DS6

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- On traitera les deux problèmes (sans obligation de commencer par le premier).
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 - Suites et séries de fonctions

- Dans tout ce problème, on désigne par f une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur l'intervalle $[0, 1[$.
- On s'intéresse, respectivement dans les **parties *II*** et ***III*** ci-dessous, à des suites et à des séries de fonctions dont le terme général est de la forme $f_n : x \mapsto f(x^n)$, pour $n \geqslant 1$.
- La **partie *I*** est quant-à-elle consacrée à des résultats préliminaires qui serviront dans les parties **parties *II*** et ***III***.

Partie I - préliminaires

1. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

Démonstration.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{K}^I\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Supposons :

(i) **Bonne définition des intégrales par intégrabilité**

$\left(\begin{array}{l}\text{Continuité par morceaux :}\\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ les fonctions } f_n \text{ et } S \text{ sont continues (par morceaux) sur } I\end{array}\right)$

Intégrabilité :

$\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I

(ii) **Bonne définition de la somme d'intégrales**

La série numérique $\sum \int_I |\, f_n(t) \,| \, dt$ converge

(iii) **Convergence simple**

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I (on note $S \in \mathbb{K}^I$ sa somme)

Alors la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I. De plus :

$$\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \, dt\right)}$$

□

2. Donner un développement en série de $\dfrac{1}{1-x}$ pour $x \in [0,1[$, et en déduire :

$$\forall u \in [0,1[,\ -\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$$

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. De plus :

$$\forall x \in\ ]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

- Par théorème, toute primitive H (considérons par exemple $H : u \mapsto -\ln(1-u)$) de h est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$ et vérifie :

$$\begin{aligned}\forall u \in\ ]-1,1[,\ H(u) - H(0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}\end{aligned}$$

Comme $H(0) = -\ln(1-0) = \ln(1) = 0$, on en déduit : $\forall u \in\ ]-1,1[,\ -\ln(1-u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$.

□

3. Justifier alors que la fonction $u \mapsto -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On admettra pour toute la suite de ce problème que cette somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $u \in\ ]0,1[$:

$$-\frac{\ln(1-u)}{u} = \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{u^{n+1}}{n+1}}{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1} \qquad (*)$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : u \mapsto \dfrac{u^n}{n+1}$. Démontrons alors :
  - ***(i)*** pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $]0,1[$.
    En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle et donc sur $]0,1[$.
  - ***(ii)*** la série numérique $\sum \displaystyle\int_0^1 |\, f_n(u)\,|\, du$ est convergente.
    Tout d'abord :

$$\int_0^1 |\, f_n(u)\,|\, du = \int_0^1 \left|\frac{u^n}{n+1}\right| du = \frac{1}{n+1} \int_0^1 u^n\, du = \frac{1}{n+1} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{n+1}$$

La série $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

(iii) la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$.

Ce résultat est fourni par la propriété $(*)$ qui stipule de plus que la série $\sum f_n$ a pour somme la fonction $u \mapsto -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$.

On en déduit, par théorème d'intégration terme à terme, que la fonction $u \mapsto -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$. De plus :

$$\int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u}\, du = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n+1}\right) du = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{u^n}{n+1}\, du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u}\, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.}$$

Commentaire

- On a affaire ici à un théorème d'interversion des symboles $\displaystyle\int_I$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$. Il y a, a priori, plusieurs résultats différents qui peuvent être utilisés pour une telle interversion :

  1) théorème d'interversion par hypothèse de convergence uniforme de la série de fonctions.

  2) théorème d'intégration terme à terme.

  3) théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles.

  Le premier résultat ne s'applique que si l'intervalle I est un `SEGMENT` ce qui permet de l'écarter dans de nombreuses questions. Dans le cas où I est bien un segment, le choix entre les résultats ***1)*** et ***2)*** dépend essentiellement du contexte. Si on a démontré au préalable la convergence uniforme (généralement plutôt la convergence normale) de la série de fonctions considéré sur le segment I, on s'orientera vers le résultat ***1)***. Dans le cas contraire, on s'orientera vers le résultat ***2)***. Le résultat ***3)*** quant à lui ne s'utilise qu'en cas d'échec du résultat ***2)***.

- Dans l'exercice, il est demandé initialement de rappeler l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme. Il est donc à peu près certain que c'est ce théorème que l'on doit utiliser. Cependant, on peut quand même se poser la question de l'utilisation de la convergence uniforme. On peut démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Pour cela on raisonne par l'absurde. Comme :

  × pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale.

  × la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (par hypothèse).

  alors la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ est continue sur $[0,1]$. Or cette somme n'est autre que la fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. Cette fonction n'est pas continue sur le segment $[0,1]$ car admet une limite non finie en 1 ($\displaystyle\lim_{x\to 1} -\frac{\ln(1-x)}{x} = +\infty$).

- En démontrant qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série $\sum f_n$ sur $[0,1]$, on démontre au passage qu'il n'y a pas non plus convergence normale sur ce même intervalle (si c'était le cas, on serait assuré de la convergence uniforme). On peut aussi démontrer directement qu'il n'y a pas convergence normale sur $[0,1]$ (mais cela ne permet pas de conclure quant à la convergence uniforme ou non). Plus précisément :

$$\|f\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{n+1}$$

  et la série $\sum \dfrac{1}{n+1}$ est divergente.

Commentaire

- On peut aussi démontrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ (supprimer le point qui pose problème ne suffit pas à résoudre le problème). Pour ce faire, on procède toujours par l'absurde. Comme :
  $\times$ $\lim\limits_{x\to 1} f_n(x) = \dfrac{1}{n+1}$,
  $\times$ la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1[$ (par hypothèse),
  alors, par théorème de la double limite, la série $\sum \dfrac{1}{n+1}$ est convergente, ce qui est absurde.
- Enfin, on peut démontrer qu'il y a convergence normale (et donc uniforme) sur tout segment de l'intervalle $[0,1[$ ou plutôt sur les intervalles $[0,a[$ avec $a \in [0,1[$ (intervalles adaptés au problème). En effet, pour tout $a \in [0,1[$:
  $$\| f_n \|_{\infty,[0,a[} = \frac{a^n}{n+1}$$
  et la série numérique $\sum \dfrac{a^n}{n+1}$ est bien convergente.

□

Partie II - étude de quelques suites d'intégrales

On s'intéresse dans cette partie à la suite des intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\, dt$, pour $n \geqslant 1$.
On rappelle que f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$.

4. Énoncer le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \displaystyle\int_I h_n(t)\, dt$ où :
$\times$ $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle réel.
$\times$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : I \to \mathbb{K}$ est une fonction définie sur I.
Soit $h : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

Existence de la limite finie de la suite (u_n)

a) Convergence simple

La suite (h_n) converge simplement sur I vers la fonction h ($\forall t \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = h(t)$).

b) Domination

Il existe une fonction φ **intégrable sur** I telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |\, h_n(t)\,| \leqslant \varphi(t)$$
(cela démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est intégrable sur I)

Alors la fonction h est intégrable sur I et :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I h_n(t)\, dt = \int_I \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(t) \right) dt = \int_I h(t)\, dt}$$

□

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est bien définie, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $h_n : t \mapsto f(t^n)$.
- Il s'agit d'utiliser le théorème de convergence dominée.

  a) $\boxed{\text{Convergence simple}}$

  Soit $t_0 \in [0,1[$. Comme ${t_0}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(t) \;=\; \lim_{n\to+\infty} f\left({t_0}^n\right) \;=\; f(0)$$

  Ainsi, la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $h : t \mapsto f(0)$.

  b) $\boxed{\text{Domination}}$

  Remarquons tout d'abord que pour tout $t \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{lccccc l}
 & 0 & \leqslant & t & < & 1 & \\
\text{donc} & 0 & \leqslant & t^{n-1} & \leqslant & 1^{n-1} & \textit{(par croissance de la fonction élévation à la puissance } n-1 \geqslant 0 \textit{ sur } [0,1[) \\
\text{donc} & 0 & \leqslant & t^n & \leqslant & t & \textit{(par multiplication par } t \geqslant 0) \\
\text{donc} & f(0) & \leqslant & f\left(t^n\right) & \leqslant & f(t) & \textit{(par croissance de la fonction } f \textit{ sur } [0,1[)
\end{array}$$

  On en déduit, comme la fonction f est positive sur $[0,1[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[,\ \left| h_n(t) \right| \;=\; \left| f\left(t^n\right) \right| \;=\; f\left(t^n\right) \;\leqslant\; f(t)$$

  où f est intégrable sur $[0,1[$.
  Cela démontre au passage que la fonction h_n est intégrable sur $[0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 1, \text{ l'intégrale } I_n \text{ est bien définie.}}$$

  Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction h est intégrable sur $[0,1[$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n \;=\; \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t)\,dt \;=\; \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} h_n(t) \right) dt \;=\; \int_0^1 h(t)\,dt \;=\; \int_0^1 f(0)\,dt \;=\; f(0)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} I_n = f(0).}$$

□

6. On suppose de plus, dans cette question, que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Montrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$.
Indication : on pourra transformer l'intégrale $n\,I_n$ grâce à un changement de variable approprié.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n\,I_n \;=\; \int_0^1 n\,f\left(t^n\right)\,dt$$

- On pose alors le changement de variable $\boxed{u = t^n}$.

$$\left| \begin{array}{l} u = t^n \quad \text{donc } t = u^{\frac{1}{n}} \\ \hookrightarrow \text{on en déduit} \quad dt = \dfrac{1}{n}\, u^{\frac{1}{n}-1}\, du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0^n = 0 \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = 1^n = 1 \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est licite car l'intégrale I_n est bien définie.
On obtient :

$$n\, I_n \ = \ n \int_0^1 f\,(\,t^n\,)\ dt \ = \ \int_0^1 n\ f(u)\ \frac{1}{n}\ \frac{u^{\frac{1}{n}}}{u}\ du \ = \ \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ u^{\frac{1}{n}}\ du$$

- Il s'agit alors d'utiliser le théorème de convergence dominée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}\ u^{\frac{1}{n}}$.

a) $\boxed{\text{Convergence simple}}$

Soit $u_0 \in \,]0,1[$. Comme ${u_0}^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ \ln(u_0)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(u_0) \ = \ \lim_{n\to+\infty} \frac{f(u_0)}{u_0}\ {u_0}^{\frac{1}{n}} \ = \ \frac{f(u_0)}{u_0}$$

Ainsi, la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$.

b) $\boxed{\text{Domination}}$

Remarquons tout d'abord que pour tout $u \in \,]0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$.
On en déduit, comme la fonction f est positive sur $]0,1[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, u \in \,]0,1[,\ \ |\,g_n(u)\,| \ = \ \left| \frac{f(u)}{u}\ u^{\frac{1}{n}} \right| \ = \ \left| \frac{f(u)}{u} \right| \times \left| u^{\frac{1}{n}} \right| \ = \ \frac{f(u)}{u} \times u^{\frac{1}{n}} \ \leqslant \ \frac{f(u)}{u}$$

où $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$.
Cela démontre au passage que la fonction g_n est intégrable sur $]0,1[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 1, \text{ l'intégrale } n\ I_n \text{ est bien définie.}}$$

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction g est intégrable sur $]0,1[$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} n\, I_n \ = \ \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(u)\, du \ = \ \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} g_n(u) \right) du \ = \ \int_0^1 g(u)\, du \ = \ \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{n\to+\infty} n\, I_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du.}$$

□

7. Application

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 - t^n)\ dt$ est bien définie.

Déterminer la limite et un équivalent simple de J_n quand $n \to +\infty$.

Démonstration.

- Notons $f : t \mapsto -\ln(1-t)$. Cette fonction est :
  - × continue sur $[0,1[$.
  - × croissante sur $[0,1[$.

    (en effet, cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et, pour tout $t \in [0,1[$: $f'(t) = \dfrac{1}{1-t} \geqslant 0$)
  - × positive sur $[0,1[$.
  - × intégrable sur $[0,1[$.

    En effet, sous réserve d'existence, on obtient en posant le changement de variable $\boxed{u = 1-t}$:
$$\int_0^1 -\ln(1-t)\ dt \ = \ \int_1^0 \cancel{-}\ln(u)\ (\cancel{-}\ du) \ = \ -\int_0^1 \ln(u)\ du$$
    Or, la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$.
    On en déduit que la fonction f est bien intégrable sur $[0,1[$.

  On est donc dans le cadre d'application de la question ***5***.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\ dt = \int_0^1 -\ln(1-t^n)\ dt = -J_n$.

  $\boxed{\text{D'après la question } \textit{\textbf{5}}\text{, pour tout } n \in \mathbb{N}^*\text{, l'intégrale } J_n \text{ (et donc l'intégrale } I_n) \text{ est bien définie et } \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

- Sous les mêmes notations qu'au-dessus, remarquons que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u} = -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question ***3***.
  On est donc dans le cadre d'application de la question ***6***. On en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty} n\, J_n \ = \ -\left(\lim_{n\to+\infty} n\, I_n\right) \ = \ -\int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u}\ du \ = \ -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ = \ -\frac{\pi^2}{6}$$
  Autrement dit : $n\, J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi^2}{6}\,\frac{1}{n}.}$$

Commentaire

- La question est nommée par le concepteur Application. Cela signifie qu'elle va consister essentiellement à appliquer un résultat précédent. Lorsque c'est le cas, tout l'enjeu de la question est alors de démontrer que l'on est dans le cadre d'application des résultats démontrés précédemment.
- Les résultats des questions intermédiaires sont généralement donnés. On peut donc, même sans avoir traité les questions ***5*** et ***6***, traiter la question ***7***. On prendra l'habitude de traiter ce type de questions puisque ce qu'il faut mettre en place (vérifier que l'on est dans le cadre d'application des résultats précédents) est assez clairement stipulé dans l'énoncé.

□

Partie III - étude de quelques séries de fonctions

On s'intéresse dans cette partie à la fonction F définie, lorsque c'est possible, par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f\,(\,x^n\,)$$

On rappelle que f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$.
On suppose de plus, dans toute cette partie, que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$.
On souhaite alors démontrer que la fonction F est bien définie sur l'intervalle $]0,1[$, puis calculer la limite $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)\ F(x)$, et enfin comparer cette limite à $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2\ F'(x)$ sur deux exemples.

8. Un premier exemple

Dans cette question, on pose $F_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$.
Préciser le domaine de définition de la fonction F_1. Calculer, pour $x \in [0,1[$, $F_1(x)$ puis $F_1'(x)$.
En déduire les valeurs des limites $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)\ F_1(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2\ F_1'(x)$.

Démonstration.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $F_1(x)$ est la somme de la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} x^n$, convergente si et seulement si $|x| < 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi la fonction } F_1 \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$

- Soit $x \in [0,1[$.

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\ &= \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^n \right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{x^1 - x^N}{1-x} \right) \\ &= \frac{x}{1-x} \qquad \textit{(car } \lim_{N\to+\infty} x^N = 0 \textit{ puisque } |x|<1\textit{)} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= \frac{1\times(1-x) - x\times(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(1-\cancel{x}) + \cancel{x}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1[,\ F_1(x) = \frac{x}{1-x} \text{ et } F_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rl} & \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)\ F_1(x) \\ = & \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \cancel{(1-x)}\ \dfrac{x}{\cancel{1-x}} \\ = & \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x \\ = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x)^2\ F_1'(x) \\ = & \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \cancel{(1-x)^2}\ \dfrac{1}{\cancel{(1-x)^2}} \\ = & \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 \\ = & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F_1(x) = 1 = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F_1'(x)}$$

□

9. Retour au cas général

On revient au cas général où f désigne une fonction continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$, et telle que $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$. On fixe un réel $x \in]0,1[$.

a) Justifier l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(x^t\right) dt$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}\, du$.

Démonstration.
Posons le changement de variable $\psi : u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{\ln(x)}$. La fonction ψ est :

× de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.

× une bijection strictement croissante de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$.

(notons que comme $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ et ainsi $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(u)}{\ln(x)} = +\infty$)

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}\, du$ est convergente par hypothèse, le changement de variable est licite :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right) dt &= \int_1^0 f\left(x^{\psi(u)}\right) \psi'(u)\, du \\ &= \int_1^0 f\left(\mathrm{e}^{\psi(u)\ \ln(x)}\right) \psi'(u)\, du \\ &= \int_1^0 f\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{\cancel{\ln(x)}}\ \cancel{\ln(x)}}\right) \frac{1}{\ln(x)}\ \frac{1}{u}\, du \\ &= \frac{1}{\ln(x)} \int_1^0 \frac{f\left(\mathrm{e}^{\ln(u)}\right)}{u}\, du \\ &= -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0,1[, \text{ la quantité } G(x) \text{ est bien définie et } G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\, du.}$$

Commentaire

- On aurait pu présenter ce changement de variable comme en question ***6*** en posant $\boxed{u = x^t}$. Notons que cette manière de faire fait apparaît la fonction $t \mapsto x^t$, réciproque de la fonction ψ.
- L'intégrale qu'on souhaite obtenir par changement de variable étant fournie dans l'énoncé, on peut aussi partir de cette intégrale résultat et poser le changement de variable $\varphi : t \mapsto x^t$ (fort logiquement on utilise la bijection réciproque de ψ puisque l'on opère dans l'autre sens) ou encore $\boxed{t = \dfrac{\ln(u)}{\ln(x)}}$.

$\square$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'encadrement : $\displaystyle\int_n^{n+1} f\left(x^t\right)\,dt \leqslant f\left(x^n\right) \leqslant \int_{n-1}^{n} f\left(x^t\right)\,dt.$

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Remarquons tout d'abord que pour tout $t \in [m, m+1]$:

$$\begin{array}{lccccccl}
 & m & \leqslant & t & \leqslant & m+1 & & \\
\text{donc} & m\ \ln(x) & \geqslant & t\ \ln(x) & \geqslant & (m+1)\ \ln(x) & & \textit{(car } \ln(x) < 0 \textit{ puisque } x \in \,]0,1[\textit{)} \\
\text{donc} & \mathrm{e}^{m\ \ln(x)} & \geqslant & \mathrm{e}^{t\ \ln(x)} & \geqslant & \mathrm{e}^{(m+1)\ \ln(x)} & & \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\text{donc} & x^m & \geqslant & x^t & \geqslant & x^{m+1} & & \\
\text{donc} & f\left(x^m\right) & \geqslant & f\left(x^t\right) & \geqslant & f\left(x^{m+1}\right) & & \textit{(car la fonction } f \textit{ est croissante sur } [0,1[\textit{)}
\end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_m^{m+1} f\left(x^m\right)\,dt & \geqslant & \displaystyle\int_m^{m+1} f\left(x^t\right)\,dt & \geqslant & \displaystyle\int_m^{m+1} f\left(x^{m+1}\right)\,dt \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\left((\cancel{m}+1) - \cancel{m}\right)\ f\left(x^m\right) & & & & \left((\cancel{m}+1) - \cancel{m}\right)\ f\left(x^{m+1}\right)
\end{array}$$

En appliquant cette propriété en $m = n \in \mathbb{N}^*$ et $m = n-1 \in \mathbb{N}^*$, on obtient succesivement l'inégalité de gauche puis celle de droite.

$\square$

c) En déduire l'existence de la somme $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f\left(x^n\right)$ ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x.

Démonstration.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\int_n^{n+1} f\left(x^t\right)\,dt\right) & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f\left(x^n\right) & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\int_{n-1}^{n} f\left(x^t\right)\,dt\right) \\
\shortparallel & & & & \shortparallel \\
\displaystyle\int_1^{N+1} f\left(x^t\right)\,dt & & & & \displaystyle\int_0^{N} f\left(x^t\right)\,dt
\end{array}$$

(par relation de Chasles)

- Par ailleurs, comme la fonction f est positive, alors, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f\left(x^t\right) \geqslant 0$.
  On en déduit, par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_N^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \geqslant 0$ et ainsi :
$$\int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \ = \ \int_0^N f\left(x^t\right)\ dt + \int_N^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \ \geqslant \ \int_0^N f\left(x^t\right)\ dt$$
- La suite $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} f\left(x^n\right)\right)_{N \geqslant 1}$ est :
  × croissante (car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(x^n\right) \geqslant 0$).
  × majorée. En effet, d'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=1}^{N} f\left(x^n\right) \ \leqslant \ \int_0^N f\left(x^t\right)\ dt \ \leqslant \ \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt$$
  Elle est donc convergente.
- Par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans l'inégalité de début de question, on obtient :
$$\int_1^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \ \leqslant \ \sum_{n=1}^{+\infty} f\left(x^n\right) \ \leqslant \ \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \,]0,1[,\ \int_1^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \ \leqslant \ F(x) \ \leqslant \ \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt.}$$
□

d) En déduire : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ (1-x)\ F(x) \ = \ \displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du$.

Démonstration.
- D'après la question qui précède, pour tout $x \in \,]0,1[$:
$$\int_1^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt \ \leqslant \ F(x) \ \leqslant \ \int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt$$
  Comme : $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt = \int_0^1 f\left(x^t\right)\ dt + \int_1^{+\infty} f\left(x^t\right)\ dt$, on en déduit :
$$G(x) - \int_0^1 f\left(x^t\right)\ dt \ \leqslant \ F(x) \ \leqslant \ G(x)$$
  puis, comme $1 - x \geqslant 0$:
$$(1-x)\ G(x) - (1-x) \int_0^1 f\left(x^t\right)\ dt \ \leqslant \ (1-x)\ F(x) \ \leqslant \ (1-x)\ G(x) \qquad (*)$$
- D'après la question ***9.a)*** :
$$(1-x)\ G(x) \ = \ (1-x)\ \frac{-1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du$$
  En posant le changement de variable $v = x - 1$: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ -\dfrac{1-x}{\ln(x)} = \lim\limits_{\substack{v \to 0 \\ v > 0}} \ -\dfrac{v}{\ln(1-v)}$. Or :
$$-\frac{v}{\ln(1-v)} \underset{v \to 0}{\sim} -\frac{v}{-v} = 1 \underset{v \to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par produit de limites : } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ (1-x)\ G(x) \ = \ \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du.}$$

- Par ailleurs, à l'aide du même changement de variable qu'en question ***9.a)***, on démontre :

$$(1-x)\int_0^1 f\left(x^t\right)\,dt \;=\; -\frac{1-x}{\ln(x)}\int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,du$$

Or, par relation de Chasles :

$$\int_x^1 \frac{f(u)}{u}\,du \;=\; \int_x^0 \frac{f(u)}{u}\,du + \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du \;\underset{x\to 1}{\longrightarrow}\; \int_1^0 \frac{f(u)}{u}\,du + \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\int_0^1 f\left(x^t\right)\,dt = 1\times 0 = 0.}$$

- Résumons :

× $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\,G(x) \;=\; \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$

× $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left((1-x)\,G(x)-(1-x)\int_0^1 f\left(x^t\right)\,dt\right) \;=\; \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du$

On en déduit, par théorème d'encadrement (à l'aide de l'encadrement $(*)$), que la fonction F admet une limite à gauche en 1.

$$\boxed{\text{Plus précisément : } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\,F(x) \;=\; \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,du.}$$

□

10. Un dernier exemple

Dans cette question, on pose $F_2(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-x^n\right)$.

a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\,]0,1[$. Montrer que la fonction $f_n : x\mapsto -\ln\left(1-x^n\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,a]$ et : $\forall x\in[0,a], |\,f_n'(x)\,| \;\leqslant\; \dfrac{n\,a^{n-1}}{1-a^n}$.

Démonstration.

- La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$ car elle est la composée $f_n = -g\circ h_n$ où :
  × $h_n : x\mapsto 1-x^n$ est :
    ▸ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$.
    ▸ telle que $h_n\big([0,a]\big)\subset\,]0,1]$
  × $g : x\mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$.

- Pour tout $x\in[0,a]$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -\big(\,g'\circ h_n\times h_n'\,\big)(x)\\ &= -g'\big(h_n(x)\big)\times h_n'(x)\\ &= \cancel{-}\frac{1}{1-x^n}\times\big(\cancel{-}n\,x^{n-1}\big)\end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$|\,f_n'(x)\,| \;=\; \left|\frac{n\,x^{n-1}}{1-x^n}\right| \;=\; \frac{n}{1-x^n}\times x^{n-1} \;\leqslant\; \frac{n}{1-x^n}\times a^{n-1}$$

(car $x\leqslant a$ et que la fonction $x\mapsto x^{n-1}$ est croissante sur $[0,a]$)

- Enfin, par croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $[0, a]$:

$$\begin{array}{lrcll} & x^n & \leqslant & a^n & \\ \text{donc} & -x^n & \geqslant & -a^n & \\ \text{donc} & 1 - x^n & \geqslant & 1 - a^n & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{1 - x^n} & \leqslant & \dfrac{1}{1 - a^n} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0, a], |\, f_n'(x) \,| \ \leqslant \ \frac{n\, a^{n-1}}{1 - a^n}}$$

□

b) En déduire que la fonction F_2 est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une somme de série de fonctions.

Démonstration.
Il s'agit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme.

a) $\boxed{\text{Régularité}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1[$.

b) $\boxed{\text{Convergence simple}}$

Soit $x_0 \in [0, 1[$.

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${x_0}^n \geqslant 0$

× $|\, f_n(x_0) \,| \ = \ \left| -\ln\left(1 - {x_0}^n\right) \right| \underset{n \to +\infty}{\sim} |\cancel{-}(\cancel{-}{x_0}^n)\,| = {x_0}^n$
(puisque ${x_0}^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $x_0 \in [0, 1[$)

× La série numérique $\sum {x_0}^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $x_0 \in [0, 1[$.

Ainsi, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0, 1[$.

c) $\boxed{\text{Convergence uniforme}}$ (convergence normale sur tout segment)

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in [0, a], \ |\, f_n'(x) \,| \ \leqslant \ \frac{n\, a^{n-1}}{1 - a^n}$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\, f_n' \,\|_{\infty, [0, a]} \ \leqslant \ \dfrac{n\, a^{n-1}}{1 - a^n}$ $(**)$. Or :

× $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n\, a^{n-1}}{1 - a^n} \geqslant 0$

× $\dfrac{n\, a^{n-1}}{1 - a^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} n\, a^{n-1}$ puisque $a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

× La série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\, a^{n-1}$ est convergente en tant que série géométrique dérivée première de raison $a \in [0, 1[$.

On en déduit, par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n\, a^{n-1}}{1-a^n}$ est (absolument) convergente.

En appliquant le théorème de comparaison (par inégalité) des séries à termes positifs, on démontre, par l'inégalité $(**)$, que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \| f_n' \|_{\infty,[0,a]}$ est convergente.

Commentaire

On peut aussi remarquer directement : $\| f_n' \|_{\infty,[0,a]} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(n\, a^{n-1}\right)$ ce qui permet de conclure en appliquant une fois (et pas deux) le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Ainsi, par théorème de dérivation terme à terme, on en conclut que la fonction F_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$.

$$\boxed{\text{De plus, pour tout } x \in [0,1[,\ F_2'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).}$$

□

c) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ (1-x)\ F_2(x)$.

Démonstration.

- On vérifie qu'on se situe dans le cadre d'application de la question ***9***.
  La fonction $f : x \mapsto -\ln(1-x)$ est :
  × continue, croissante, positive et intégrable sur $[0,1[$ (vu en question ***7***).
  × telle que la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u} = -\dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1[$ (vu en question ***3***).
- On en déduit (d'après la question ***9.c)***) que pour tout $x \in\,]0,1[$ la quantité $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f\left(x^n\right)$ est bien définie. Or :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(x^n\right) \ = \ -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-x^n\right) \ = \ F_2(x)$$
  Finalement, d'après la question ***9***, la fonction $x \mapsto (1-x)\ F_2(x)$ admet une limite à gauche en 1. De plus :
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ (1-x)\ F_2(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\ du$$

$$\boxed{\text{Finalement, d'après la question } \mathit{3} : \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ (1-x)\ F_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

□

d) Par une méthode analogue à celle de ***9***, calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left((1-x)^2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\, x^n}{1-x^n} \right)$.

En déduire : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \ (1-x)^2\ F_2'(x)$.

Démonstration.

-
-

□

Problème 2

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le but du problème est d'étudier la réduction de certaines *matrices de Toeplitz*, c'est-à-dire de matrices d'ordre n de la forme suivante, où $(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$:

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

dans laquelle les coefficients diagonaux sont tous égaux à t_0, ceux de la première sur-diagonale tous égaux à t_1, ceux de la première sous-diagonale tous égaux à t_{-1}, etc.

On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \{T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \mid (t_k)_{-n+1 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1}\}$$

Partie 0 - Généralités

11. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
En donner une base et en préciser la dimension.

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \quad = \quad \{T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \mid (t_k)_{-n+1 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1}\}$$

Démonstration.

- Dans la suite, notons :
  - × $\big(e_{-n+1}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\big)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n-1}$.
  - × pour tout $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $T_k = T(e_k)$.
- Avec les notations précédentes :
  - × $T(e_0) = I_n$.
  - × pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $T(e_k)$ est la matrice qui contient des 1 sur la $k^{\text{ème}}$ sur-diagonale et des 0 partout ailleurs.
  - × pour tout $k \in [\![-(n-1), -1]\!]$, $T(e_k)$ est la matrice qui contient des 1 sur la $k^{\text{ème}}$ sous-diagonale et des 0 partout ailleurs.

  Pour tout $(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$, on obtient alors :

$$T\big(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\big) \;=\; \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} t_k \cdot T(e_k)$$

- Avec ces notations :

$$\begin{aligned} \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \quad &= \quad \left\{ \sum_{k=-(n-1)}^{(n-1)} t_k \cdot T(e_k) \mid (t_k)_{-n+1 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{C}^{2n-1} \right\} \\ &= \quad \mathrm{Vect}\,\big(T(e_{-(n-1)}), \dots, T(e_0), \dots, T(e_{n-1})\big) \\ &= \quad \mathrm{Vect}\,(\ T(1,0,\dots,0),\ T(0,1,0,\dots,0),\ \dots, T(0,\dots,1,0),\ T(0,\dots,0,1)\ ) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En particulier, } \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = \Big(T(1,0,\dots,0),\ T(0,1,0,\dots,0),\ \dots, T(0,\dots,1,0),\ T(0,\dots,0,1)\Big)$ est :
  × libre. Démontrons-le.
  Soit $(\lambda_{-(n-1)}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{(n-1)}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$. Supposons :
  $$\lambda_{-(n-1)} \cdot T(1,0,\dots,0) + \dots + \lambda_0 \cdot T(0,\dots,0,1,0,\dots,0) + \dots + \lambda_{n-1} \cdot T(0,\dots,0,1) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \quad (*)$$
  Or : $$(*) \ \Leftrightarrow \ T\big(\lambda_{-n+1}, \dots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\big) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  $$\Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{-1} & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_{-n+1} & \cdots & \cdots & \lambda_{-2} & \lambda_{-1} & \lambda_0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
  $$\Leftrightarrow \ \{\lambda_{-n+1} = \dots = \lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$
  × génératrice de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ d'après le point précédent.

  On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$.

  $$\boxed{\text{De plus : } \dim\big(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})\big) = \mathrm{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 2n-1.}$$ □

12. *Un exemple.* Soit N la matrice de Toeplitz dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la première sous-diagonale qui valent 1 :
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés.
La matrice N est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice N étant triangulaire (inférieure), ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(N) = \{0\}.}$$
- Démontrons que la matrice N n'est pas diagonalisable. On procède par l'absurde.
  Supposons que la matrice N est diagonalisable. Il existe donc :
  × $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inverisble.
  × $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de N (présentes avec multiplicité).

  telles que :
  $$\begin{aligned} N &= P \times D \times P^{-1} \\ &= P \times 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \times P^{-1} \qquad \textit{(car } \mathrm{Sp}(N) = \{0\}\textit{)} \\ &= 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \end{aligned}$$
  C'est impossible car $N \neq 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

  $$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } N \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

- Cette question illustre une formulation fréquente dans les énoncés de concours, à savoir :

  « La propriété [...] est-elle vérifiée ? »

  On retrouve par exemple régulièrement les questions suivantes :
  - « La matrice est-elle diagonalisable ? »
  - « La suite (croissante) (u_n) est-elle convergente ? »
  - « La série de fonctions converge-t-elle uniformément ? »
  - ...

  La réponse attendue est généralement : `NON`. Évidemment, pour obtenir des points, il convient de **démontrer** pourquoi la propriété étudiée n'est pas vérifiée. Pour ce faire, on procède généralement par l'absurde. On suppose alors que la propriété est vérifiée ce qui permet d'avoir une hypothèse supplémentaire utilisable et à terme d'aboutir à une contradiction.
- Précisons la méthode spécifique à cette question. Une matrice M à la fois diagonalisable et ne possèdant qu'une seule valeur propre λ est semblable à la matrice diagonale ne contenant que λ comme coefficient diagonal. Autrement dit, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = P \times D \times P^{-1} = P \,\big(\lambda I_n\big)\, P^{-1} = \lambda \,\left(P\, I_n\, P^{-1}\right) = \lambda \,\left(P\, P^{-1}\right) = \lambda\, I_n$$

  Ainsi, les matrices diagonalisables ne possédant qu'une seule valeur propre sont des matrices scalaires (elles sont égales à $\lambda\, I_n$ pour un certain λ).
- Comme annoncé dans le premier point, cette démonstration est souvent utilisée pour démontrer qu'une matrice `N`'est `PAS` diagonalisable.

$\square$

b) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice commutant avec N.

Montrer : $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1}\ N^{i-1}$.

On pourra commencer par considérer la colonne ME_1, puis les colonnes ME_k pour $k \in [\![2, n]\!]$, où $(E_1, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$M \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$$

(en multipliant M à droite par E_1, on obtient la $1^{\text{ère}}$ colonne de M)

De manière générale, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ le produit $M \times E_k$ permet d'obtenir la $k^{\text{ème}}$ colonne de M.

- D'autre part :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} = m_{1,1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + m_{n,1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot E_i \qquad (*)$$

- Remarquons par ailleurs que la matrice N est la concaténation des matrices E_2, E_3, …, E_n et la colonne nulle.

$$N = \begin{pmatrix} E_2 & E_3 & \ldots & E_n & 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{pmatrix}$$

On en déduit alors pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$ (rigoureusement, il faudrait faire une récurrence) :

$$\begin{aligned} N^j \times E_1 &= N^{j-1} \times \Big(N E_1\Big) \\ &= N^{j-1} \times E_2 && \textit{(la multiplication à droite par } E_1 \textit{ a pour résultat la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne de } N \textit{ qui n'est autre que } E_2\textit{)} \\ &= N^{j-2} \times \Big(N E_2\Big) \\ &= N^{j-2} \times E_3 && \textit{(la multiplication à droite par } E_2 \textit{ a pour résultat la } 2^{\text{ème}} \textit{ colonne de } N \textit{ qui n'est autre que } E_3\textit{)} \\ &= \ldots \\ &= N^0 \times E_{j+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall j \in [\![0, n-1]\!],\ N^j \times E_1 = I_n \times E_{j+1} = E_{j+1} \quad \text{ou encore : } \ \forall i \in [\![1, n]\!],\ N^{i-1} \times E_1 = E_i.}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned} M \times E_1 &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot E_i && \textit{(d'après } (*)\textit{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot \Big(N^{i-1} \times E_1\Big) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot N^{i-1}\right) \times E_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les matrices } M \text{ et } R = \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot N^{i-1} \text{ ont même première colonne.}}$$

- Pour démontrer que M et R coïncident, il suffit alors de démontrer que les autres colonnes de M est R coïncident. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$\begin{aligned} M \times E_k &= M \times \Big(N^{k-1} \times E_1\Big) \\ &= N^{k-1} \times \Big(M \times E_1\Big) && \textit{(car } M \textit{ commute avec } N \textit{ et donc avec toute puissance de } N\textit{)} \\ &= N^{k-1} \times \Big(R \times E_1\Big) && \textit{(d'après le résultat précédent)} \\ &= R \times \Big(N^{k-1} \times E_1\Big) && \textit{(car } R \textit{ est une combinaison linéaire de puissances de la matrice } N \textit{ et commute donc avec } N^{k-1}\textit{)} \\ &= R \times E_k \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Finalement, toutes les colonnes de } M \text{ et } R = \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot N^{i-1} \text{ coïncident.} \\ \text{Ces deux matrices sont donc égales.} \end{array}} \quad \square$$

c) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.

Démonstration.

- Il s'agit de démontrer :

$$\begin{aligned} &\left\{ \ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM \ \right\} \\ = \ &\left\{ \ T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists \big(t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0\big) \in \mathbb{C}^n, \ T = (t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) \ \right\} \end{aligned}$$

- On procède par double inclusion.

($\subset$) On a vu dans la question précédente que si M et N commutent alors $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot N^{i-1}$.
Il suffit alors de remarquer :
× $N^0 = I_n = T(e_0)$.
× $N^1 = T(e_{-1})$, matrice qui contient des 1 dans la première sous-diagonale et des 0 ailleurs.
× $N^2 = T(e_{-2})$, matrice qui contient des 1 dans la deuxième sous-diagonale et des 0 ailleurs.
× ...
× $N^{n-1} = T(e_{-(n-1)})$, matrice qui contient 1 dans la $(n-1)^{\text{ème}}$ sous-diagonale et des 0 ailleurs (c'est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en bas à gauche est 1 et dont les autres coefficients sont 0).

Finalement :

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} \cdot N^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1,1} \cdot N^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1,1} \cdot T(e_{-i}) \\ &= T\left(\sum_{i=0}^{n-1} m_{i+1,1} \cdot e_{-i} \right) \\ &= T\big(m_{n,1}, m_{n-1,1}, \dots, m_{1,1}, 0, \dots, 0 \big) \end{aligned}$$

D'où la première inclusion.

($\supset$) Il suffit de remarquer que pour tout $\big(t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0\big) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} T\big(t_{-(n-1)}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0 \big) &= T\left(\sum_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot e_{-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot T(e_{-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t_{-i} \cdot N^{i} \end{aligned}$$

Comme cette matrice est une combinaison linéaire de puissances de N, elle commute avec N. D'où l'inclusion réciproque. □

Partie 1 - Cas de la dimension 2

13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz d'ordre 2, où (a, b, c) sont des complexes.

a) Donner le polynôme caractéristique de A.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det\big(X\, I_2 - A\big) \\ &= \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-a \end{vmatrix} \\ &= (X-a)\,(X-a) - (-b)\,(-c) \\ &= X^2 - 2\,aX + (a^2 - bc) \end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_A(X) = X^2 - 2\,aX + (a^2 - bc)}$$

Commentaire

Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, on pouvait aussi utiliser la formule :

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)\, X + \det(A)$$

□

b) Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Démonstration.

- Déterminons le discriminant de χ_A.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\,a)^2 - 4\,(1)\,(a^2 - bc) \\ &= \cancel{4\,a^2} - \cancel{4\,a^2} + 4\,bc \end{aligned}$$

- Deux cas se présentent.
  × Si $bc \neq 0$, alors χ_A admet deux racines complexes distinctes :

$$z_1 = \frac{2\,a + \big(bc\big)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2\,a - \big(bc\big)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

  Ainsi $\operatorname{Sp}(A) = \{z_1, z_2\}$.

La matrice A est carrée d'ordre 2 et possède 2 valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.

  × Si $bc = 0$ (c'est-à-dire si $b = 0$ ou $c = 0$) alors $\chi_A(X) = X^2 - 2\,a\;X + a^2 = (X-a)^2$.
  Dans ce cas, a est racine double de χ_A et donc $\operatorname{Sp}(A) = \{a\}$.
  La matrice A ayant une seule valeur propre :

$$\begin{aligned} A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow A \text{ est une matrice scalaire} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe } \lambda \in \mathbb{C},\ A = \lambda \cdot I_2 \\ &\Leftrightarrow b = 0 \ \ \texttt{ET} \ \ c = 0 \end{aligned}$$

*(en procédant comme en question **12.a)**)*

Finalement $A = T(c, a, b)$ est diagonalisable si et seulement si $bc \neq 0$ `OU` $b = c = 0$.

□

14. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si M admet deux valeurs propres distinctes α et β alors, étant carrée d'ordre 2, elle est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, } M \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.}$$

- Si M admet une seule valeur propre α alors deux nouveaux cas se présentent.
  - × soit M est diagonalisable et dans ce cas c'est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $\alpha \cdot I_2$. En particulier, elle est semblable à elle-même.
  - × soit M n'est pas diagonalisable et dans ce cas elle est quand même trigonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\gamma \neq 0$ (pour ne pas retomber dans le cas précédent).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans ces deux cas, } M \text{ est semblable à une matrice de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ \text{(avec } \gamma \text{ éventuellement nul).}\end{array}}$$

□

b) En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. D'après la question précédente, deux cas se présentent

- Si M est semblable à un matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ alors M est bien semblable à une matrice de Toeplitz puisque $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = T(0, \alpha, \gamma)$.

- Sinon, M est semblable à un matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

  On a vu en question ***13.b)*** que toute matrice $T(c, a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ telle que $bc \neq 0$ est semblable à la matrice définie par :

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad z_1 = a + \frac{1}{2}\,(bc)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = a - \frac{1}{2}\,(bc)^{\frac{1}{2}}$$

  Notons alors $a = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $b = c = \alpha - \beta$, on obtient que $T(c, a, b)$ est semblable à :

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} z_1 & = & a + \frac{1}{2}\,(bc)^{\frac{1}{2}} \\ & = & \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\,\left((\alpha-\beta)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ & = & \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\,(\alpha-\beta) \\ & = & \alpha \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} z_2 & = & a - \frac{1}{2}\,(bc)^{\frac{1}{2}} \\ & = & \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\,\left((\alpha-\beta)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ & = & \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\,(\alpha-\beta) \\ & = & \beta \end{array}$$

La relation de similitude étant symétrique, cela démontre que la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice de Toeplitz $T(\alpha-\beta, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha-\beta)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans ce cas, } M \text{ est semblable à une matrice diagonale qui est elle-même} \\ \text{semblable à } T(\alpha-\beta, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha-\beta) \text{ et par transitivité de la relation de similitude,} \\ M \text{ est semblable à } T(\alpha-\beta, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha-\beta).\end{array}}$$

□

Partie 2 - Un cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de type $T(0,\dots,0,t_{-1},t_0,t_1,0,\dots,0)$, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a,b,c) sont des complexes.

On fixe (a,b,c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a,b,c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a,b,c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

15. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1,\dots,x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

16. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation :

$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \tag{1}$$

17. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

18. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que $\dfrac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, ensemble des racines $(n+1)$-èmes de l'unité.

19. En utilisant l'équation (1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et r_1+r_2.
En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :

$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \tag{2}$$

20. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0,n+1]\!]$, $x_k = 2i\ \alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

21. Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.