DS3 - A

Problème 1 : Autour de la fonction sinus cardinal

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t)\, dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t)\, dt$$

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

- **1 pt : sin est dérivable sur** $[0, +\infty[$ **et :** $\forall x \in [0, +\infty[$**,** $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$
- **1 pt :** $\forall (x, y) \in [0, +\infty[\ \times [0, +\infty[,\ \left|\sin(y) - \sin(x)\right| \leqslant 1 \times |y - x|$
- **1 pt : on applique l'inégalité** $(*)$ **en** $x = t$ **et** $y = 0$

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

- **3 pts : la fonction** $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}\, dt$ **est définie sur** $]0, +\infty[$
  - × **1 pt :** $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\, e^{-xt}$ **est continue sur** $]0, +\infty[$ **et prolongeable par continuité en** 0
  - × **2 pts :** $\dfrac{|\sin(t)|}{t}\, e^{-xt} \leqslant e^{-xt}$ **+ théorème de comparaison des intégrales généralisées**
- **1 pt :** $\left|\sin(t)\, e^{-xt}\right| = \ldots \leqslant e^{-xt}$ **+ théorème de comparaison (**G **définie sur** $]0, +\infty[$**)**
- **1 pt :** $\left|\cos(t)\, e^{-xt}\right| = \ldots \leqslant e^{-xt}$ **+ théorème de comparaison (**H **définie sur** $]0, +\infty[$**)**

3. Montrer : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : Pour tout** $t \in]0, +\infty[$**,** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx} = 0$
  - × **1 pt : la fonction** $\ell : t \mapsto 0$ **est continue (par morceaux) sur** $]0, +\infty[$**.**
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : Pour tout** $x \in [1, +\infty[$**, la fonction** $t \mapsto \underline{f}_t(x)$ **est continue (p. m.) sur** $]0, +\infty[$**.**
  - × **1 pt :** $\left|\underline{f}_t(x)\right| \leqslant e^{-t}$ **et** $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ **intégrable sur** $]0, +\infty[$

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $t \in]0, +\infty[$**, la fonction** $\underline{f}_t : x \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}$ **est** $\mathscr{C}^1$ **sur** $]0, +\infty[$
  - × **0 pt :** $\underline{f}_t{}'(x) = \dfrac{\sin(t)}{t}\left(-t\, e^{-tx}\right) = -\sin(t)\, e^{-tx}$

- **4 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $x \in]0, +\infty[$**, la fonction** $t \mapsto \underline{f}_t^{(0)}(x) = \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-x\,t}$ **intégrable sur** $]0, +\infty[$
  - × **1 pt : pour tout** $x \in]0, +\infty[$**, la fonction** $t \mapsto \underline{f}_t'(x)$ **est continue (p. m.) sur** $]0, +\infty[$
  - × **2 pts :** $\left|\underline{f}_t'(x)\right| = \left|-\sin(t)\ \mathrm{e}^{-xt}\right| = |-1|\ |\sin(t)|\ \left|\mathrm{e}^{-xt}\right| = |\sin(t)|\ \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-a\,t}$
    et $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-a\,t}$ **est intégrable sur** $]0, +\infty[$

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \cos(\alpha t)\ dt$.

- **1 pt :** $H(x) + i\,G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-x)\,t}\ dt = \frac{1}{i-x}\ \Big[\ \mathrm{e}^{i\,t}\ \mathrm{e}^{-x\,t}\ \Big]_0^{+\infty}$
- **1 pt :** $\left|\mathrm{e}^{i\,t}\ \mathrm{e}^{-x\,t}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\,t}\right|\ \left|\mathrm{e}^{-x\,t}\right| = \mathrm{e}^{-x\,t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $H(x) + i\,G(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + i\ \dfrac{1}{1+x^2}$
- **1 pt : changement de variable** $\boxed{u = \alpha\,t}$ SOUS RÉSERVE DE CONVERGENCE
  $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \cos(\alpha t)\ dt = \int_0^{+\infty} \cos(u)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}\,u\,x} \times \frac{1}{\alpha}\ du = \frac{1}{\alpha}\ H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \cos(\alpha t)\ dt = \frac{1}{\alpha}\ H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \ldots = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$

6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

- **0 pt :** $\forall x \in]0, +\infty[$**,** $F'(x) = -G(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- **1 pt : ainsi il existe** $c \in \mathbb{R}$ **tq :** $\forall x > 0$**,** $F(x) = -\arctan(x) + c$ **et donc** $c = F(x) + \arctan(x)$
- **1 pt :** $c = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ \big(\ F(x) + \arctan(x)\ \big) = \lim_{x\to+\infty} F(x)\ +\ \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- **1 pt : ainsi** $\forall x > 0$**,** $F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$ **et** $F(1) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(1) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ $\left(= \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt\right)$

Partie II - Autour de la formule de Viète

7. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

- **0 pt : Soit** $t > 0$**. Par réc :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathscr{P}(n)$ **où** $\mathscr{P}(n)$ **:** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$
- **1 pt : intialisation** $\dfrac{\sin(t)}{2^1\ \sin\left(\frac{t}{2^1}\right)} = \dfrac{\sin\left(2\ \frac{t}{2}\right)}{2\ \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{2\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\ \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\ \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$ **par HR**
- **1 pt :** $= \dfrac{\sin(t)}{2^n \times 2\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\ \cancel{\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}} \times \cancel{\cos\left(\dfrac{t}{2^{n+1}}\right)}$

8. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$$

- **1 pt : initialisation** $\displaystyle\frac{1}{2^{1-1}} \sum_{k=1}^{2^1-1} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1}\, t\right) = \frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{2k-1}{2}\, t\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$ **par HR**
- **1 pt :** $\displaystyle= \ldots = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}\, t\right) + \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}\, t\right)\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{2^{(n+1)-1}} \sum_{k=1}^{2^{(n+1)-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\, t\right) = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\, t\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\, t\right) \right)$
- **1 pt :** $\displaystyle= \frac{1}{2^n} \left(\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2\,(2j)-1}{2^{n+1}}\, t\right) + \sum_{\ell=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2\,(\ell-1)-1}{2^{n+1}}\, t\right) \right)$

9. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \right)$$

- **1 pt : en combinant les résultats précédents :** $\displaystyle\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{\sin(t)}{2^n \times \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{2^n \times \frac{t}{2^n}} = \frac{\sin(t)}{t}$

10. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx}\ dt \right)$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \,]0, +\infty[,\ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \mathrm{e}^{-tx}$$

- **0 pt : l'idée est d'écrire** $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt \right) = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt$
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } n \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour** $t_0 > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\ t_0\right) \times \mathbf{e}^{-t_0\,x} \right) = \frac{\sin(t_0)}{t_0} \times \mathbf{e}^{-t_0\,x}$
  - × **1 pt : la fonction** $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} \times \mathbf{e}^{-t\,x}$ **est continue (par morceaux) sur** $]0, +\infty[$

- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **0 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.**
  - × **1 pt :** $\left| f_n(t) \right| = \left| \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\dfrac{2k-1}{2^n} \; t \right) \; \times \mathrm{e}^{-x\,t} \right| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\dfrac{2k-1}{2^n} \; t \right) \; \times \mathrm{e}^{-x\,t} \right|$
  - × **1 pt :** $= \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\dfrac{2k-1}{2^n} \; t \right) \right| \times \mathrm{e}^{-x\,t} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mathrm{e}^{-x\,t} = \dfrac{1}{\cancel{2^{n-1}}} \left(\cancel{2^{n-1}} \; \mathrm{e}^{-x\,t} \right)$
  - × **1 pt : la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\,t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x > 0$**

11. En déduire :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} \left(2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 \, + \, 2^{2n}} \right)$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} \; t \right) \; \mathrm{e}^{-t} \; dt = \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2^n} \right)^2 + 1^2} = \frac{(\, 2^n \,)^2}{(\, 2^n \,)^2 \left(\frac{(2k-1)^2}{(\, 2^n \,)^2} + 1 \right)} = \frac{2^{2n}}{(2k-1)^2 \; + \; 2^{2n}}$
- **1 pt : ainsi** $\displaystyle\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \; \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t \right) \mathrm{e}^{-t} \; dt = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \; \frac{1}{(2k-1)^2 \; + \; 2^{2n}}$
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{\pi}{4} \; = \; \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \; \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t \right) \mathrm{e}^{-t} \; dt \right)$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

12. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \right)$$

en écrivant cette quantité à l'aide une somme de Riemann.

- **1 pt :** $\displaystyle 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \; = \; \frac{2^{n+1}}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}} \right)^2 + 1} \; = \; \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}} \right)^2 + 1}$
- **0 pt : on définit pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle T_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\left(\frac{k}{m} \right)^2 + 1}$ et la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$**
- **1 pt : h continue sur $[0, 1]$, donc $(S_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ convergente et** $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} T_m = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} \; dt = \frac{\pi}{4}$
- **1 pt :** $\displaystyle 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}} \; + \; T_{2^{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \; - \; \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leqslant \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

- **1 pt :** $\displaystyle\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \; - \; \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| = \frac{\left| \, -4k + 1 \, \right|}{\left| 4k^2 + 2^{2n} \right| \; \left| (2k-1)^2 + 2^{2n} \right|}$
- **1 pt :** $\displaystyle\leqslant \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{\left(4k^2 + 2^{2n} \right) \; \left((2k-1)^2 + 2^{2n} \right)}$
- **1 pt :** $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \leqslant \frac{1}{1 + 2^{2n}}$

14. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question **??**.

- **1 pt :** $\left| 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)\right| \leqslant 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|$
- **1 pt :** $\leqslant 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{4\times 2^{n-1}+1}{\left(4k^2+2^{2n}\right)\ (1+2^{2n})} = \frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \times \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}\right)$
- **1 pt :** $\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \times \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **0 pt :** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n = 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)$
- **1 pt :** $2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} = \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}\right) - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} - 0$

Problème 2 : Les matrices de Kac

Notations et définitions

- Dans toute la suite, on note $\mathbb{K}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles carrées de taille n.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2=-1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !
- On dit qu'une matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Plus précisément, une matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $D\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que : $A = P\,D\,P^{-1}$. Dans le cas où D et P sont à coefficients réels, on dira que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$; on dira qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si l'une de ces deux matrices contient un coefficient qui n'est pas réel.
- On appelle spectre réel d'une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\,I_3 - A)$. On définit de manière similaire l'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$) sont appelées les valeurs propres réelles (resp. complexes) de A.
- On appelle **sous-espace propre** de $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associé à la valeur propre $\lambda\in\mathbb{K}$, l'ensemble :

  $$E_\lambda(A) = \{U\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A-\lambda\,I_n)\times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} = \mathrm{Ker}\left(A-\lambda\,I_n\right)$$

  On pourra par ailleurs utiliser le fait que pour toute valeur propre $\lambda\in\mathbb{K}$ de la matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

  $$1 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}\left(E_\lambda(A)\right) \leqslant n$$

Résultats admis

- Pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser les **conditions suffisantes** suivantes :
  - × si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  - × si A possède exactement n valeurs propres dans $\mathbb{K}$, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la **condition nécessaire et suffisante** suivante :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) = n}$$

On pourra enfin remarquer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \leqslant n$.

15. **Un petit résultat**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Démontrer que si B est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors A l'est aussi.

- **1 pt : A et B sont semblables, il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A = QBQ^{-1}$**
- **1 pt : B diagonalisable sur $\mathbb{K}$, il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = PDP^{-1}$**
- **1 pt :** $A = QBQ^{-1} = Q\big(P\ D\ P^{-1}\big)Q^{-1} = \big(Q\,P\big)\ D\ \big(Q\,P\big)^{-1}$

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\,I_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt :** $\chi_A(X) = \det\Big(X\,I_3 - A\Big) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\,\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ 0 & -2+X^2 & -2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$
- **1 pt :** $= \cancel{(-1)\,\dfrac{1}{2}} \times (-1)^{1+1}\,\cancel{(-2)} \times \begin{vmatrix} -2+X^2 & -2X \\ -1 & X \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} -2+X^2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = X\Big(\big((-2+X^2)\times 1\big) - \big((-1)\times(-2)\big)\Big) = X\Big(-4+X^2\Big) = X\,(X-2)\,(X+2)$

17. ***a)*** En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, 0, 2\}$
- **1 pt : A est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres réelles distinctes. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$**

b) Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.

- **1 pt : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$,** $\dim_{\mathbb{R}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \geqslant 1$
- **1 pt : par l'absurde, si l'un des sous-espaces propres de dimension > 1,** $\dim_{\mathbb{R}}\Big(E_{-2}(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}}\Big(E_0(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}}\Big(E_2(A)\Big) \geqslant 2+1+1 = 4$**, absurde !**

18. ***a)*** Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

- **1 pt :** $\chi_B(X) = \det\Big(X\,I_3 - B\Big) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\,\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ 0 & 2+X^2 & 2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$

- **1 pt :** $\cancel{(-1)}\ \cancel{\frac{1}{2}} \times (-1)^{1+1}\ \cancel{(-2)} \times \begin{vmatrix} 2+X^2 & 2X \\ -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 2+X^2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$
$= X\Big(\big((2+X^2)\times 1\big) \ - \ \big((-1)\times 2\big)\Big) = X\left(4+X^2\right) = X\,(X-2i)\,(X+2i)$

b) Vérifier : $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

- **1 pt :** $i\chi_B(iX) = i\Big((iX)\big((iX)-2i\big)\big((iX)+2i\big)\Big) = \cancel{i\times(i\times i\times i)}\Big(X\big(X-2\big)\big(X+2\big)\Big) = \chi_A(X)$

19. *a)* La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

- **1 pt : B est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres complexes distinctes. Ainsi B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$**
- **2 pts :** $E_0(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul et génératrice de $E_0(B)$. C'est donc une base de $E_0(B)$ et** $\dim_{\mathbb{R}}\left(E_\lambda(B)\right) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{F}\right) = 1$
- **0 pt :** $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)} \dim_{\mathbb{R}}\left(E_\lambda(B)\right) = \dim_{\mathbb{R}}\left(E_0(B)\right) = 1 \neq 3$ **donc B non diagonalisable**

b) Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$ **et** $\dim_{\mathbb{R}}\left(E_0(B)\right) = 1$
- **1 pt : comme déjà fait** $\dim_{\mathbb{C}}\left(E_0(B)\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(E_{-2i}(B)\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(E_{2i}(B)\right) = 1$

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$$

20. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

- **1 pt :** $D^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D^{-1}AD = -iB$

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

21. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\Delta^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : A et $C = \Delta^{-1}A\Delta$ sont semblables et C diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car symétrique réelle. Donc A diagonalisable.**

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

- Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x)\ \sin^{n-k}(x)$$

- On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n \ = \ \operatorname{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n) \ = \ \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\ f_k \mid (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$$

22. ***a)*** Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

- **1 pt : évaluation en 0 donne $\alpha_n = 0$**
- **1 pt : diviser par $\cos(x)$ pour pouvoir itérer le procédé**
- **1 pt : rédaction correcte**

b) En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

- **1 pt : famille libre et génératrice**
- **1 pt :** $\dim(V_n) = \operatorname{Card}(\mathcal{F}) = n + 1$

23. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n & : & V_n & \to & V_n \\ & & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \mathrm{e}^{i(2k-n)x}$.

- **1 pt : linéarité de la dérivation**
- **2 pts :** $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$**,** $f'_k = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}$
- **1 pt :** $f'_0 = n f_1$
- **1 pt :** $f'_n = -n f_{n-1}$

24. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^k \ \Big(\cos(x) - i\sin(x)\Big)^{n-k}$.

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{i(2k-n)x} = \mathbf{e}^{i(k-n)x} \times \mathbf{e}^{ikx} = \mathbf{e}^{i(n-k)\,(-x)} \times \mathbf{e}^{ikx}$
- **1 pt :** $\mathbf{e}^{i\,\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$

25. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $g_k \in V_n$.

- **1 pt :** $\Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^k = \sum_{i=0}^{k} \ldots$ **et** $\Big(\cos(x) - i\sin(x)\Big)^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-k} \ldots$
- **1 pt :** $\ldots \times \ldots = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{n-k} \ldots \right)$
- **1 pt : on fait bien apparaître une combinaison linéaire d'éléments de** V_n

26. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable.
Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

27. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

28. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et en déduire :

$$\operatorname{Ker}(B_n \; - \; in\, I_{n+1}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \right)$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k} \dbinom{n}{k}$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**