DS5

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante : $x^2\,(1-x)\,y'' - x\,(1+x)\,y' + y = 2x^3 \qquad (E)$.

Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2\,(1-x)\,y'' - x\,(1+x)\,y' + y = 0 \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum\ a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in\ ]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière.
Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

- **1 pt : f est la somme d'une série entière et est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ (donc $\mathscr{C}^2$) sur l'intervalle ouvert de convergence** $]-r, r[$
- **1 pt : par théorème de dérivation sous le symbole somme pour les séries entières, les fonctions f' et f'' sont développables en série entière**
- **1 pt :** $\forall x \in\ ]-r, r[$**,** $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\ a_{n+1}\ x^n$ **et** $f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)\ a_{n+2}\ x^n$

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in\ ]-r, r[$, on a :

$$x^2\,(1-x)\,f''(x) - x\,(1+x)\,f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1})\,x^n$$

- **1 pt :** $\forall \in\ ]-r, r[$**,** $x^2\,(1-x)\,f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n(n-1)\,a_n - (n-1)(n-2)\,a_{n-1}\Big)\ x^n$
- **1 pt :** $-x(1+x)\,f'(x) = -a_1\,x\ -\ \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(n\,a_n + (n-1)\,a_{n-1}\Big)\ x^n$
- **1 pt :** $x^2\,(1-x)\,f''(x) - x\,(1+x)\,f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2\ \Big(a_n - a_{n-1}\Big)\ x^n$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- **0 pt : f est solution de (H) sur $]-r, r[$ SSI** $\forall x \in\ ]-r, r[,\ a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2\ \Big(a_n - a_{n-1}\Big)\ x^n = 0$
- **1 pt : SSI** $a_0 = 0$ **et** $\forall n \geqslant 2,\ (n-1)^2\ \big(a_n - a_{n-1}\big) = 0$ **par unicité du DSE**
- **1 pt : SSI** $a_0 = 0$ **et** $\forall n \geqslant 2,\ (n-1)^2 = 0$ `OU` $\big(a_n - a_{n-1}\big) = 0$
SSI $a_0 = 0$ **et** $\forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1}$ **car** $n \geqslant 2$

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r,r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \,]-1,1[,\ f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}$$

- **1 pt : comme** $\forall n \geqslant 2,\ a_n = a_{n-1}$ **alors :** $\forall n \geqslant 1$**,** $a_n = a_1$
- **1 pt :** $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ x^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_1\ x^n = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$
- **1 pt :** $= a_1 \times \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^n\right) = a_1 \times \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\dfrac{x^1 - x^{N+1}}{1-x}\right) = a_1 \times \dfrac{x}{1-x}$

5. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $g : x \mapsto \dfrac{\lambda x}{(1-x)}$ est une solution de (H) sur $]-1,1[$ DSE.

- **1 pt :** g **est DSE sur** $]-1,1[$ **au moins comme produit de fonctions qui le sont**
- **1 pt :** $\forall x \in \,]-1,1[,\ g'(x) = \lambda\ \dfrac{(1-x) - x \times (-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{\lambda}{(1-x)^2}$ **et** $g''(x) = \dfrac{2\,\lambda}{(1-x)^3}$
- **1 pt :** $x^2\,(1-x)\,g''(x) - x\,(1+x)\,g'(x) + g(x) = x^2\,(1-x)\,\dfrac{2\,\lambda}{(1-x)^3} - x\,(1+x)\,\dfrac{\lambda}{(1-x)^2} + \dfrac{\lambda\,x}{1-x} = 0$

Exercice 2

- Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- Pour tout $x \in E$, on note : $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

6. Un endomorphisme u de E vérifiant : $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$ est-il l'endomorphisme nul ?

- **0 pt : réponse `NON` sans explication**
- **1 pt :** $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall x \in E$**, la famille** $\big(x, u(x)\big)$ **est orthogonale**
- **1 pt :** $E = \mathbb{R}^2$ **et** $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **défini par :** $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ u\big((x_1,x_2)\big) = (-x_2, x_1)$

7. Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle \ = \ \langle x, v(y)\rangle$$

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $u \circ v = v \circ u$

(ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle \ = \ \langle v(x), v(y)\rangle$

(iii) $\forall x \in E,\ \|\,u(x)\,\| \ = \ \|\,v(x)\,\|$

(on pourra par exemple, successivement prouver les implications :
(i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (ii) et (ii) ⇒ (i))

- **1 pt :** $(i) \Rightarrow (ii)$ $\langle\, u(x), u(y)\,\rangle = \langle\, x, v\big(u(y)\big)\,\rangle = \langle\, x, (v\circ u)(y)\,\rangle = \langle\, x, (u \circ v)(y)\,\rangle = \langle\, x, u\big(v(y)\big)\,\rangle$
- **1 pt :** $(ii) \Rightarrow (iii)$ $\|\,u(x)\,\| = \sqrt{\langle\, u(x), u(x)\,\rangle} = \sqrt{\langle\, v(x), v(x)\,\rangle} = \|\,v(x)\,\|$
- **2 pts :** $(iii) \Rightarrow (ii)$
  - × $\langle\, u(x+y), u(x+y)\,\rangle = \langle\, u(x), u(x)\,\rangle + 2\ \langle\, u(x), u(y)\,\rangle + \langle\, u(y), u(y)\,\rangle$
  - × $= \ \langle\, v(x+y), v(x+y)\,\rangle = \ldots = \langle\, u(x), u(x)\,\rangle + 2\ \langle\, v(x), v(y)\,\rangle + \langle\, u(y), u(y)\,\rangle$
- **2 pts :** $(ii) \Rightarrow (i)$
  - × $\langle\, u\circ v(x), y\,\rangle = \langle\, v \circ u(x), y\,\rangle$
  - × $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle\, u\circ v(x) - v\circ u(x), y\,\rangle \ = \ 0$ **donc** $\|\,u\circ v(x) - v \circ u(x)\,\|^2 \ = \ 0$

Exercice 3

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \Delta_n = u_n - u_{n-1}$.

8. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.

- **1 pt :** $\Delta_n = u_n - u_{n-1} = \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \right) - \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \ln(n-1) \right)$
$= \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) \right) + \left(\ \ln(n-1) - \ln(n)\ \right) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
- **1 pt : finalement** $\Delta_n = -\dfrac{\frac{1}{2}}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **et** $a = -\dfrac{1}{2}$

9. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \Delta_n$ est convergente.

- **2 pts :** $|\,\Delta_n\,| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{n^2}$ **donc, par théorème de comparaison des SATP,** $\sum\limits_{n\geqslant 2} \Delta_n$ **est (absolument) convergente (ou** $\Delta_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **avec même conclusion)**

10. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

- **1 pt : pour** $n \geqslant 2$**,** $\sum\limits_{k=2}^{n} \Delta_k = \sum\limits_{k=2}^{n} \left(u_k - u_{k-1}\right) = u_n - u_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S + u_1$

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans 10, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & si\ t < n \\ 0 & si\ t \geqslant n \end{cases}$$

II.1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ valable pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

11. Soit $t \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$$

- **1 pt : notons** $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$**, ainsi :** $\lfloor t \rfloor \leqslant t < \lfloor t \rfloor + 1 = n_0$
- **1 pt : ainsi si** $n \geqslant n_0$**,** $n \geqslant t$ **et donc** $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$

12. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

- **1 pt :** $f_n(t_0) \;=\; \left(1-\dfrac{t_0}{n}\right)^n \ln(t_0) \;=\; \mathbf{e}^{n\,\ln\left(1-\frac{t_0}{n}\right)} \times \ln(t_0)$
- **1 pt :** $\ln\left(1-\dfrac{t_0}{n}\right)\times n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{t_0}{n}\times n = -t_0$ **donc** $\mathbf{e}^{n\,\ln\left(1-\frac{t_0}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}^{-t_0}$

13. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t\in\,]0,+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\,|\ln(t)|$.

- **0 pt : si** $t\in\,]0,n[$**,** $|\,f_n(t)\,| = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \,|\ln(t)\,|$
- **1 pt :** $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n = \exp\left(\, n\ \ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right)\,\right) < \mathbf{e}^{-t}$
- **1 pt : si** $t\in[n,+\infty[$ **alors** $|\,f_n(t)\,| = 0 \;\leqslant\; \mathbf{e}^{-t}\;|\ln(t)\,|$

14. Montrer que la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : la fonction** $h : t\mapsto \mathbf{e}^{-t}\ln(t)$ **est continue sur** $]0,+\infty[$ **donc** $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$ **est impropre en** 0 **et en** $+\infty$
- **1 pt :** $|\,\mathbf{e}^{-t}\ln(t)\,| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)\,| = -\ln(t)$ **et L'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ **est convergente**
- **2 pts :**
  - $\times$ $|\,\mathbf{e}^{-t}\ln(t)\,| = |\ln(t)\,|\;\mathbf{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)$
  - $\times$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}t}\,dt$ **est convergente en tant qu'intégrale de référence (avec** $\frac{1}{2}>0$**)**

II.2 - Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,dt \quad\text{et}\quad J_n = \int_0^1 u^n\ln(1-u)\,du$$

On considère un entier $n\in\mathbb{N}^*$.

15. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

- **1 pt :** $\left|\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t)\right| \underset{t\to 0}{\sim} |1^n\ \ln(t)\,| = -\ln(t)$ **et** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ **est convergente**

16. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,dt$$

- **1 pt : Convergence simple : la suite** (f_n) **CS sur** $]0,+\infty[$ **vers** $f : t\mapsto \mathbf{e}^{-t}\ \ln(t)$
- **1 pt : Hypothèse de domination :** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\,]0,+\infty[,\ |\,f_n(t)\,| \;\leqslant\; \mathbf{e}^{-t}\;|\ln(t)|$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} h(t)\,dt$

17. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\, du$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

- **1 pt :** $J_n = \displaystyle\int_0^1 u^n \ln(1-u)\, du = \frac{1}{n+1} \Big[\big(u^{n+1}-1\big) \ln(1-u) \Big]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{1-u}\, du$
- **2 pts :**
  × $\displaystyle\lim_{u\to 1} \big(u^{n+1}-1\big) \ln(1-u) = \lim_{v\to 0} \Big(\big((1-v)^{n+1}-1\big) \ln(v)\Big)$
  × $\Big(\big((1-v)^{n+1}-1\big) \ln(v)\Big) \underset{v\to 0}{\sim} -(n+1)\, v \ln(v)$
- **2 pts :**
  × $g_n : u \mapsto \frac{1-u^{n+1}}{1-u}$ **est continue sur** $[0,1[$ **donc** $\displaystyle\int_0^1 g_n(u)\, du$ **est impropre en** 1
  × $g_n(u) = \dfrac{1-u^{n+1}}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k \underset{u\to 1}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$
- **1 pt :** $J_n = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{1-u^{n+1}}{1-u}\, du = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} u^k\, du$

$$= -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 u^k\, du\right) = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

18. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + n J_n$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\, dt = \int_1^0 f_n\big(n\,(1-u)\big)\, (-n)\, du$ **en posant** $\psi : u \mapsto n\,(1-u)$ **(ou** $\boxed{u = 1 - \frac{t}{n}}$**)**
- **1 pt :** $n \displaystyle\int_0^1 u^n \Big(\ln(n) + \ln\big(1-u\big) \Big)\, du = n \ln(n) \int_0^1 u^n\, du + n \int_0^1 u^n \ln\big(1-u\big)\, du$

19. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\, dt$$

- **1 pt :** $\dfrac{n+1}{n} I_n = -\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma - 0$
- **1 pt :** $\dfrac{n+1}{n} I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t)\, dt$