DS7 (CB) /78

Exercice I /4

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

1. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

- **2 pts : si la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ est solution de (E) alors :**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big((n^2 - 2n + 2)\, a_n + (n-1)\, a_{n-1}\big)\, x^n + 2\, a_0$$

- **1 pt : par unicité du DSE :** $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1-n}{1+(n-1)^2}\ a_{n-1} \end{array}\right.$
- **1 pt : par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. D'où S est la fonction nulle.**

Exercice II /8

2. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

- **1 pt : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{i+j}{2^{i+j}} \geqslant 0$ (on peut donc travailler sous réserve de convergence)**
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{i+j}{2^{i+j}} = \dfrac{i}{2^i} \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^j} + \dfrac{1}{2^i} \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{j}{2^j} = \dfrac{i+1}{2^{i-1}}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{i+1}{2^{i-1}} = 8$

3. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}\big(\{X = i, Y = j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

- **1 pt : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{i+j}{2^{i+j+3}} \geqslant 0$ et, d'après la question précédente :**

$\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{i+j}{2^{i+j+3}}\right) = \dfrac{1}{8} \times 8 = 1$

b) Démontrer que les variables X et Y suivent une même loi que l'on déterminera.

- **2 pts : loi de X**
  - $\times$ **1 pt : FPT sur le SCE $\big(\{Y=j\}\big)_{j\in\mathbb{N}}$:**

$$\mathbb{P}\big(\{X=i\}\big) \;=\; \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) \;=\; \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}}$$

  - $\times$ **1 pt : $\mathbb{P}\big(\{X=i\}\big)=\dfrac{i+1}{2^{i+2}}$ (même calcul qu'en question *2.*)**
- **1 pt : FPT sur le SCE $\big(\{X=i\}\big)_{i\in\mathbb{N}}$**

$$\mathbb{P}\big(\{Y=j\}\big) \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) \;=\; \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} \;=\; \mathbb{P}\big(\{X=j\}\big)$$

c) Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

- **1 pt : $\mathbb{P}\big(\{X=0\}\cap\{Y=0\}\big)=0\neq\dfrac{1}{16}=\mathbb{P}\big(\{X=0\}\big)\times\mathbb{P}\big(\{Y=0\}\big)$**

Problème /66

Partie préliminaire

4. a) Soit $x\in\,]0,+\infty[$. Démontrer que la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.**
- **2 pts : intégrabilité en 0**
  - $\times$ **1 pt : $\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$**
  - $\times$ **1 pt : critère d'équivalence d'intégrales généralisées de fonctions continues positives ($\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant $1-x<1$)**
- **1 pt : intégrabilité en $+\infty$ ($\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ + critère de négligeabilité)**

b) On note alors, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt$ (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer : $\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \Gamma(x)>0$.

- **1 pt : la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$**

c) Démontrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

- **1 pt : hypothèse de régularité : la fonction $\underline{h}_t : x\mapsto \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : hypothèse d'intégrabilité : $t\mapsto \underline{h}_x(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question *4.a)***

- **3 pts : hypothèse de domination sur un segment** $[a, b]$
  - × **1 pt : domination sur le segment** $[a, b]$ **:** $\left|\underline{h}'_t(x)\right| \leqslant \varphi(t)$ **où**

$$\varphi : t \mapsto \begin{cases} \left|\ln(t)\right| \mathrm{e}^{-t}\, t^{a-1} & \textbf{si } t \leqslant 1 \\ \ln(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, t^{b-1} & \textbf{si } t > 1 \end{cases}$$

  - × **1 pt :** $\varphi(t) = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ + **critère de négligeabilité**
  - × **1 pt :** $\varphi(t) = \underset{t \to 0}{o}\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ + **critère de négligeabilité**

5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\, dt - \frac{1}{n}$.

a) Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

- **2 pts : soit démonstration complète de la comparaison série-intégrale (sur la fonction** $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$**), soit :**
  - × **1 pt : citation du théorème de comparaison série-intégrale**
  - × **1 pt : démonstration de ses hypothèses (**f **continue, décroissante, positive sur** $]0, +\infty[$**)**

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

- **1 pt : par relation de Chasles,** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - H_n$
- **1 pt : d'après la question précédente, la série** $\sum\ u_n$ **converge. Donc la suite** (H_n) **converge**

La limite de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée constante d'Euler).

Dans la suite de ce problème, on définit, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

6. Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in]0, n], f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \quad \text{et pour tout} \quad t \in]n, +\infty[, f_n(t) = 0$$

a) Démontrer que, pour tout $x < 1$, $\ln(1 - x) \leqslant -x$.
En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}$$

- **1 pt : la fonction** $\ln$ **est concave sur** $\mathbb{R}_+^*$**. Son graphe est donc situé en dessous de ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse** 1**. D'où :** $\forall t \in]0, +\infty[$**,** $\ln(t) \leqslant 1 + t$**. Ainsi :** $\forall x \in] - \infty, 1[$**,** $\ln(1 - t) \leqslant -t$

- **3 pts :** $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}$ **(2 pts : encadrement sur** $]0,n]$**, 1 pt : encadrement sur** $]n,+\infty[$**)**
  - $\times$ **1 pt : comme** $\dfrac{t}{n} < 1$ **(car** $t \in\ ]0,n]$**), alors** $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t}{n}$
  - $\times$ **1 pt : par croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**, et comme** $t^{x-1} \geqslant 0$**, on obtient l'encadrement sur** $]0,n]$
  - $\times$ **1 pt : encadrement sur** $]n,+\infty[$

b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{x-1}\ dt$$

- **3 pts : hypothèse de convergence simple :** $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}$
  - $\times$ **1 pt : pour tout** $t \in\ ]0,+\infty[$**, il existe** $n_0 \in \mathbb{N}$ **tel que :** $\forall n \geqslant n_0$**,** $t \in\ ]0,n]$
  - $\times$ **2 pts : démonstration de** $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}$
- **1 pt : hypothèse de domination : d'après la question précédente** $\left|f_n(t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}$**, et d'après la question *4.a)*, la fonction** $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$

7. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in\ ]0,+\infty[$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n\ u^{x-1}\ du$.

a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geqslant 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

- **2 pts : existence de** $I_n(x)$
  - $\times$ **1 pt : la fonction** $u \mapsto (1-u)^n\ u^{x-1}$ **est continue sur** $]0,1]$**. L'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n\ u^{x-1}\ du$ **est donc uniquement impropre en** 0
  - $\times$ **1 pt :** $(1-u)^n\ u^{x-1} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1-x}}$ **+ critère d'équivalence**
- **2 pts :** $I_n(x) = \dfrac{n}{x}\ I_{n-1}(x+1)$
  - $\times$ **1 pt : IPP**
  - $\times$ **1 pt : le crochet et l'intégrale sont convergents**

b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in\ ]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

- **3 pts :** $I_n(x) = \dfrac{n!}{x\,(x+1)\ \cdots\ (x+n)}$ **par récurrence**
  - $\times$ **1 pt : initialisation** $I_0 = \dfrac{1}{x}$
  - $\times$ **2 pts : hérédité à l'aide de la relation de la question précédnte**

c) Démontrer que, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\ n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)} \quad \text{(formule de Gauss)}$$

- **2 pts :** $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{x-1}\ dt = n^x\ I_n(x)$
  - $\times$ **1 pt : changement de variable** $\boxed{u = \dfrac{t}{n}}$
  - $\times$ **1 pt :** $t \mapsto \dfrac{t}{n}$ **est bijective, de classe** $\mathcal{C}^1$**, strictement croissante sur** $]0,n]$
- **1 pt : conclusion avec *6.b)* et *7.b)***

8. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note toujours $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \,]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{n^x} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) e^{\frac{-x}{k}}\right)$, démontrer que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$: $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) e^{\frac{-x}{k}}\right)$ (formule de Weierstrass).

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{x\, H_n} = \mathbf{e}^{x \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \, \mathbf{e}^{-x \ln(n)} = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{\frac{x}{k}}\right) \times \dfrac{1}{n^x}$**, ce qui démontre l'indication**
- **1 pt :** $\dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}{n!} = x \, \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+x)}{\prod\limits_{k=1}^{n} k} = x \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{x}{k}\right)$
- **1 pt : d'après l'indication et la question précédente :**
$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \to +\infty} x \, \mathbf{e}^{x\, H_n} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) \mathbf{e}^{-\frac{x}{k}}\right)$$
- **1 pt : par continuité de l'exponentielle en** $x\,\gamma$ **:** $\mathbf{e}^{x\, H_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}^{x\, \gamma}$**, puis conclusion**

9. a) En déduire que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}\right)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

- **2 pts : peu importe la méthode :**
  × **soit en remarquant** $\left|\ln\left(1 + \dfrac{x_0}{k}\right) - \dfrac{x_0}{k}\right| \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{x_0^2}{2k^2}$ + **critère d'équivalence des SATP,**
  × **soit en remarquant que, d'après la question précédente :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) \mathbf{e}^{-\frac{x}{k}}\right) = \dfrac{1}{x\, \mathbf{e}^{\gamma\, x}\, \Gamma(x)}$**, puis en utilisant la continuité de** $\ln$ **en** $\dfrac{1}{x\, \mathbf{e}^{\gamma\, x}\, \Gamma(x)} > 0$ **(d'après *4.b)*)**

b) On pose, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$: $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) - \dfrac{x}{k}\right)$. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

- **1 pt : en notant** $g_n : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$**, d'après la question précédente, la série** $\sum g_n$ **CVS sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,** g_n **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : la série** $\sum g_n'$ **CVU sur tout segment** $[a, b] \subset \,]0, +\infty[$ **car** $\|g_n'\|_{\infty, [a,b]} \leqslant \dfrac{b}{k^2}$**. Ainsi** $\sum g_n'$ **CVN donc CVU sur** $[a, b]$
- **1 pt :** $g' : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k+x} - \dfrac{1}{k}\right)$

c) En déduire que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{-1}{x} - \gamma + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}\right)$.

On rappelle que, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

- **1 pt : d'après *9.a)*,** $g : x \mapsto -\ln\left(\Gamma(x)\, x\, \mathbf{e}^{\gamma\, x}\right) = -\ln\left(\Gamma(x)\right) - \ln(x) - \gamma\, x$**.**
  Donc $g' : x \mapsto -\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \dfrac{1}{x} - \gamma$
- **1 pt : d'après la qst précédente,** $\psi : x \mapsto -g'(x) - \dfrac{1}{x} - \gamma = -\dfrac{1}{x} - \gamma + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}\right)$

10. a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\ dt$.

- **1 pt :** $\psi(1) = -1-\gamma+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = -1-\gamma+1 = -\gamma$ **(par télescopage)**
- **1 pt :** $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ dt = 1$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t)\ dt = \Gamma'(1) = \psi(1)\,\Gamma(1) = -\gamma$

b) Calculer, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$, $\psi(x+1)-\psi(x)$, puis démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

- **1 pt : d'après *9.c)***

$$\psi(x+1)-\psi(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+1+x}\right) = \frac{1}{x}$$

- **1 pt : par sommation télescopique,** $\psi(n)-\psi(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\big(\psi(k+1)-\psi(k)\big) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$**, d'où le résultat (d'après la question précédente :** $\psi(1) = -\gamma$**)**

c) On pose, pour tout $(x,y) \in\ ]0,+\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \dfrac{1}{k+y+1}-\dfrac{1}{k+y+x}$.

Démontrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi(x+n)-\psi(1+n)$.

- **2 pts :** $\sum\ j_k$ **CVN donc CVU sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt :** $j_k(y) = \dfrac{x-1}{(k+y+1)\,(k+y+x)}$ **donc :** $\|j_k\|_{\infty,\ ]0,+\infty[} \leqslant \dfrac{|x-1|}{(k+1)\,(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x-1|}{k^2}$
  - × **1 pt : critère de comparaison des SATP**
- **1 pt :** $\psi(x+n)-\psi(1+n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n)$
- **1 pt : par théorème d'interversion** $\sum$ / lim **, on obtient :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi(x+n)-\psi(1+n) = 0$
  - × $\sum\ j_k$ **CVU sur** $]0,+\infty[$
  - × $\forall k \in \mathbb{N}$, $j_k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

11. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :
× $f(1) = -\gamma$,
× pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$, $f(x+1) = f(x)+\dfrac{1}{x}$,
× pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x+n)-f(1+n)) = 0$.

- **3 pts : analyse (on démontre que si f vérifie les 3 conditions, alors f vérifie la formule de ψ établie en *9.c)*)**
  - × **1 pt : comme** $f(x+1)-f(x) = \dfrac{1}{x}$**, alors :**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\big(f(k+1)-f(k)\big)+\sum_{k=1}^{n}\big(f(k+x)-f(k+x+1)\big)\\ &= f(n+1)-f(1)+f(1+x)-f(n+x+1)\end{aligned}$$

$\times$ **1 pt : d'après les conditions vérifiées par f :**

$$\begin{aligned} f(n+1)-f(1)+f(1+x)-f(n+x+1) &= f(x+1)+\gamma-\big(f(x+1+n)-f(1+n)\big) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x+1)+\gamma \;=\; f(x)+\frac{1}{x}+\gamma \end{aligned}$$

$\times$ **1 pt : comme f vérifie la relation de *9.c)*, alors c'est la fonction ψ**

- **1 pt : synthèse (d'après *10.a)*, *10.b)* et *10.c)*, la fonction ψ satisfait bien les trois conditions souhaitées)**

Autour de la fonction Digamma

12. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

- On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

  si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne avec k
  nouvelles boules toutes numérotées k

- Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus trois nouvelles boules numérotées 3).
- On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.
- On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X)$.

- **2 pts :** $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$
  - $\times$ **1 pt : l'espérience comporte n issues équiprobables numérotées de 1 à n**
  - $\times$ **1 pt : la v.a.r. X prend la valeur du numéro de l'issue obtenue.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que, pour tout entier naturel non nul k

$$\mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big) = \frac{1}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\frac{k}{n+k}\right)$$

- **0 pt :** $Y(\Omega) \subset \llbracket 1,n \rrbracket$
- **1 pt : FPT sur le SCE** $\big(\{X=i\}\big)_{i\in\llbracket 1,n\rrbracket}$
- **1 pt :** $\forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $\mathbb{P}\big(\{X=i\}\big) \neq 0$. **Ainsi :**

$$\mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\big)\,\mathbb{P}\big(\{X=i\}\big) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\big)$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{Y=k\} \mid \{X=i\}\big) = \begin{cases} \dfrac{k+1}{k+n} & \textbf{si } i=k \\ \dfrac{1}{i+n} & \textbf{si } i\neq k \end{cases}$ **. Donc :**

$$\mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big) \;=\; \frac{1}{n}\left(\frac{k}{k+n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n}\right)$$

- **1 pt : d'après *10.b)* :** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n} = \sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}-\gamma-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\gamma\right) = \psi(2n+1)-\psi(n+1)$

c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$. On pourra utiliser sans démonstration :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1))$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}\big(\{Y=k\}\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n\,(n+k)} + \frac{n+1}{2}\,\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big)$
- **1 pt : avec l'indication, on obtient :** $\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2}\,\big(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\big)$