DS7 (CB)

Exercice I

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

1. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

Exercice II

2. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}\big(\{X = i, Y = j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

b) Démontrer que les variables X et Y suivent une même loi que l'on déterminera.

c) Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

Problème

Partie préliminaire

4. ***a)*** Soit $x \in\,]0, +\infty[$. Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b) On note alors, pour tout $x \in\,]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, dt$ (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer : $\forall x \in\,]0, +\infty[, \Gamma(x) > 0$.

c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\, dt - \frac{1}{n}$.

a) Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée constante d'Euler).

Dans la suite de ce problème, on définit, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

6. Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in]0,n],\ f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \quad \text{et pour tout} \quad t \in]n,+\infty[,\ f_n(t)=0$$

a) Démontrer que, pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leqslant -x$.
En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $t \in]0,+\infty[$,

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$$

b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$$

7. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n\, u^{x-1}\, du$.

a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geqslant 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

c) Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\; n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} \quad \text{(formule de Gauss)}$$

8. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note toujours $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = \mathrm{e}^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{\frac{-x}{k}}\right)$, démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)} = x\mathrm{e}^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{x}{k}\right)\mathrm{e}^{\frac{-x}{k}}\right)$ (formule de Weierstrass).

9. ***a)*** En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

b) On pose, pour tout $x \in]0,+\infty[$: $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$. Démontrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

c) En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \displaystyle\frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$.

On rappelle que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

10. ***a)*** Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\, dt$.

b) Calculer, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x+1)-\psi(x)$, puis démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

c) On pose, pour tout $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \dfrac{1}{k+y+1} - \dfrac{1}{k+y+x}$.

Démontrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} j_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \psi(x+n) - \psi(1+n)$.

11. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

× $f(1) = -\gamma$,

× pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$,

× pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

12. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

- On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

  si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne avec k
  nouvelles boules toutes numérotées k

- Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus trois nouvelles boules numérotées 3).
- On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.
- On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X)$.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que, pour tout entier naturel non nul k

$$\mathbb{P}\big(\,\{Y = k\}\,\big) = \frac{1}{n}\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k}\right)$$

c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$. On pourra utiliser sans démonstration :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1))$$