c'est une famille de polynômes **non nuls** échelonnée en degré.

En effet, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{ccccccc} \deg(L_0) & < & \deg(L_1) & < & \dots & < & \deg(L_n) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ 0 & & 1 & & & & n \end{array}$$

× telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

On en déduit que la famille \mathcal{F} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Commentaire

- On rappelle qu'une famille de polynômes est échelonnée en degré si elle est constituée de polynômes de degrés tous différents. Il est possible (et même fréquent dans les exercices) que les polynômes des familles échelonnées en degré apparaissent par ordre croissant des degrés mais il n'est pas nécessaire que ce soit le cas.
- Attention à ne pas oublier l'hypothèse de non nullité des polynômes de la famille. Rappelons que toute famille qui contient le polynôme nul est liée.

□

16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n , en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U'_n = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$U_n = (X^2 - 1)^n = \left((X-1)(X+1) \right)^n = (X-1)^n (X+1)^n$$

Les réels -1 et 1 sont les deux seules racines du polynôme U_n .
Elles sont toutes les deux d'ordre de multiplicité n .

- La fonction polynomiale U_n est :

- × continue sur $[-1, 1]$,
- × dérivable sur $] - 1, 1[$,
- × vérifie $U_n(-1) = U_n(1)$.

Ainsi, par le théorème de Rolle, on en conclut qu'il existe $\alpha \in] - 1, 1[$ tel que : $U'_n(\alpha) = 0$.

Autrement dit, α est une racine du polynôme U'_n et il existe donc un polynôme T_n tel que :

$$U'_n = (X - \alpha) T_n \quad \text{où} \quad \deg(T_n) = \deg(U'_n) - 1 = (\deg(U_n) - 1) - 1 = (2n - 1) - 1 = 2n - 2$$

$$U'_n = (X - \alpha) T_n$$

- Le réel 1 est racine de U_n de multiplicité n .

On en déduit que 1 est racine de U'_n de multiplicité $n - 1$ et comme :

$$U'_n(1) = (1 - \alpha) T_n(1) = 0 \quad \text{et} \quad 1 - \alpha \neq 0$$

alors le réel 1 est racine de T_n de multiplicité $n - 1$. On en déduit qu'il existe V_n tel que :

$$T_n = (X - 1)^{n-1} V_n \quad \text{où} \quad \deg(V_n) = \deg(T_n) - \deg((X - 1)^{n-1}) = (2n - 2) - (n - 1) = n - 1$$

$$U'_n = (X - \alpha) (X - 1)^{n-1} V_n$$

- De la même manière, -1 est racine de U_n de multiplicité n et donc racine de U'_n de multiplicité $n - 1$. Comme :

$$U'_n(-1) = (-1 - \alpha) (-1 - 1)^{n-1} V_n(-1) = 0 \quad \text{et} \quad (-1 - \alpha) (-1 - 1)^{n-1} \neq 0$$

alors le réel -1 est racine de V_n de multiplicité $n - 1$. On en déduit qu'il existe W_n tel que :

$$V_n = (X + 1)^{n-1} W_n \quad \text{où} \quad \deg(W_n) = \deg(V_n) - \deg((X + 1)^{n-1}) = (n - 1) - (n - 1) = 0$$

Autrement dit, le polynôme V_n est constant non nul. Il existe donc $\lambda \neq 0$ tel que $V_n = \lambda$.

Enfinement : $U'_n = (X - \alpha) (X - 1)^{n-1} V_n = \lambda (X - \alpha) (X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1}$.

Commentaire

- On a choisi ici de présenter une rédaction en 2 étapes mais il était possible de factoriser directement U_n' par $(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}$ en remarquant que -1 et 1 sont des racines de U_n' toutes deux de multiplicité $n-1$. Une telle démonstration aurait un peu raccourci la présentation.
- Il y avait encore plus simple. Il suffisait de remarquer :

$$\begin{aligned} U_n' &= n(X-1)^{n-1}(X+1)^n + (X-1)^n n(X+1)^{n-1} \\ &= n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1} \left((X+1) + (X-1) \right) \\ &= 2n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1} X \end{aligned}$$

Autrement dit : $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0$.

- Il est légitime de s'interroger sur l'intérêt d'utiliser le théorème de Rolle alors qu'un calcul direct permet d'aboutir rapidement. Suggérer l'utilisation du théorème de Rolle dans cette question a pour but de préparer le candidat à la suite et plus précisément de l'aider à penser à utiliser ce théorème dans la question qui suit. □

17. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1) \cdots (X-\alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1) \cdots (X-\beta_{k+1})$$

Démonstration.

- Par hypothèse de l'énoncé :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1) \cdots (X-\alpha_k)$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\alpha_i \in] -1, 1[$ alors $\alpha_i \neq -1$ et $\alpha_i \neq 1$. On en déduit que :

× le réel -1 est racine de $U_n^{(k)}$ de multiplicité $n-k$.

× le réel 1 est racine de $U_n^{(k)}$ de multiplicité $n-k$.

On en déduit alors que ces deux réels sont racines de multiplicité $n-k-1$ du polynôme dérivé $U_n^{(k+1)}$. Ainsi, il existe un polynôme Z_k tel que :

$$\begin{aligned} U_n^{(k+1)} &= (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1} Z_k \quad \text{où} & \deg(Z_k) &= \deg(U_n^{(k+1)}) - ((n-k-1) + (n-k-1)) \\ & & &= (\deg(U_n) - (k+1)) + (-2n + 2k + 2) \\ & & &= (2n - k - 1) + (-2n + 2k + 2) = k + 1 \end{aligned}$$

- Notons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.

Quitte à renommer les réels (deux à deux distincts) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, on suppose :

$$\alpha_0 = -1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1 = \alpha_{k+1}$$

La fonction polynomiale $U_n^{(k)}$ est :

× continue sur $[\alpha_0, \alpha_1]$,

× dérivable sur $] \alpha_0, \alpha_1[$,

× vérifie $U_n^{(k)}(\alpha_0) = U_n^{(k)}(\alpha_1)$.

Ainsi, par le théorème de Rolle, on en conclut qu'il existe $\beta_1 \in] \alpha_0, \alpha_1[$ tel que : $(U_n^{(k)})'(\beta_1) = 0$.

Autrement dit, β_1 est une racine du polynôme $U_n^{(k+1)}$ qui est donc factorisable par $(X - \beta_1)$.

- De la même manière, on démontre qu'il existe :
 - × $\beta_2 \in]\alpha_1, \alpha_2[$ tel que $U_n^{(k+1)}$ est factorisable par $(X - \beta_2)$.
 - × ...
 - × $\beta_k \in]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que $U_n^{(k+1)}$ est factorisable par $(X - \beta_k)$.
 - × $\beta_k \in]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ tel que $U_n^{(k+1)}$ est factorisable par $(X - \beta_{k+1})$.
- On obtient alors :

$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1$$

On a donc démontré qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts et un polynôme S tel que :

$$U_n^{(k+1)} = (X - 1)^{n-k-1} (X + 1)^{n-k-1} (X - \beta_1) \dots (X - \beta_{k+1}) \times S$$

$$\begin{aligned} \text{où } \deg(S) &= \deg(U_n^{(k+1)}) - ((n - k - 1) + (n - k - 1) + (k + 1)) \\ &= (2n - (k + 1)) - (2n - k - 1) = 0 \end{aligned}$$

En notant $S = \mu$, on obtient bien la forme souhaitée.

Commentaire

- L'énoncé utilise de nouveau la terminologie « Justifier ». Il s'agit essentiellement de s'assurer de la bonne compréhension du candidat. Celle-ci se mesure :
 - × par l'introduction des réels $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$.
 - × l'annonce de l'utilisation du théorème de Rolle sur les intervalles $]\alpha_0, \alpha_1[, \dots,]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$.
- Il aurait certainement été préférable que l'énoncé fasse l'hypothèse que les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont rangés dans l'ordre strictement croissant. Devoir prendre l'initiative d'un éventuel renommage de ces variables ajoute une difficulté non nécessaire. □

- 18.** En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note x_1, \dots, x_n en convenant que $x_1 < \dots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = a_n A_n$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Démontrons par récurrence : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)$, où :

$$\mathcal{P}(k) : \begin{array}{l} \text{il existe des réels } \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ deux à deux distincts dans }]-1, 1[\text{ et un réel } \\ \mu \text{ tels que : } U_n^{(k)} = \mu (X - 1)^{n-k} (X + 1)^{n-k} (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k) \end{array}$$

► **Initialisation :**

C'est le résultat de la question **16**.

► **Hérédité :**

C'est le résultat de la question **17**.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)$.

- En particulier, on en conclut que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée. Autrement dit, il existe des réels x_1, \dots, x_n deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ tels que :

$$U_n^{(n)} = \mu (X - 1)^{n-n} (X + 1)^{n-n} (X - x_1) \dots (X - x_n) = \mu (X - x_1) \dots (X - x_n)$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\mu}{2^n n!} (X - x_1) \cdots (X - x_n) \quad (\text{par définition}) \\ &= a_n (X - x_1) \cdots (X - x_n) \quad (\text{d'après la question 11.}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme L_n admet n racines simples qui vérifient : $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$.

□

Partie II - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

19. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord : $\phi(\mathbb{R}[X]) \subset \mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors : $\phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2X P' \in \mathbb{R}[X]$.

- Démontrons que l'application ϕ est linéaire.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.

$$\begin{aligned} &(\phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q))(X) \\ &= (X^2 - 1)(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)''(X) + 2X(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) \\ &= (X^2 - 1)(\lambda \cdot P''(X) + \mu \cdot Q''(X)) + 2X(\lambda \cdot P'(X) + \mu \cdot Q'(X)) \quad (\text{par linéarité de l'évaluation en un point et de la dérivation}) \\ &= \lambda \cdot ((X^2 - 1)P''(X) + 2X P'(X)) + \mu \cdot ((X^2 - 1)Q''(X) + 2X Q'(X)) \\ &= \lambda \cdot (\phi(P))(X) + \mu \cdot (\phi(Q))(X) \\ &= (\lambda \cdot \phi(P) + \mu \cdot \phi(Q))(X) \end{aligned}$$

Ainsi : $\phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = \lambda \cdot \phi(P) + \mu \cdot \phi(Q)$.

L'application ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

□

Dans les questions 20 à 25, n désigne un entier naturel.

20. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ .

Démonstration.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\deg(P) \leq n$, alors :

$$\begin{aligned} \times \quad \deg(P'') &\leq n - 2 \text{ et donc : } \deg((X^2 - 1)P'') = \deg((X^2 - 1)) + \deg(P'') \\ &= 2 + \deg(P'') \\ &\leq 2 + (n - 2) = n \\ \times \quad \deg(P') &\leq n - 1 \text{ et donc : } \deg(2X P') = \deg(2X) + \deg(P') \\ &= 1 + \deg(P') \\ &\leq 1 + (n - 1) = n \end{aligned}$$

Enfin :

$$\deg(\phi(P)) = \deg((X^2 - 1)P'' + 2X P') \leq \max(\deg((X^2 - 1)P''), \deg(2X P')) = n$$

Ainsi : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

□

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ .

Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi_n(P) = \phi(P)$.

21. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, m_{k,k} = k(k+1)$.

Démonstration.

Notons $\mathcal{B}_n = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

• Tout d'abord :

$$\phi(P_0) = (X^2 - 1) P_0'' + 2X P_0' = (X^2 - 1) \times 0 + 2X \times 0 = 0 = 0(0+1) \cdot P_0$$

• Puis :

$$\phi(P_1) = (X^2 - 1) P_1'' + 2X P_1' = (X^2 - 1) \times 0 + 2X \times 1 = 2X = 2P_1 = 1(1+1) \cdot P_1$$

• Enfin, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} (\phi(P_k))(X) &= \left((X^2 - 1) P_k'' + 2X P_k' \right)(X) \\ &= (X^2 - 1) P_k''(X) + 2X P_k'(X) \\ &= (X^2 - 1) k(k-1)X^{k-2} + 2X kX^{k-1} \\ &= k(k-1)X^k + 2kX^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k((k-1) + 2) X^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1) X^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= \left(k(k+1) P_k - k(k-1)P_{k-2} \right)(X) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \phi(P_k) &= -k(k-1) \cdot P_{k-2} + k(k+1) \cdot P_k \\ &= m_{0,k} \cdot P_0 + \dots + m_{k-3,k} \cdot P_{k-3} + m_{k-2,k} \cdot P_{k-2} + m_{k-1,k} \cdot P_{k-1} + m_{k,k} \cdot P_k + m_{k+1,k} \cdot P_{k+1} + \dots + m_{n,k} \cdot P_n \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$m_{i,j} = \begin{cases} i(i+1) & \text{si } i = j \\ -i(i-1) & \text{si } i = j - 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice M est bien triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont définis par : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, m_{k,k} = k(k+1)$.

Commentaire

- Il convient de remarquer que la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\phi_n)$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$. C'est le cas car :
 - × ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$,
 - × $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.
- Le concepteur a fait le choix de numéroter les lignes et les colonnes entre 0 et n . C'est un peu déroutant car on a plutôt l'habitude que la première colonne soit numérotée 1 mais cela a l'avantage d'être bien plus adapté à la notation de la base canonique dont le premier élément (P_0) est numéroté 0 et non 1.

Commentaire

- Il n'est pas obligatoire de faire le calcul de $\phi(P_k)$ entièrement pour démontrer que la matrice M est triangulaire supérieure. En effet, il suffit de remarquer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \phi_n(P_k) &= \phi(P_k) \quad (\text{par définition de } \phi_n) \\ &= \phi_k(P_k) \quad (\text{par définition de } \phi_k \\ &\quad \text{et car } P_k \in \mathbb{R}_k[X]) \end{aligned}$$

Ainsi : $\phi_n(P_k) \in \mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_k)$ et cela démontre que pour tout $i > k$, $m_{i,k} = 0$. \square

22. Montrer que ϕ_n est diagonalisable.

On pourra utiliser la question 21.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\phi_n) &= \text{Sp}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\phi_n)) \\ &= \{m_{k,k} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \quad (\text{car les valeurs propres d'une matrice triangulaire} \\ &\quad \text{sont ses coefficients diagonaux}) \\ &= \{k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \end{aligned}$$

- La fonction $g : x \mapsto x(x+1)$ est une fonction polynomiale dont le polynôme associé :
 \times est de degré 2 et de coefficient dominant 1.
 \times admet -1 et 0 pour racines.

On en déduit que la fonction est strictement croissante notamment sur $[0, +\infty[$.

Cette fonction est donc injective sur cet intervalle ce qui permet de conclure que pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$, si $i \neq j$ alors :

$$g(i) = i(i+1) \neq j(j+1) = g(j)$$

L'endomorphisme ϕ possède $n+1$ valeurs propres distinctes et agit sur un espace vectoriel de dimension $n+1$. Il est donc diagonalisable. \square

23. Vérifier : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k = 0$.

Démonstration.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 0$:

$$(X^2 - 1)U'_0 - \cancel{2 \times 0 X}U_0 = (X^2 - 1) \left((X^2 - 1)^0 \right)' = (X^2 - 1)P'_0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

- Si $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} (X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k &= (X^2 - 1) \left((X^2 - 1)^k \right)' - 2kX(X^2 - 1)^k \\ &= (X^2 - 1) \left(k(X^2 - 1)^{k-1} 2X \right) - 2kX(X^2 - 1)^k \\ &= 2kX(X^2 - 1)^k - 2kX(X^2 - 1)^k \\ &= 0_{\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

On a bien : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X^2 - 1)U'_k - 2kXU_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. \square

24. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En dérivant $(k + 1)$ fois la relation de la question 23, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz :

$$(X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + 2X U_k^{(k+1)} - k(k + 1) U_k^{(k)} = 0$$

Démonstration.

- D'après la question 23 :

$$\begin{aligned} \left((X^2 - 1) U_k' - 2kX U_k \right)^{(k+1)} &= (0_{\mathbb{R}[X]})^{(k+1)} \\ \text{donc } \left((X^2 - 1) U_k' \right)^{(k+1)} - \left(2kX U_k \right)^{(k+1)} &= 0_{\mathbb{R}[X]} \quad (\text{par linéarité de la dérivation}) \end{aligned}$$

- Il reste alors à déterminer une expression des deux termes présents dans l'égalité.

× Tout d'abord, si $k = 0$:

$$\left((X^2 - 1) U_0' \right)^{(1)} = \left((X^2 - 1) ((X^2 - 1)^0)' \right)^{(1)} = \left((X^2 - 1) P_0' \right)^{(1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

Pour tout $k \geq 1$, d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} \left((X^2 - 1) U_k' \right)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \left((X^2 - 1) \right)^{(j)} \left(U_k' \right)^{(k+1-j)} \\ &= \sum_{j=0}^2 \binom{k+1}{j} \left((X^2 - 1) \right)^{(j)} \left(U_k' \right)^{(k+1-j)} \\ &\quad + \sum_{j=3}^{k+1} \binom{k+1}{j} \left((X^2 - 1) \right)^{(j)} \left(U_k' \right)^{(k+1-j)} \quad (\text{ce découpage est valable car } k + 1 \geq 2) \\ &= \sum_{j=0}^2 \binom{k+1}{j} \left((X^2 - 1) \right)^{(j)} \left(U_k' \right)^{(k+1-j)} \quad (\text{car pour tout } j \geq 3, \left((X^2 - 1) \right)^{(j)} = 0_{\mathbb{R}[X]}) \\ &= \binom{k+1}{0} \left((X^2 - 1) \right)^{(0)} \left(U_k' \right)^{(k+1)} \\ &\quad + \binom{k+1}{1} \left((X^2 - 1) \right)^{(1)} \left(U_k' \right)^{(k)} + \binom{k+1}{2} \left((X^2 - 1) \right)^{(2)} \left(U_k' \right)^{(k-1)} \\ &= (X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + k 2X U_k^{(k+1)} + \frac{(k+1)!}{2! (k-1)!} \times 2 U_k^{(k)} \\ &= (X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + (k+1) 2X U_k^{(k+1)} + \frac{(k+1)k \cancel{(k-1)!}}{\cancel{2} \cancel{(k-1)!}} \times \cancel{2} U_k^{(k)} \end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left((X^2 - 1) U_k' \right)^{(k+1)} = (X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + (k+1) 2X U_k^{(k+1)} + k(k+1) U_k^{(k)}$$

× Pour tout $k \geq 0$, d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
 (2kX U_k)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (2kX)^{(j)} (U_k)^{(k+1-j)} \\
 &= \sum_{j=0}^1 \binom{k+1}{j} (2kX)^{(j)} (U_k)^{(k+1-j)} + \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (2kX)^{(j)} (U_k)^{(k+1-j)} \\
 &= \sum_{j=0}^1 \binom{k+1}{j} (2kX)^{(j)} (U_k)^{(k+1-j)} \quad (\text{car pour tout } j \geq 2, \\
 &\quad (2kX)^{(j)} = 0_{\mathbb{R}[X]}) \\
 &= \binom{k+1}{0} (2kX)^{(0)} (U_k)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1} (2kX)^{(1)} (U_k)^{(k)} \\
 &= 2kX U_k^{(k+1)} + (k+1) 2k U_k^{(k)}
 \end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (2kX U_k)^{(k+1)} = 2kX U_k^{(k+1)} + (k+1) 2k U_k^{(k)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 &((X^2 - 1) U'_k)^{(k+1)} - (2kX U_k)^{(k+1)} \\
 &= ((X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + (k+1) 2X U_k^{(k+1)} + k(k+1) U_k^{(k)}) - (2kX U_k^{(k+1)} + (k+1) 2k U_k^{(k)}) \\
 &= (X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + ((k+1) 2X - 2kX) U_k^{(k+1)} + (k(k+1) - (k+1) 2k) U_k^{(k)} \\
 &= (X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + 2X U_k^{(k+1)} - k(k+1) U_k^{(k)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, on a bien : } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + 2X U_k^{(k+1)} - k(k+1) U_k^{(k)}.$$

Commentaire

- Dans l'énoncé, il est précisé qu'il faut dériver $k+1$ fois la relation obtenue en question 23 en utilisant la formule de Leibniz. Il n'y a donc aucune initiative à prendre et il faut absolument traiter ce type de questions où la méthodologie à utiliser est entièrement décrite. Le concepteur vous offre des points, il faut les prendre !
- Rappelons qu'il est rare qu'un barème soit binaire. Tout ce qui est juste est retenu pour le candidat. Ainsi, la connaissance de la formule de Leibniz peut à elle seule rapporter un point.
- On a pris soin de traiter à part le cas $k=0$ car il paraît étonnant de faire apparaître une somme de 3 termes $\left(\sum_{j=0}^2 \dots\right)$ alors qu'on ne dérive que 0+1 fois. Cependant, si on appliquait la formule générale dans le cas $k=0$, on obtiendrait :

$$\begin{aligned}
 &((X^2 - 1) U'_0)^{(k+1)} \\
 &= \sum_{j=0}^2 \binom{1}{j} ((X^2 - 1))^{(j)} (U'_0)^{(1-j)} \\
 &= \binom{1}{0} ((X^2 - 1))^{(0)} (U'_0)^{(1)} + \binom{1}{1} ((X^2 - 1))^{(1)} (U'_0)^{(0)} + \binom{1}{2} ((X^2 - 1))^{(2)} (U'_0)^{(-1)}
 \end{aligned}$$

L'un des termes est alors dérivé -1 fois ce qui n'a pas de sens. Mais on peut considérer qu'on n'a pas à le traiter car, par convention : $\binom{1}{2} = 0$. □

25. Montrer que, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n , en précisant la valeur propre associée. On pourra utiliser la question 24.

Démonstration.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \phi_n(L_k) &= \phi(L_k) && \text{(car } \deg(L_k) \leq n \\
 & && \text{d'après la question 14)} \\
 &= (X^2 - 1) L_k'' + 2X L_k' && \text{(par définition de } \phi_n) \\
 &= (X^2 - 1) \left(\frac{1}{2^k k!} U_k^{(k)} \right)'' + 2X \left(\frac{1}{2^k k!} U_k^{(k)} \right)' \\
 &= \frac{1}{2^k k!} \left((X^2 - 1) U_k^{(k+2)} + 2X U_k^{(k+1)} \right) \\
 &= \frac{1}{2^k k!} k(k+1) U_k^{(k)} && \text{(d'après la question 24)} \\
 &= k(k+1) \left(\frac{1}{2^k k!} U_k^{(k)} \right) \\
 &= k(k+1) L_k
 \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_k \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et ainsi, L_k est un vecteur propre de l'endomorphisme ϕ_n associé à la valeur propre $k(k+1)$. □

26. Dédurre de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ .

Démonstration.

- En question 22, on a démontré : $\text{Sp}(\phi_n) = \{k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

On en a déduit que l'endomorphisme ϕ_n est diagonalisable car possède $n+1$ valeurs propres et opère sur $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^n \dim \left(E_{k(k+1)}(\phi_n) \right) = n+1$$

Comme chaque sous-espace propre est, par définition, de dimension au moins 1, on en déduit :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim \left(E_{k(k+1)}(\phi_n) \right) = 1$$

D'après la question précédente :

$$\text{Vect}(L_k) \subset E_{k(k+1)}(\phi_n)$$

Par égalité des dimensions, on en déduit, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $E_{k(k+1)}(\phi_n) = \text{Vect}(L_k)$.

- Démontrons alors :

$$\text{Sp}(\phi) = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, E_{k(k+1)}(\phi) = \text{Vect}(L_k)$$

On procède par double inclusion.

(\supset) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\phi(L_k) = \phi_k(L_k) = k(k+1) L_k \quad \left(\begin{array}{l} \text{en appliquant la question 24} \\ \text{en } n = k \text{ et } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \end{array} \right)$$

Ainsi, L_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre $k(k+1)$.

On en conclut : $E_{k(k+1)}(\phi) \supset \text{Vect}(L_k)$.

$$\text{Sp}(\phi) \supset \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, E_{k(k+1)}(\phi) \supset \text{Vect}(L_k)$$

(C) Soit $\lambda \in \text{Sp}(\phi)$. Démontrons : $\lambda \in \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Par définition de valeur propre, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\phi(P) = \lambda \cdot P \quad \text{et} \quad P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$$

Notons alors $m = \deg(P)$. Ainsi :

$$\phi_m(P) = \phi(P) = \lambda \cdot P \quad \text{et} \quad \lambda \in \text{Sp}(\phi_m)$$

Or, d'après la question 22 : $\text{Sp}(\phi_m) = \{k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, m \rrbracket\}$. Finalement, on a démontré :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(\phi), \exists m \in \mathbb{N}, \lambda \in \{k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, m \rrbracket\}$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(\phi)$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\lambda = k_0(k_0+1)$.

$$\text{Ainsi : } \text{Sp}(\phi) \subset \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

À ce stade, on a déjà démontré : $\text{Sp}(\phi) \subset \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Démontrons alors : $\forall k \in \mathbb{N}, E_{k(k+1)}(\phi) \subset \text{Vect}(L_k)$.

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$. Soit $P \in E_{k_0(k_0+1)}(\phi)$.

En notant $m = \deg(P)$, on obtient alors :

$$\phi_m(P) = \phi(P) = k_0(k_0+1) \cdot P$$

Finalement : $P \in E_{k_0(k_0+1)}(\phi_m) = \text{Vect}(L_{k_0(k_0+1)})$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, E_{k(k+1)}(\phi) \subset \text{Vect}(L_k)$$

Commentaire

Il faut bien lire la question posée. Il ne s'agit pas de déterminer $\text{Sp}(\phi_n)$ mais bien $\text{Sp}(\phi)$. Pour ce faire, on utilise les résultats démontrés lors de l'étude sur ϕ_n . □

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

27. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

L'application $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le SEGMENT $[-1, 1]$.

On en conclut que l'intégrale $\int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ est bien définie.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\langle Q, P \rangle &= \int_{-1}^1 Q(t) P(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt \quad (\text{car la loi } \times \text{ est commutative}) \\ &= \langle P, Q \rangle\end{aligned}$$

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite

Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Soit $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\langle P, \mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 \rangle &= \int_{-1}^1 P(t) (\mu_1 \cdot Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2)(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t) (\mu_1 \cdot Q_1(t) + \mu_2 \cdot Q_2(t)) dt && (\text{par linéarité de l'évaluation en un point}) \\ &= \int_{-1}^1 (\mu_1 P(t)Q_1(t) + \mu_2 P(t)Q_2(t)) dt && (\text{par distributivité de la loi } \times \text{ sur la loi } +) \\ &= \mu_1 \int_{-1}^1 P(t)Q_1(t) dt + \mu_2 \int_{-1}^1 P(t)Q_2(t) dt && (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \mu_1 \langle P, Q_1 \rangle + \mu_2 \langle P, Q_2 \rangle\end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant :

× symétrique,

× linéaire à droite,

elle est linéaire à droite. On en déduit qu'elle est bilinéaire.

- Démontrons que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

× Tout d'abord : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt$.

Pour tout $t \in [-1, 1]$, $(P(t))^2 \geq 0$.

On en déduit alors, par croissance de l'intégrale : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt \geq 0$.

× Supposons maintenant : $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 (P(t))^2 dt = 0$. Démontrons : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

La fonction $t \mapsto (P(t))^2$ est :

× continue sur $[-1, 1]$,

× positive sur $[-1, 1]$,

× d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$.

On en déduit que cette fonction est nulle sur $[-1, 1]$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \forall t \in [-1, 1], (P(t))^2 &= 0 \\ \text{donc } \forall t \in [-1, 1], P(t) &= 0 \\ \text{donc } \forall t \in [-1, 1], t &\text{ est racine de } P \end{aligned}$$

Le polynôme P admet une infinité de racines. Cela démontre : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie et est de plus bilinéaire, symétrique et définie-positive. C'est donc bien un produit scalaire. □

On note $\| \cdot \|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^1 f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

28. Établir : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt$, puis :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$$

Démonstration.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

$$\begin{aligned} \langle \phi(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 (\phi(P))(t) Q(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left((t^2 - 1) P''(t) + 2t P'(t) \right) Q(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(2t P'(t) + (t^2 - 1) P''(t) \right) Q(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 g'(t) Q(t) dt && \text{(où } g : t \mapsto (t^2 - 1) P'(t) \text{)} \\ &= [g(t) Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g(t) Q'(t) dt && \text{(par intégration par parties)} \\ &= [(t^2 - 1) P'(t) Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt \\ &= \cancel{((1)^2 - 1) P'(1) Q(1)} - \cancel{((-1)^2 - 1) P'(-1) Q(-1)} - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt \end{aligned}$$

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt$$

Ainsi, en utilisant l'expression démontrée :

$$\langle \phi(Q), P \rangle = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) Q'(t) P'(t) dt = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1) P'(t) Q'(t) dt = \langle \phi(P), Q \rangle$$

Finalement : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle \phi(P), Q \rangle = \langle \phi(Q), P \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$, la dernière égalité étant obtenue par symétrie. □

Sujet B

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n . Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note M^T la transposée de la matrice M .

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k : $M^{k+1} = M M^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E , on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \text{id}_E$ et, pour tout entier naturel k : $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que : $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que : $M^k = 0$, est appelé *indice de nilpotence* de M .

Soit \mathcal{B} une base de E . Un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans \mathcal{B} est nilpotente d'indice p .

On pose : $J_1 = (0)$ et, pour tout $\alpha \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$: $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs :

$$\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, \dots , $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note :

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C})$$

A - Nilpotence d'indice 1

7. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

B - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

8. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que : $u^{p-1}(x) \neq 0$.

9. Vérifier que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre. En déduire : $p = 2$.

10. Démontrer : $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

11. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2 .

12. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

C - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose : $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotente d'indice 2 et de rang r .

13. Démontrer : $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et $2r \leq n$.

14. On suppose : $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_r de E tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E .

15. Donner la matrice de u dans cette base.

16. On suppose : $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_r de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ appartenant à $\text{Ker}(u)$ tels que $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base de E .
17. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

D - Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A .
19. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?
20. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à X^n .
21. Montrer la réciproque de la question 18.
22. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.
23. Démontrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice p , alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A .

On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente.

24. Démontrer que 0 est racine de P .
25. On note m la multiplicité de 0 dans P , ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

E - Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si : $R^2 = V$. On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 canoniquement associé à A .

26. Calculer la trace et le rang de A . En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de A . Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.
27. Démontrer que A est semblable à la matrice $\text{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que : $A = P \text{diag}(J_2, J_1) P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que : $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R .

28. Démontrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.
29. En déduire l'ensemble des racines carrées de A .

On pourra considérer : $R' = P^{-1} R P$.

On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle : $R^2 = J_3$.

30. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6 , puis l'ensemble des solutions de l'équation.

Plus généralement, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On se propose d'étudier l'équation : $R^2 = V$.

31. Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.
32. Pour toute valeur de l'entier $n \geq 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geq 2$ et admettant au moins une racine carrée.