DS8

L'usage de calculatrices est interdit.

Avertissement

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

et on pose $F = \operatorname{Vect}\left(I_3, A, A^2\right)$ et $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$.
Dans cet exercice, la transposée d'une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est notée $M^\top$.

Partie 1 - Réduction de la matrice A

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le spectre de A.

2. Déterminer les sous-espaces propres de A puis une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que P est orthogonale et $P^\top AP$ est diagonale.

Dans la suite, on pose $D = P^\top AP$.

Partie 2 - Étude de $\mathscr{C}(A)$

3. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que $F \subset \mathscr{C}(A)$.

5. Pour une matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, établir l'équivalence :

$$B \in \mathscr{C}(A) \Leftrightarrow P^\top BPD = DP^\top BP$$

6. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel de dimension 3.

7. Démontrer : $\mathscr{C}(A) = F$.

8. La matrice A^3 appartient-elle à F (on justifiera la réponse) ?

Partie 3 - Étude du projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\operatorname{Ker}(A)$

9. On note p le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur $\operatorname{Ker}(A)$ et B la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $B \in \mathscr{C}(A)$.

Exercice 2

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{\pi} \cos\big(x \sin(t)\big)\mathrm{d}t$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$$

10. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

11. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

12. Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ h(x,t) = \cos(t)\, \sin\big(x\, \sin(t)\big)$$

Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

13. En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{$\mathbf{E}$}$$

14. On suppose qu'il existe une solution de $(\mathbf{E})$ développable en série entière notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$

15. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

16. Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = \pi$.

17. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{2xt}-1}\, dt$$

18. Pour un réel $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\, dt$$

puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).

19. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F.

20. Soient a et b des réels avec $b > a > 0$. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$.
Que peut-on en déduire ?

21. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité :

$$\frac{1}{1+4\,n^2x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4\,t^2x^2}\,dt$$

puis établir que $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4\,t^2x^2}\,dt$.

22. Pour $x > 0$, démontrer de même l'inégalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,dt - 1 \leqslant F(x)$.

23. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

24. Étudier les variations de F puis représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.

25. Démontrer que G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

26. Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

27. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, établir la convergence l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt$$

et calculer sa valeur.

28. Démontrer que quels que soient $t > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{2xt}-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{e}^{-2nxt}$$

29. En déduire une relation entre F et G (on justifiera la réponse).

Exercice 4

- Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.
- Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.
- On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in \,]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$.
- On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée.
  On notera $Z = \max(X, Y)$.

30. On considère une journée où 4 clients se sont présentés.

a) Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires.

b) Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

31. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $\{N = n\}$ est réalisé ?

32. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

33. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

34. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

35. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$.

36. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k, x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbb{P}\big(\{Z \leqslant k\}\big)$ en fonction de $\lambda, S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1-p))$.

37. On utilise dans cette question le langage de programmation **Python**.

a) Définir la fonction $\mathrm{S(k, x)}$ qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.

b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}, \lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée.

Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.