DS6

Problème 1 - Suites et séries de fonctions

Partie I - préliminaires

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

- **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I**
- **1 pt : la série numérique $\sum \int_I |\, f_n(t)\,|\ dt$ converge**
- **1 pt : la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I**

2. Donner un développement en série de $\dfrac{1}{1-x}$ pour $x \in [0,1[$, et en déduire :

$$\forall u \in [0,1[,\ -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$$

- **1 pt : $\forall x \in\ ]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$**
- **1 pt : toute primitive H (considérons par exemple $H : u \mapsto -\ln(1-u)$) de h est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$ et vérifie :**
- **1 pt : $\forall u \in\ ]-1,1[,\ H(u) - H(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n}$**

3. Justifier alors que la fonction $u \mapsto -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\ du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On admettra pour toute la suite de ce problème que cette somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

- **0 pt : pour $u \in\ ]0,1[,\ -\dfrac{\ln(1-u)}{u} = \dfrac{1}{u}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^{n+1}}{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\frac{u^{n+1}}{n+1}}{u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n+1}$**
- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$ et donc intégrable sur $]0,1[$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^1 |\, f_n(u)\,|\ du = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$ et la série numérique $\sum \displaystyle\int_0^1 |\, f_n(u)\,|\ du$ CV**
- **1 pt : la série de fonctions $\sum f_n$ CS sur $]0,1[$ car $\sum f_n$ a pour somme $u \mapsto -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$.**

Partie II - étude de quelques suites d'intégrales

On s'intéresse dans cette partie à la suite des intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\ dt$, pour $n \geqslant 1$.

On rappelle que f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$.

4. Énoncer le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.

- **1 pt : la suite (h_n) converge simplement sur I vers la fonction h**
- **1 pt : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |\, h_n(t)\,| \leqslant \varphi(t)$
- **0 pt : alors h est intégrable sur I et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_I h_n(t)\ dt = \int_I h(t)\ dt$

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est bien définie, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

- **1 pt : soit $t_0 \in [0,1[$; comme $t_0{}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(t_0{}^n\right) = f(0)$ **et** (h_n) **CS sur** $[0,1[$ **vers** $h : t \mapsto 0$
- **Domination**
  - × **1 pt :** $0 \leqslant t^{n-1} \leqslant 1^{n-1}$ **par croissance de l'élévation à la puissance** $n-1 \geqslant 0$ **sur** $[0,1[$
  - × **1 pt :** $f(0) \leqslant f\left(\,t^n\,\right) \leqslant f(t)$ **par croissance de** f
  - × **0 pt :** f **positive** $|\,h_n(t)\,| = |\,f\left(\,t^n\,\right)\,| = f\left(\,t^n\,\right) \leqslant f(t)$ **avec f intégrable sur** $[0,1[$

6. On suppose de plus, dans cette question, que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Montrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du$.

Indication : on pourra transformer l'intégrale nI_n grâce à un changement de variable approprié.

- **1 pt :** $n\,I_n = n \displaystyle\int_0^1 f\left(\,t^n\,\right)\ dt = \int_0^1 n\ f(u)\ \frac{1}{n}\ \frac{u^{\frac{1}{n}}}{u}\ du = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ u^{\frac{1}{n}}\ du$ **en posant** $\boxed{u = t^n}$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Convergence simple}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(u_0)}{u_0}\ u_0{}^{\frac{1}{n}} = \dfrac{f(u_0)}{u_0}$.
- $\boxed{\textbf{Domination}}$
  - × **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, u \in\,]0,1[,\ |\,g_n(u)\,| = \left|\dfrac{f(u)}{u}\ u^{\frac{1}{n}}\right| = \left|\dfrac{f(u)}{u}\right| \times \left|u^{\frac{1}{n}}\right| = \dfrac{f(u)}{u} \times u^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{f(u)}{u}$
  - × **1 pt : et** $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ **est intégrable sur** $]0,1[$

7. Application

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^n)\ dt$ est bien définie.

Déterminer la limite et un équivalent simple de J_n quand $n \to +\infty$.

- **La fonction** $f : t \mapsto -\ln\left(\,1-t\,\right)$ **est :**
  - × **0 pt : continue sur** $[0,1[$.
  - × **0 pt : croissante sur** $[0,1[$ **(de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $[0,1[$ **et si** $t \in [0,1[$ **:** $f'(t) = \dfrac{1}{1-t} \geqslant 0$**)**
  - × **0 pt : positive sur** $[0,1[$.
  - × **1 pt : intégrable sur** $[0,1[$ **car en posant** $\boxed{u = 1-t}$, $\displaystyle\int_0^1 -\ln\left(\,1-t\,\right)\ dt = -\int_0^1 \ln(u)\ du$
- **1 pt : pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, **on note :** $I_n = \displaystyle\int_0^1 f\left(\,t^n\,\right)\ dt = \int_0^1 -\ln\left(\,1-t^n\,\right)\ dt = -J_n$
- **0 pt : ainsi (cf *5*), l'intégrale J_n est bien définie et** $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$
- **1 pt : la fonction** $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u} = -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ **est intégrable sur** $]0,1[$. **D'après *6*,**
  $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,J_n = -\left(\lim\limits_{n\to+\infty} n\,I_n\right) = -\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u}\ du$

Partie III - étude de quelques séries de fonctions

On s'intéresse dans cette partie à la fonction F définie, lorsque c'est possible, par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$$

On rappelle que f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$.

On suppose de plus, dans toute cette partie, que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$.

On souhaite alors démontrer que la fonction F est bien définie sur l'intervalle $]0,1[$, puis calculer la limite $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)F(x)$, et enfin comparer cette limite à $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2 F'(x)$ sur deux exemples.

8. Un premier exemple

Dans cette question, on pose $F_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$.

Préciser le domaine de définition de la fonction F_1. Calculer, pour $x \in [0,1[$, $F_1(x)$ puis $F_1'(x)$.

En déduire les valeurs des limites $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)F_1(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2 F_1'(x)$.

- **1 pt : $F_1(x)$ est la somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^n$, convergente SSI $|x| < 1$ donc F_1 définie sur $]-1,1[$**
- **1 pt : si $x \in [0,1[$, $F_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{N} x^n\right) = \dfrac{x}{1-x}$**
- **1 pt : $F_1'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$**
- **1 pt : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)\ F_1(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2\ F_1'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 = 1$**

9. Retour au cas général

On revient au cas général où f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$, et telle que $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$. On fixe un réel $x \in]0,1[$.

a) Justifier l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^t)\ dt$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}\ du$.

- **1 pt : changement de variable $\psi : u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{\ln(x)}$ ou ($\boxed{u = x^t}$) justifié correctement**
- **1 pt : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt = \int_{1}^{0} f\left(x^{\psi(u)}\right)\ \psi'(u)\ du = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du$**

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x^t)\ dt \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)\ dt$.

- **1 pt : si $t \in [m, m+1]$, $m\ \ln(x) \geqslant t\ \ln(x) \geqslant (m+1)\ \ln(x)$ et $x^m \geqslant x^t \geqslant x^{m+1}$ puis $f\left(x^m\right) \geqslant f\left(x^t\right) \geqslant f\left(x^{m+1}\right)$ (car la fonction f est croissante sur $[0,1[$)**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant,** $f\left(x^m\right) = \displaystyle\int_m^{m+1} f\left(x^m\right)\ dt \geqslant \int_m^{m+1} f\left(x^t\right)\ dt \geqslant \int_m^{m+1} f\left(x^{m+1}\right)\ dt = f\left(x^{m+1}\right)$

c) En déduire l'existence de la somme $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{N+1} f\left(x^t\right)\ dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} f\left(x^n\right) \leqslant \int_0^N f\left(x^t\right)\ dt$ **par relation de Chasles**
- **1 pt : comme f positive** $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt = \int_0^N f\left(x^t\right)\ dt + \int_N^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \geqslant \int_0^N f\left(x^t\right)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} f\left(x^n\right)\right)_{N\geqslant 1}$ **est croissante et majorée** $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} f\left(x^n\right) \leqslant \int_0^N f\left(x^t\right)\ dt \leqslant \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt\right)$

d) En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du.$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt$ **donc** $\displaystyle G(x) - \int_0^1 f\left(x^t\right)\ dt \leqslant F(x) \leqslant G(x)$
  puis : $\displaystyle(1-x)\ G(x) - (1-x) \int_0^1 f\left(x^t\right)\ dt \ \leqslant\ (1-x)\ F(x) \ \leqslant\ (1-x)\ G(x)$
- $\times$ **1 pt : d'après *9.a)*,** $\displaystyle(1-x)\ G(x) \ =\ (1-x)\ \frac{-1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du$
  $\times$ **1 pt : en posant $v = x-1$:** $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}}\ -\frac{1-x}{\ln(x)} = \lim_{\substack{v \to 0 \\ v > 0}}\ -\frac{v}{\ln(1-v)} = 1$
- **1 pt : comme en *9.a)* :** $\displaystyle(1-x) \int_0^1 f\left(x^t\right)\ dt \ =\ -\frac{1-x}{\ln(x)} \int_x^1 \frac{f(u)}{u}\ du \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

10. Un dernier exemple

Dans cette question, on pose $F_2(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in\ ]0,1[$. Montrer que la fonction $f_n : x \mapsto -\ln(1-x^n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,a]$ et : $\forall x \in [0,a]$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{na^{n-1}}{1-a^n}$.

- **1 pt :** f_n **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $[0,a]$ **car elle est la composée** $f_n = -g \circ h_n$ **...**
- **1 pt : si** $x \in [0,a]$**,** $\displaystyle f_n'(x) = -\left(\ g' \circ h_n \times h_n'\ \right)(x) = \frac{1}{1-x^n} \times \left(n\, x^{n-1}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle|\ f_n'(x)\ | \ =\ \left|\frac{n\, x^{n-1}}{1-x^n}\right| \ =\ \frac{n}{1-x^n} \times x^{n-1} \ \leqslant\ \frac{n}{1-x^n} \times a^{n-1}$
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{1-x^n} \leqslant \frac{1}{1-a^n}$ **détaillé**

b) En déduire que la fonction F_2 est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une somme de série de fonctions.

- **0 pt : la fonction** f_n **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $[0,1[$
- **1 pt :** $|\ f_n(x_0)\ | \ =\ \left|-\ln\left(1-{x_0}^n\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\cancel{-}\left(\cancel{-}{x_0}^n\right)\right| \ =\ {x_0}^n$ **et ainsi, par théorème d'équivalence, la série de fonctions** $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ **converge simplement sur** $[0,1[$
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\displaystyle\|\ f_n'\ \|_{\infty,[0,a]} \ \leqslant\ \frac{n\, a^{n-1}}{1-a^n}$
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{n\, a^{n-1}}{1-a^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\, a^{n-1}$ **et ainsi, par théorème d'équivalence, la série** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|\ f_n'\ \|_{\infty,[0,a]}$ **est convergente**

c) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)F_2(x)$.

- **1 pt : $f : x \mapsto -\ln(1-x)$ est continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$ (*7*) et $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u} = -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ (*3*)**
- **1 pt : d'après *9.c)*, si $x \in]0,1[$ la quantité $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f\big(x^n\big)$ est bien définie.**
  Or $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f\big(x^n\big) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\big(1-x^n\big) = F_2(x)$
- **1 pt : d'après *9*, $x \mapsto (1-x)\ F_2(x)$ admet une limite à gauche en 1 et** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)\ F_2(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$

d) Par une méthode analogue à celle de 9, calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left((1-x)^2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nx^n}{1-x^n}\right)$.

En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2 F_2'(x)$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

Problème 2

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le but du problème est d'étudier la réduction de certaines *matrices de Toeplitz*, c'est-à-dire de matrices d'ordre n de la forme suivante, où $(t_{-n+1},\dots,t_{-1},t_0,t_1,\dots,t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$:

$$T(t_{-n+1},\dots,t_{-1},t_0,t_1,\dots,t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

dans laquelle les coefficients diagonaux sont tous égaux à t_0, ceux de la première sur-diagonale tous égaux à t_1, ceux de la première sous-diagonale tous égaux à t_{-1}, etc.

On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \{T(t_{-n+1},\dots,t_{-1},t_0,t_1,\dots,t_{n-1}) \mid (t_k)_{-n+1\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1}\}$$

Partie 0 - Généralités

11. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
En donner une base et en préciser la dimension.

- **1 pt :** $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \left\{ \sum\limits_{k=-(n-1)}^{(n-1)} t_k \cdot T(e_k) \mid (t_k)_{-n+1\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1} \right\} = \mathrm{Vect}\big(\ T(1,0,\dots,0),\ T(0,1,0,\dots,0)$
- **1 pt : $\mathcal{F} = \Big(T(1,0,\dots,0),\ \dots, T(0,\dots,1,0),\ T(0,\dots,0,1)\Big)$ est libre (à démontrer)**
- **1 pt : donc $\dim\big(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{F}\big) = 2n-1$**

12. *Un exemple.* Soit N la matrice de Toeplitz dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première sous-diagonale qui valent 1 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés.
La matrice N est-elle diagonalisable ?

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$ **car** N **est triangulaire (inférieure) de coefficient diagonaux nuls**
- **2 pts : la matrice** N **n'est pas diagonalisable car si elle l'était elle serait semblable à la matrice nulle donc nulle**

b) Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice commutant avec N.
Montrer que $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1}\ N^{i-1}$.
On pourra commencer par considérer la colonne ME_1*, puis les colonnes* ME_k *pour* $k \in [\![2, n]\!]$*, où* $(E_1, \ldots, E_n)$ *est la base canonique de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

- **0 pt :** $M\ E_1$ **est la** $1^{\text{ère}}$ **colonne de** M
- **1 pt :** $M\ E_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot E_i$
- **1 pt :** $\forall i \in [\![1, n]\!]$**,** $N^{i-1} \times E_1 = E_i$
- **1 pt :** $M \times E_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot E_i = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot \Big(N^{i-1} \times E_1\Big) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot N^{i-1}\Big) \times E_1 = R \times E_1$
- **1 pt :** $M \times E_k = M \times \Big(N^{k-1} \times E_1\Big) = N^{k-1} \times \Big(M \times E_1\Big) = N^{k-1} \times \Big(R \times E_1\Big) = R \times \Big(N^{k-1} \times E_1\Big) = R \times E_k$

c) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

- **1 pt :** $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$**,** $N^i = T(e_{-i})$ **est triangulaire inférieure**
- **1 pt : si** $MN = NM$**,** $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot N^{i-1}$ **est donc triangulaire inférieure (stabilité par CL)**
- **1 pt : une trinagulaire inférieure s'écrit** $T\big(t_{-(n-1)}, \ldots, t_{-1}, t_0, 0, \ldots, 0\big) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot N^i$ **donc commute avec** N

Partie 1 - Cas de la dimension 2

13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz d'ordre 2, où (a, b, c) sont des complexes.

a) Donner le polynôme caractéristique de A.

- **1 pt :** $\chi_A(X) = X^2 - 2\,aX + (a^2 - bc)$

b) Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

- **1 pt : si $\Delta = bc \neq 0$, alors χ_A admet deux racines complexes distinctes et donc A diagonalisable**
- **1 pt : si $\Delta = bc = 0$, alors χ_A admet 1 racines double a**
- **1 pt : et est diagonalisable si scalaire ($A = a\ I_2$ donc $b = c = 0$)**

14. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

- **1 pt : si M admet deux valeurs propres distinctes α et β alors elle est diagonalisable**
- **si M admet une seule valeur propre α**
  - × **1 pt : si M diagonalisable, $M = \alpha \cdot I_2$**
  - × **1 pt : sinon, M trigonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$**

b) En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

- **1 pt : si M est semblable à un matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = T(0, \alpha, \gamma)$ OK**
- **1 pt : sinon M est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$**
- **1 pt : en posant $a = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $b = c = \alpha - \beta$, on obtient que $T(c, a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et ainsi par transitivité, M semblable à $T(\alpha - \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha - \beta)$**

Partie 2 - Un cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de type $T(0, \dots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

15. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ b x_{k+2} + (a - \lambda) x_{k+1} + c x_k = 0$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**

- **1 pt :**

16. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation :

$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \tag{1}$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

17. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

18. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\dfrac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, ensemble des racines $(n+1)$-èmes de l'unité.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

19. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et r_1+r_2.
En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :

$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \tag{2}$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

20. En déduire qu'il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0,n+1]\!]$, $x_k = 2i\,\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

21. Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**