# DS3 - A

## Problème 1 : Autour de la fonction sinus cardinal

**Objectifs**

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie I** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie II** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie I** comme limite d'une suite d'intégrales.

### Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{e}^{-tx}\, dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\, dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\, dt$$

***1.*** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

*Démonstration.*

- La fonction sin est :
  - × dérivable sur $[0, +\infty[$.
  - × telle que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ |\sin'(x)| = |\cos(x)| \leqslant 1$.

  On en déduit, par inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[\ \times [0, +\infty[,\ \left|\sin(y) - \sin(x)\right| \leqslant 1 \times |y - x| \qquad (*)$$

- Soit $t \in [0, +\infty[$.
  En appliquant l'inégalité $(*)$ en $x = t$ et $y = 0$, on obtient :

$$\left|\sin(t)\right| \leqslant |t| \quad (\textit{car } \sin(0) = 0)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \in [0, +\infty[,\ \left|\sin(t)\right| \leqslant |t| = t.}$$

**Commentaire**

La démonstration ci-dessus est valable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ en entier. On peut donc en conclure :

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \left|\sin(t)\right| \leqslant |t|$$

L'énoncé décide de se restreindre au cas où $t \geqslant 0$ car la fonction sin apparaît dans des intégrales dans lesquelles la variable d'intégration $t$ est un élément de $[0, +\infty[$.

□

***2.*** Montrer que les fonctions $F$, $G$ et $H$ sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

*Démonstration.*

- Démontrons tout d'abord que la fonction $F$ est définie sur $]0, +\infty[$.
  *(il s'agit de démontrer que pour tout $x \in ]0, +\infty[$, la quantité $F(x)$ est bien définie, ce qui revient ici à démontrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale impropre $F(x)$ est convergente)*

- ▶ Soit $x \in ]0, +\infty[$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt$ est donc impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.
- ▶ Étude en 0 :
  Comme $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, remarquons tout d'abord :
  $$\frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} = \mathrm{e}^{-x\,t}$$
  Or : $\mathrm{e}^{-x\,t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-0} = 1$.
  L'intégrande est donc prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$).
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt$ est faussement impropre en 0.
- ▶ Étude en $+\infty$ :
  × $\forall t \in ]0, +\infty[$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$
  × $\left| \dfrac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \left| \dfrac{\sin(t)}{t} \right| \ \left| \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \dfrac{|\sin(t)|}{|t|} \ \mathrm{e}^{-x\,t} = \dfrac{|\sin(t)|}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t}$.
  Or, d'après $(*)$, pour tout $t > 0$, $\dfrac{|\sin(t)|}{t} \leqslant 1$. On en déduit :
  $$\frac{|\sin(t)|}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \leqslant \mathrm{e}^{-x\,t} \quad \textit{(car } \mathrm{e}^{-x\,t} \geqslant 0\textit{)}$$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x$ $(> 0)$.
  Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt$ est (absolument) convergente.

- Démontrons maintenant que la fonction $G$ est définie sur $]0, +\infty[$.
  - ▶ Soit $x \in ]0, +\infty[$. La fonction $f : t \mapsto \sin(t) \ \mathrm{e}^{-x\,t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
    L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) \ \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt$ est donc impropre seulement en $+\infty$.
  - ▶ × $\forall t \in ]0, +\infty[$, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$
    × $\left| \sin(t) \ \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \left| \sin(t) \right| \ \left| \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \left| \sin(t) \right| \mathrm{e}^{-x\,t} \leqslant \mathrm{e}^{-x\,t}$.
    × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x$ $(> 0)$.
    Ainsi, par théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt$ est (absolument) convergente.
- Démontrons enfin que la fonction $H$ est définie sur $]0, +\infty[$.
  Ce cas se traite de manière similaire à la fonction $G$ en remarquant que pour tout $x > 0$ :
  $$\left| \cos(t) \ \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \left| \cos(t) \right| \ \left| \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \left| \cos(t) \right| \mathrm{e}^{-x\,t} \leqslant \mathrm{e}^{-x\,t}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les fonctions } F,\ G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur } ]0, +\infty[.}$$

**Commentaire**

- On pouvait aussi agir de manière plus subtile pour démontrer que les fonctions $G$ et $H$ sont définies sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x>0$, notons $h_x : t \mapsto \mathrm{e}^{i\,t}\ \mathrm{e}^{-x\,t}$.

$$\forall t \geqslant 0,\ \left| h_x(t) \right| = \left| \mathrm{e}^{i\,t}\ \mathrm{e}^{-x\,t} \right| \ = \ \left| \mathrm{e}^{i\,t} \right| \left| \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \mathrm{e}^{-x\,t}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t}\ dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x$ $(>0)$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\ dt$ est (absolument) convergente.
Il en est donc de même des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(h_x(t)\right)\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(h_x(t)\right)\ dt$ qui sont respectivement les intégrales $G(x)$ et $H(x)$.

- Une fois la convergence démontrée, on peut conclure :

$$\int_0^{+\infty} h_x(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(h_x(t)\right)\ dt + i \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(h_x(t)\right)\ dt$$

Ce résultat peut être utile pour calculer des intégrales. La question ***5*** permettra d'illustrer de ce procédé.

□

***3.*** Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

*Démonstration.*

- Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
  Dans toute la suite :
  × on note $f : (x,t) \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-xt}$.
  × pour tout $x_0 \in [0,+\infty[$, on note : $\underline{f}_{x_0} : t \mapsto f(x_0,t)$.
  × pour tout $t_0 \in ]0,+\infty[$, on note : $\underline{f}_{t_0} : x \mapsto f(x,t_0)$.
  On a vu en question *2* que la fonction $F$ est définie sur $[0,+\infty[$.
  Elle l'est donc notamment sur $A = [1,+\infty[$.

***(i)*** Existence d'une limite finie - étude « en $x$ »

- Pour tout $t \in ]0,+\infty[$, la fonction $\underline{f}_t : x \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-t\,x}$ admet une limite finie en $+\infty$. Plus précisément :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{e}^{-t\,x} \ = \ 0 \qquad \textit{(car } \mathrm{e}^{-t\,x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \textit{ puisque } -t\,x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty\textit{)}$$

- La fonction $\ell : t \mapsto 0$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

***(ii)*** Intégrabilité (par domination) - étude « en $t$ »

- Pour tout $x \in [1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{f}_t(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
- Soit $(x,t) \in [1,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} \left| \underline{f}_t(x) \right| &= \frac{|\sin(t)|}{t}\ \mathrm{e}^{-xt} \\ &\leqslant 1 \times \mathrm{e}^{-xt} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-t} && \textit{(car } x \geqslant 1 \textit{ donc } -x\,t \leqslant -t \textit{ et } e^{-xt} \leqslant e^{-t} \\ & && \textit{par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

Et la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
*(cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{f}_t(x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$)*

Alors, par théorème de convergence dominée (à paramètre continu), la fonction $F$ admet une limite en $+\infty$ donnée par :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt \; = \; \int_0^{+\infty} \left( \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{e}^{-x\,t} \right) dt \; = \; \int_0^{+\infty} 0 \, dt \; = \; 0$$

**Commentaire**

- Dans la question, on doit déterminer la limite de la fonction $F$ en $+\infty$. L'hypothèse de domination doit alors être effectuée sur n'importe quel intervalle dont la plus grande borne est $+\infty$. Ici, le choix $x \in [1, +\infty[$ permet d'obtenir la domination souhaitée. On aurait éprouvé bien plus de peine à dominer « sans le x » si on avait considéré $x$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$ (qui correspond à l'intervalle de bonne définition de la fonction $F$).
- Cela ne signifie `EN AUCUN CAS` que l'on peut effectuer la domination sur tout segment (comme on le fait pour les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre). Comme signalé au-dessus, le seul critère est de considérer un intervalle dont l'une des bornes est $+\infty$ (puisque l'on recherche une limite en $+\infty$). Les intervalles $[10, +\infty[$ ou $[100, +\infty[$ ... peuvent convenir.
- On pouvait aussi obtenir ce résultat par théorème d'encadrement. Plus précisément, pour tout $x \geqslant 0$ :

  $$\forall t \in \, ]0, +\infty[, \; 0 \; \leqslant \; \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{e}^{-x\,t} \; \leqslant \; \mathrm{e}^{-x\,t}$$

  On en conclut, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant), les intégrales en présence étant convergentes :

  $$0 \; \leqslant \; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt \; \leqslant \; \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t} \, dt \; = \; \frac{1}{x}$$

  Or :
  × $0 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,
  × $\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} 0$.
- Il est légitime de se poser la question de la manière qui doit être privilégiée. Il convient de choisir celle qu'on sait mener au bout. Celle par encadrement est parfois jugée plus simple. Cela dépend en réalité beaucoup de l'intégrande et de la difficulté à mettre en place l'hypothèse de domination.

□

*4.* Montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $F'$ à l'aide de la fonction $G$.

*Démonstration.*

*(i)* Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en $x$ »

- Pour tout $t \in \, ]0, +\infty[$, la fonction $\underline{f}_t : x \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{e}^{-t\,x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in \, ]0, +\infty[$ :

  $$\underline{f}_t{}'(x) = \frac{\sin(t)}{t} \; \left( \, -t \, \mathrm{e}^{-t\,x} \, \right) = -\sin(t) \, \mathrm{e}^{-t\,x}$$

***(ii)*** $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

  Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{f}_t^{(0)}(x) = \dfrac{\sin(t)}{t}\, e^{-x\,t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (c'est le résultat de la question 2).

- Intégrabilité par domination
  - Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \underline{f}_t'(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
  - Soit $(a,b) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[$. On suppose $a \leqslant b$.
    Soit $(x,t) \in [a,b] \times \,]0,+\infty[$.

    $$\left| \underline{f}_t'(x) \right| = \left| -\sin(t)\ e^{-xt} \right| = |-1|\ |\sin(t)|\ \left|e^{-xt}\right| = |\sin(t)|\ e^{-xt}$$

    Or comme $t > 0$ et $a \leqslant x \leqslant b$, alors $a\,t \leqslant x\,t \leqslant b\,t$ et $-a\,t \geqslant -x\,t \geqslant -b\,t$. Enfin :

    $$e^{-b\,t} \leqslant e^{-x\,t} \leqslant e^{-a\,t} \qquad \textit{(par croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)}$$

    Finalement :

    $$\left| \underline{f}_t'(x) \right| = |\sin(t)|\ e^{-xt} \leqslant e^{-a\,t}$$

    Or, comme $a > 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-a\,t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
    *(cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{f}_t'(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$)*

    | Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. |
    |---|

- On en déduit de plus, pour tout $x \in ]0,+\infty[$ :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \underline{f}_t{}'(x)\ dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( -\sin(t)\ e^{-t\,x} \right)\ dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \,]0,+\infty[,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\ e^{-t\,x}\ dt = -G(x).}$$

**Commentaire**

- L'étape d'intégrabilité par domination consiste à exhiber une fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ qui est intégrable sur le domaine d'intégration étudié et dont l'expression ne contient plus la variable $x$.
- Lorsqu'on utilise un théorème de régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre, la domination peut s'effectuer sur tout segment $[a,b]$ de l'intervalle de régularité $A$. Formellement, cela démontre que la fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de l'intervalle $A$ et ainsi qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A$ tout en entier.
- Au passage, notons que le réel $b$ n'apparaît pas dans la domination. On aurait aussi pu démontrer la domination pour n'importe quel intervalle du type $[a,+\infty[$ ce qui permet de conclure au caractère $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$ et donc au caractère $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. $\square$

***5.*** Trouver une expression simple pour $G$ et pour $H$.
*(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)*
En déduire, pour $\alpha \in \,]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(\alpha t)\, dt$.

*Démonstration.*

- Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
H(x) + i\,G(x) &= \int_0^{+\infty} \cos(t)\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \;+\; i \int_0^{+\infty} \sin(t)\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \big( \cos(t) + i\, \sin(t) \big)\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \qquad \textit{(par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, les intégrales } H(x) \textit{ et } G(x) \textit{ étant convergentes)} \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{i\,t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-x)\,t}\, dt \\
&= \left[ \frac{\mathrm{e}^{(i-x)\,t}}{i-x} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{i-x} \left[ \mathrm{e}^{i\,t}\, \mathrm{e}^{-x\,t} \right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\left| \mathrm{e}^{i\,t}\, \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \left| \mathrm{e}^{i\,t} \right| \left| \mathrm{e}^{-x\,t} \right| = \mathrm{e}^{-x\,t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
H(x) + i\,G(x) &= \frac{1}{i-x} \left( \lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{i\,t}\, \mathrm{e}^{-x\,t} \;-\; \mathrm{e}^{i\,0}\, \mathrm{e}^{-x\,0} \right) \\
&= \frac{1}{i-x} \big(0 \;-\; 1\big) \\
&= -\frac{i+x}{i^2 - x^2} \\
&= \frac{i+x}{1+x^2} \qquad \textit{(car } i^2 = -1\textit{)} \\
&= \frac{x}{1+x^2} + i\, \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On en déduit, par identification des parties réelles et imaginaires :} \\ \forall x > 0,\; H(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad G(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}}$$

- Soit $\alpha > 0$.
On effectue le changement de variable $\boxed{u = \alpha\, t}$ :

$$\left|\begin{array}{l} u = \alpha\, t \quad \text{donc } t = \dfrac{1}{\alpha}\, u \qquad\qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto \dfrac{1}{\alpha}\, u\textit{)} \\[2ex] \hookrightarrow dt = \dfrac{1}{\alpha}\, du \\[2ex] \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \alpha \times 0 = 0 \\[1ex] \bullet\ t = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array}\right.$$

On obtient alors, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \cos(\alpha t)\ dt &= \int_0^{+\infty} \cos(u)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}\, u\, x} \times \frac{1}{\alpha}\ du \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \cos(u)\ \mathrm{e}^{-u\ \frac{x}{\alpha}}\ du \\ &= \frac{1}{\alpha}\ H\left(\frac{x}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{x}{\alpha} > 0$, l'intégrale $H\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$ est convergente, ce qui démontre que l'intégrale initiale l'est et lève ainsi la réserve de convergence.

- Finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \cos(\alpha t)\ dt &= \frac{1}{\alpha}\ H\left(\frac{x}{\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\ \frac{\frac{x}{\alpha}}{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\ \frac{x}{1 + \frac{x^2}{\alpha^2}} \\ &= \frac{x}{\alpha^2 + x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } \alpha > 0,\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\ \cos(\alpha t)\ dt = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}.}$$

□

***6.*** En déduire une expression simple pour $F$. Que vaut $F(1)$ ?

*Démonstration.*

- On a vu en question *4* que pour tout $x > 0$ :

$$F'(x) = -G(x) = -\frac{1}{1 + x^2} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5}}\textit{)}$$

$$\boxed{\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ F'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}}$$

- En reconnaissant, au signe près, la dérivée de la fonction arctan, on en déduit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$ :
$$F(x) = -\arctan(x) + c \quad \text{et donc} \quad c = F(x) + \arctan(x)$$
On calcule alors la limite de part et d'autre :
  × $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$,
  × $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ d'après la question *3*,
  × $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

  On en conclut : $c = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( F(x) + \arctan(x) \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x > 0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).}$$
- D'après ce qui précède :
$$F(1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \frac{\pi}{4}.}$$
□

## Partie II - Autour de la formule de Viète

*7.* Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

*Démonstration.*
Soit $t > 0$. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{t}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$.

▸ **Initialisation** :
  × D'une part : $\prod\limits_{k=1}^{1} \cos\left(\dfrac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\dfrac{t}{2^1}\right)$.
  × D'autre part : $\dfrac{\sin(t)}{2^1 \sin\left(\frac{t}{2^1}\right)} = \dfrac{\sin\left(2\, \frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \left( \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(2\, \frac{t}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{\sin(t)}{2^n \times 2 \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \cancel{\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}} \times \cancel{\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} && \textit{(par formule de duplication)}
\end{aligned}$$
D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t > 0, \text{ on a démontré, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n).}$$

**Commentaire**

- On a décidé d'introduire $t > 0$ avant d'entamer la récurrence. On aurait aussi pu faire le choix d'agir différemment en considérant plutôt :

$$\mathscr{P}(n) : \forall t > 0, \ \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \ = \ \frac{\sin(t)}{2^n \ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

Pour ce qui est de l'initialisation, il y a peu de chose à modifier : il faut simplement ajouter un « Soit $t > 0$ » en début de rédaction.
Le choix de quantifier la variable $t$ à l'intérieur de la propriété peut donc paraître anodin. Ça ne l'est pas totalement car cela offre plus de marge lors de l'hérédité. Afin de s'en convaincre, détaillons cette étape.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ $\left( \forall u > 0, \ \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{u}{2^k}\right) \ = \ \frac{\sin(u)}{2^n \ \sin\left(\frac{u}{2^n}\right)} \right)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Soit $t > 0$. Par hypothèse de récurrence (en $u = \frac{t}{2}$) :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\frac{t}{2}}{2^k}\right) \ = \ \frac{\sin(\frac{t}{2})}{2^n \ \sin\left(\frac{\frac{t}{2}}{2^n}\right)}$$

donc $$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right) \ = \ \frac{\sin(\frac{t}{2})}{2^n \ \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$$

donc $$\prod_{k=2}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \ = \ \frac{\sin(\frac{t}{2})}{2^n \ \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}$$

donc $$\cos(\tfrac{t}{2}) \times \prod_{k=2}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \ = \ \cos(\tfrac{t}{2}) \times \frac{\sin(\frac{t}{2})}{2^n \ \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$$

et on conclut en remarquant : $\cos(\frac{t}{2}) \times \sin(\frac{t}{2}) = \dfrac{1}{2} \ \sin(t)$.

Cette discussion a surtout une vertu pédagogique. Il s'agit de souligner qu'opter pour un choix ou un autre n'est pas complètement neutre. Dans le cas présent, il n'y avait pas grand intérêt. Dans d'autres cas, quantifier à l'intérieur de la propriété peut s'avérer indispensable.

- Dans la question, on suppose $t > 0$. Cela permet d'éviter le cas $t = 0$ qui pose problème puisqu'on diviserait alors par :

$$\sin\left(\frac{0}{2^n}\right) \ = \ \sin(0) \ = \ 0$$

- Cependant, la fonction sin ne s'annule pas seulement au point 0 mais en tout point de la forme $0 + k\,\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$). Avec l'expression fournie dans l'énoncé, on effectue une division par 0 dès que :

$$\frac{t}{2^n} \ \equiv \ 0 \ [\pi] \quad \text{ce qui équivaut à} \quad t \ \equiv \ 0 \ [2^n\,\pi]$$

Il est donc indispensable de supposer $t \in [0, +\infty[ \ \setminus \ \{2^n\,k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ce qui n'a du sens que si $n$ est introduit auparavant. Si on souhaite ne pas quantifier en $t$ dans $\mathscr{P}(n)$, il faut introduire $t$ comme un élément de $[0, +\infty[ \ \setminus \ \{2^m\,k\,\pi \mid (m,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}\}$.
Voilà une autre manière de se convaincre de l'importance de l'écriture correcte de $\mathscr{P}(n)$ ! □

***8.*** Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)$$

*On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :*

$$\cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$$

*Démonstration.*
Soit $t > 0$. Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$

où $\mathscr{P}(n)$ : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)$.

- **Initialisation** :
  - × D'une part : $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^1}\right)$.
  - × D'autre part : $\displaystyle\frac{1}{2^{1-1}} \sum_{k=1}^{2^1-1} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1}\, t\right) = \frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{2k-1}{2}\, t\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t + \frac{t}{2^{n+1}}\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t - \frac{t}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{2\,(2k-1)+1}{2^{n+1}}\, t\right) + \cos\left(\frac{2\,(2k-1)-1}{2^{n+1}}\, t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}\, t\right) + \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}}\, t\right)\right)
\end{aligned}$$

  Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{(n+1)-1}} \sum_{k=1}^{2^{(n+1)-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\, t\right) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2n+1} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\, t\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\, t\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\, t\right)\right)
\end{aligned}$$

Remarquons alors :

× si $k$ est pair alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2j$. De plus :

$$\begin{array}{rll} & 1 \leqslant k \leqslant 2^n & \\ \Leftrightarrow & 1 \leqslant 2j \leqslant 2^n & \\ \Leftrightarrow & 2 \leqslant 2j \leqslant 2^n & \textit{(car le plus petit entier pair plus grand que 1 est 2)} \\ \Leftrightarrow & 1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1} & \end{array}$$

× si $k$ est impair alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2\,\ell - 1$. De plus :

$$\begin{array}{rll} & 1 \leqslant k \leqslant 2^n & \\ \Leftrightarrow & 1 \leqslant 2\,\ell - 1 \leqslant 2^n & \\ \Leftrightarrow & 2 \leqslant 2\,\ell \leqslant 2^n + 1 & \\ \Leftrightarrow & 2 \leqslant 2\,\ell \leqslant 2^n & \textit{(car le plus grand entier pair plus petit que } 2^n+1 \textit{ est } 2^n\textit{)} \\ \Leftrightarrow & 1 \leqslant \ell \leqslant 2^{n-1} & \end{array}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2n+1} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\,t\right) &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2\,(2j)-1}{2^{n+1}}\,t\right) + \sum_{\ell=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2\,(\ell-1)-1}{2^{n+1}}\,t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4j-1}{2^{n+1}}\,t\right) + \sum_{\ell=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4\ell-3}{2^{n+1}}\,t\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left(\cos\left(\frac{4j-1}{2^{n+1}}\,t\right) + \cos\left(\frac{4j-3}{2^{n+1}}\,t\right)\right) \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t > 0\text{, on a démontré, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n).}$$ □

***9.*** En déduire que pour tout $t > 0$ :

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\,t\right)\right)$$

*Démonstration.*
Soit $t > 0$.

- En combinant les résultats des questions ***7*** et ***8***, on obtient :

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\,t\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

- Or : $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$. On en déduit :

$$2^n \times \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2^n \times \frac{t}{2^n} = t$$

- Finalement :

$$\frac{\sin(t)}{2^n \ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{t}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{2^n \ \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}\right) = \frac{\sin(t)}{t}.}$$

$\square$

***10.*** Montrer que pour tout $x > 0$ :

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx} \ dt \right)$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \,]0, +\infty[, \ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \mathrm{e}^{-tx}$$

*Démonstration.*
L'idée de cette question est d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)$ de sorte à obtenir :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(t) \ dt \right) &= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \ \mathrm{e}^{-x\,t} \ dt
\end{aligned}$$

Soit $x > 0$.

***(i)*** Existence d'une limite finie - étude « en $n$ »

- Soit $t_0 \in \,]0, +\infty[$. D'après la question ***9*** :

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t_0\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(t_0)}{t_0}$$

$$\text{donc} \qquad \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t_0\right)\right) \times \mathrm{e}^{-t_0\,x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(t_0)}{t_0} \times \mathrm{e}^{-t_0\,x}$$

La quantité $\mathrm{e}^{-t_0\,x}$ ne dépendant pas de l'indice de sommation $k$, on peut faire apparaître la multiplication par $\mathrm{e}^{-t_0\,x}$ dans la somme. On en déduit alors, pour tout $t_0 > 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t_0\right) \times \mathrm{e}^{-t_0\,x} \right) = \frac{\sin(t_0)}{t_0} \times \mathrm{e}^{-t_0\,x}$$

Autrement dit, pour tout $t_0 \in \,]0, +\infty[$, la suite numérique $\Big(f_n(t_0)\Big)$ est convergente de limite $\dfrac{\sin(t_0)}{t_0} \times \mathrm{e}^{-t_0\,x}$. Cela démontre que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} \times \mathrm{e}^{-t\,x}$.

- La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} \times \mathrm{e}^{-t\,x}$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

*(i)* Intégrabilité (par domination) - étude « en $t$ »

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est continue **par morceaux** sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in ]0, +\infty[$ :

$$\begin{aligned}
\left| f_n(t) \right| &= \left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \times \mathrm{e}^{-x\,t} \right| \\
&= \left| \frac{1}{2^{n-1}} \right| \left| \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \times \mathrm{e}^{-x\,t} \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \times \mathrm{e}^{-x\,t} \right| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \right| \times \left| \mathrm{e}^{-x\,t} \right| \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \right| \times \mathrm{e}^{-x\,t} \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mathrm{e}^{-x\,t} && \textit{(car pour tout } u \in \mathbb{R}, \left| \cos(u) \right| \leqslant 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{2^{n-1}}} \left( \cancel{2^{n-1}}\ \mathrm{e}^{-x\,t} \right)
\end{aligned}$$

De plus, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\,t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x > 0$.
Cette inégalité démontre au passage que la fonction $f_n$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \right) = \int_0^{+\infty} \left( \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \times \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt$$

Signalons enfin que par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx} \right) dt = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx}\, dt$$

On a bien démontré que pour tout $x > 0$ :

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx}\, dt \right)$$

□

***11.*** En déduire :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} \left( 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right)$$

*Démonstration.*

- D'après la question ***6***, $F(1) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-t} \, dt \right)$$

- Or, d'après la question ***5***, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $x > 0$ :

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(\alpha \, t\right) e^{-x\, t} = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$$

Soit $k \geqslant 1$. En appliquant cette égalité en $\alpha = \frac{2k-1}{2^n} > 0$ et $x = 1 > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} \, t\right) e^{-t} \, dt &= \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + 1^2} \\
&= \frac{(\, 2^n \,)^2}{(\, 2^n \,)^2 \left( \frac{(2k-1)^2}{(\, 2^n\,)^2} + 1 \right)} \\
&= \frac{2^{2n}}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \qquad \textit{(car } (\, 2^n \,)^2 = 2^{2n}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-t} \, dt &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2^{2n}}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \\
&= \frac{2^{2n}}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \\
&= 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} \left( 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right).}$$

□

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

***12.*** Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left( 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} \right)$$

en écrivant cette quantité à l'aide une somme de Riemann.

*Démonstration.*

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 \times \left(2^{n-1}\right)^2 + 2^{2n}} \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 \times 2^{2n-2} + 4 \times 2^{2n-2}} \\
&= \frac{1}{4 \times 2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{2^{n+1}}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 + 1}$$

- On définit alors :
  - × pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $T_m = \dfrac{1}{m} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 1}$,
  - × la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.

  La fonction $h$ étant continue sur le `SEGMENT` $[0, 1]$, on peut affirmer que la suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} T_m &= \int_0^1 h(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \left[\ \arctan(t)\ \right]_0^1 \\
&= \arctan(1) - \arctan(0) \\
&= \frac{\pi}{4} - 0
\end{aligned}$$

- Remarquons enfin :

$$\begin{aligned}
2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \left( \frac{1}{\left(\frac{0}{2^{n-1}}\right)^2+1} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2+1} \right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} + T_{2^{n-1}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \frac{\pi}{4} \qquad \textit{(car comme } (T_m) \textit{ est convergente, toutes ses sous-suites le sont et ont même limite)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \lim_{n\to+\infty} \left( 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} \right) = \frac{\pi}{4}.}$$

□

***13.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$ :

$$\left| \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right| \leqslant \frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2+2^{2n}}$$

*Démonstration.*
Soit $k$ $[\![0, 2^{n-1}]\!]$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right| &= \left| \frac{\left((2k-1)^2+2^{2n}\right) - \left(4k^2+2^{2n}\right)}{\left(4k^2+2^{2n}\right)\left((2k-1)^2+2^{2n}\right)} \right| \\
&= \left| \frac{\left(\left(\cancel{4k^2}-4k+1\right)+\cancel{2^{2n}}\right) - \left(\cancel{4k^2}+\cancel{2^{2n}}\right)}{\left(4k^2+2^{2n}\right)\left((2k-1)^2+2^{2n}\right)} \right| \\
&= \frac{|-4k+1|}{|4k^2+2^{2n}|\,|(2k-1)^2+2^{2n}|} \\
&\leqslant \frac{|-4k|+|1|}{\left(4k^2+2^{2n}\right)\left((2k-1)^2+2^{2n}\right)} \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \frac{4k+1}{\left(4k^2+2^{2n}\right)\left((2k-1)^2+2^{2n}\right)} \\
&\leqslant \frac{4\times 2^{n-1}+1}{\left(4k^2+2^{2n}\right)\left((2k-1)^2+2^{2n}\right)} \qquad \textit{(car } k \leqslant 2^{n-1}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Par ailleurs, comme $\big(2k-1\big)^2$ est un entier positif et différent de 0 (cela n'est le cas que si $2k = 1$ ce qui est exclu puisque $k$ est entier), on en déduit :

$$\begin{array}{llll}
 & \big(2k-1\big)^2 & \geqslant & 1 \\[2ex]
\text{donc} & \big(2k-1\big)^2 + 2^{2n} & \geqslant & 1 + 2^{2n} \\[2ex]
\text{donc} & \dfrac{1}{\big(2k-1\big)^2 + 2^{2n}} & \leqslant & \dfrac{1}{1+2^{2n}} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } ]0,+\infty[\textit{)} \\[2ex]
\text{donc} & \dfrac{1}{\big(4k^2+2^{2n}\big)\ \Big(\big(2k-1\big)^2 + 2^{2n}\Big)} & \leqslant & \dfrac{1}{\big(4k^2+2^{2n}\big)\ \big(1+2^{2n}\big)} & \textit{(car } \big(4k^2+2^{2n}\big) > 0\textit{)} \\[2ex]
\text{donc} & \dfrac{4\times 2^{n-1}+1}{\big(4k^2+2^{2n}\big)\ \Big(\big(2k-1\big)^2 + 2^{2n}\Big)} & \leqslant & \dfrac{4\times 2^{n-1}+1}{\big(4k^2+2^{2n}\big)\ \big(1+2^{2n}\big)} & \textit{(car } 4\times 2^{n-1}+1 \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, 2^{n-1}]\!],\ \left| \dfrac{1}{4k^2+2^{2n}} - \dfrac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right| \leqslant \dfrac{4\times 2^{n-1}+1}{\big(4k^2+2^{2n}\big)\ \big(1+2^{2n}\big)}.}$$

***14.*** En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left( \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question ***11***.

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{cl}
 & \left| 2^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left( \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) \right| \\[3ex]
= & \left| 2^{n+1} \right| \left| \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left( \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right) \right| \\[3ex]
\leqslant & 2^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left| \frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \right| \qquad \textit{(par inégalité triangulaire)} \\[3ex]
\leqslant & 2^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{4\times 2^{n-1}+1}{\big(4k^2+2^{2n}\big)\ \big(1+2^{2n}\big)} \\[3ex]
= & \dfrac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \times \left( 2^{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} \right)
\end{array}$$

- Or :
  × comme : $\dfrac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4\times 2^{n-1}}{2^{2n}} = 4\,\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Ainsi, d'après la question *12* :
  $$\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}} \times \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{\pi}{4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On en conclut, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right) = 0.$$

- Notons alors $(v_n)$ la suite définie par :
  $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n \ = \ 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2+2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)$$
  Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
  $$v_n \ = \ \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}}\right) - \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right)$$
  donc
  $$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \ = \ \left(2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}}\right) - v_n$$
  $$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ \frac{\pi}{4} - 0$$
  *(d'après la question* ***12*** *et le calcul de limite de début de question)*

On retrouve bien : $2^{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$.

□

# Problème 2 : Les matrices de Kac

## Notations et définitions

- Dans toute la suite, on note $\mathbb{K}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ ; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles carrées d'ordre $n$ et $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales carrées d'ordre $n$
- La lettre $i$ désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2=-1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !
- On dit qu'une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Plus précisément, une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $D\in\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que : $A=P\,D\,P^{-1}$. Dans le cas où $D$ et $P$ sont à coefficients réels, on dira que la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ; on dira qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si l'une de ces deux matrices contient un coefficient qui n'est pas réel.

- On appelle spectre réel d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\, I_3 - A)$. On définit de manière similaire l'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$) sont appelées les valeurs propres réelles (resp. complexes) de $A$.
- On appelle **sous-espace propre** de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble :

$$E_\lambda(A) = \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda\, I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \;=\; \mathrm{Ker}\left(A - \lambda\, I_n\right)$$

On pourra par ailleurs utiliser le fait que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$1 \;\leqslant\; \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \;\leqslant\; n$$

## Résultats admis

- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser les **conditions suffisantes** suivantes :
  - × si $A$ est symétrique réelle, alors $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  - × si $A$ possède exactement $n$ valeurs propres dans $\mathbb{K}$, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la **condition nécessaire et suffisante** suivante :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) = n}$$

On pourra enfin remarquer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ : $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \;\leqslant\; n.$

***15.* Un petit résultat**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que $A$ et $B$ sont semblables.

Démontrer que si $B$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors $A$ l'est aussi.

*Démonstration.*

- L'énoncé fournit deux informations :
  - × comme $A$ et $B$ sont semblables, il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A = Q\ B\ Q^{-1}$.
  - × comme $B$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P\ D\ P^{-1}$.
- On en déduit :

$$\begin{aligned} A &= Q\ B\ Q^{-1} \\ &= Q\ \left(P\ D\ P^{-1}\right)\ Q^{-1} \\ &= \left(Q\, P\right)\ D\ \left(P^{-1}\, Q^{-1}\right) \\ &= \left(Q\, P\right)\ D\ \left(Q\, P\right)^{-1} \end{aligned}$$

Comme $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

$\boxed{\text{On a démontré que } A \text{ est semblable à une matrice diagonale : elle est donc diagonalisable.}}$ □

## Partie I - La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

***16.*** Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\, I_3 - A)$ de $A$ et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det\Big(X\, I_3 - A\Big) \\
&= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} (-1) \begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + X\,L_1}{=} (-1)\ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ 0 & -2+X^2 & -2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= \cancel{(-1)\ \frac{1}{2}} \times (-1)^{1+1}\ \cancel{(-2)} \times \begin{vmatrix} -2+X^2 & -2X \\ -1 & X \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= X \begin{vmatrix} -2+X^2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= X\Big(\big((-2+X^2) \times 1\big) \ - \ \big((-1) \times (-2)\big)\Big) \\
&= X\Big(-4 + X^2\Big) \\
&= X\,(X-2)\,(X+2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_A(X) = X\,(X-2)\,(X+2)}$$

$\square$

***17. a)*** En déduire que la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.*

- D'après l'énoncé, les valeurs propres de $A$ sont les racines de $\chi_A(X) = X\,(X-2)\,(X+2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, 0, 2\}.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La matrice } A \text{ est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres réelles} \\ \text{distinctes. Elle est donc diagonalisable sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

$\square$

***b)*** Donner la liste des valeurs propres de $A$ et la dimension des espaces propres correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, d'après l'énoncé, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ :
$$\dim_{\mathbb{R}} \Big(E_\lambda(A)\Big) \ \geqslant \ 1$$
- Démontrons que chacun des sous-espaces propres de la matrice $A$ est exactement de dimension 1. On procède par l'absurde.
Supposons que le sous-espace propre associé à l'une des valeurs propres $\lambda$ de $A$ est de dimension supérieure à 2. Dans ce cas :
$$\dim_{\mathbb{R}} \Big(E_{-2}(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}} \Big(E_0(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}} \Big(E_2(A)\Big) \ \geqslant \ 2+1+1 \ = \ 4$$
C'est impossible car comme $A$ est une matrice carrée d'ordre 3 :
$$\dim_{\mathbb{R}} \Big(E_{-2}(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}} \Big(E_0(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}} \Big(E_2(A)\Big) \ \leqslant \ 3$$

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \Big(E_{-2}(A)\Big) = \dim_{\mathbb{R}} \Big(E_0(A)\Big) = \dim_{\mathbb{R}} \Big(E_2(A)\Big) = 1}$$

□

***18. a)*** Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_B$ de $B$ et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\chi_B(X) \quad &= \quad \det\Big(X\, I_3 - B\Big) \\
&= \quad \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \quad (-1) \begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + X\,L_1}{=} \quad (-1)\ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ 0 & 2+X^2 & 2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= \quad \cancel{(-1)\ \frac{1}{2}} \times (-1)^{1+1}\ \cancel{(-2)} \times \begin{vmatrix} 2+X^2 & 2X \\ -1 & X \end{vmatrix} \qquad \textit{(en développant par rapport à la } 1^{\text{ère}} \textit{ colonne)} \\
&= \quad X \begin{vmatrix} 2+X^2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \quad X\Big(\big((2+X^2)\times 1\big) \ - \ \big((-1)\times 2\big)\Big) \\
&= \quad X\Big(4+X^2\Big) \\
&= \quad X\,(X-2i)\,(X+2i)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_B(X) = X\,(X-2i)\,(X+2i)}$$

□

***b)*** Vérifier : $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

*Démonstration.*

$$\begin{array}{rcl} i\chi_B(iX) & = & i\,\Big((i\,X)\,\big((i\,X)-2i\big)\,\big((i\,X)+2i\big)\Big) \\ & = & i \times (i \times i \times i)\Big(X\,\big(X-2\big)\,\big(X+2\big)\Big) \\ & = & i^2 \times i^2 \times X\,(X-2)\,(X+2) \\ & = & \cancel{(-1)} \times \cancel{(-1)} \times X\,(X-2)\,(X+2) \\ & = & \chi_A(X) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \chi_A(X) = i\,\chi_B(iX).}$$

□

***19. a)*** La matrice $B$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ?

*Démonstration.*

- D'après l'énoncé, les valeurs propres de $B$ sont les racines de $\chi_B(X) = X\,(X-2i)\,(X+2i)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{-2i, 0, 2i\} \text{ et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}.}$$

- La matrice $B$ est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres complexes distinctes.

$$\boxed{\text{On en conclut que } B \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

- Afin de déterminer $B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, déterminons $E_0(B)$, le sous-espace propre associé à 0, seule valeur propre réelle de $B$.

  Soit $U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_0(B) & \iff & BU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[2ex] & \iff & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[2ex] & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & & & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2ex] & \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\[2ex] & \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[2ex] & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & 2\,z \\ & - & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_0(B) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \quad \texttt{ET} \quad y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul,

× génératrice de $E_0(B)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(B) \text{ et } \dim_{\mathbb{R}}\big(E_0(B)\big) = \mathrm{Card}\,\big(\mathcal{F}\big) = 1.}$$

- Ainsi :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B)} \dim_{\mathbb{R}}\big(E_\lambda(B)\big) \;=\; \dim_{\mathbb{R}}\big(E_0(B)\big) \;=\; 1 \;\neq\; 3$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } B \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

**Commentaire**

- On a opté ici pour une démonstration calculatoire dans le seul but d'exposer la méthode.
- Cependant, il y avait plus simple. L'exercice illustre le cas d'une matrice qui possède une unique valeur propre réelle. Pour démontrer qu'elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, on procède par l'absurde. On suppose que $B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existe donc :

  × $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$,

  × $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $B$ (à savoir 0).

  tels que :

$$\begin{aligned} B &= P\,D\,P^{-1} \\ &= P \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times P^{-1} \\ &= 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

  Ceci est absurde puisque $B \;\neq\; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

□

***b)*** Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de $B$ et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de $B$ dans cette question.

*Démonstration.*

- Comme détaillé dans la question précédente, la matrice $B$ possède pour seule valeur propre réelle 0.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\} \text{ et } \dim_{\mathbb{R}}\Big(E_0(B)\Big) = 1}$$

- On procède comme en question *17*. La matrice $B$ est carrée d'ordre 3, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et possède 3 valeurs propres complexes distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim_{\mathbb{C}}\Big(E_0(B)\Big) = \dim_{\mathbb{C}}\Big(E_{-2i}(B)\Big) = \dim_{\mathbb{C}}\Big(E_{2i}(B)\Big) = 1.}$$

□

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$$

***20.*** Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice $B$.

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\ B}$$

□

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

***21.*** Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}\,A\,\Delta &= \begin{pmatrix}\frac{1}{1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{1}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta^{-1}\,A\,\Delta = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}}$$

- Notons $C = \Delta^{-1}\,A\,\Delta$. En particulier les matrices $A$ et $C$ sont semblables.
  Par ailleurs, d'après le calcul précédent, la matrice $C$ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.

  $\boxed{\text{On déduit du résultat de la question } \textbf{\textit{15}} \text{ que la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$ □

## Partie II - Étude d'un endomorphisme

### Objectifs

- Dans cette partie, on introduit la matrice $B_n$ et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_k(x) = \cos^k(x)\ \ \sin^{n-k}(x)$$

- On note $V_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \dots, f_n) \ = \ \left\{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\ f_k \ \middle|\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\right\}$$

***22.*** ***a)*** Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

*Démonstration.*

- 

□

***b)*** En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe $V_n$.

*Démonstration.*

-

$\square$

***23.*** Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire :

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_n & : & V_n & \to & V_n \\ & & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de $V_n$ et que sa matrice $B_n$ dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = \mathrm{e}^{i(2k-n)x}$.

*Démonstration.*

-

$\square$

***24.*** Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = \Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^k \ \Big(\cos(x) - i\sin(x)\Big)^{n-k}$.

*Démonstration.*

-

$\square$

***25.*** En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ g_k \in V_n$.

*Démonstration.*

-

$\square$

***26.*** Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $g_k'$. En déduire que $\varphi_n$ est diagonalisable.
Donner la liste des valeurs propres complexes de $\varphi_n$ et décrire les espaces propres correspondants.

*Démonstration.*

-

$\square$

***27.*** Pour quelles valeurs de $n$ l'endomorphisme $\varphi_n$ est-il un automorphisme de $V_n$ ?

*Démonstration.*

-

$\square$

***28.*** Écrire la décomposition de $g_n$ dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et en déduire :

$$\operatorname{Ker}(B_n \ - \ in\, I_{n+1}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right)$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k} \dbinom{n}{k}$.

*Démonstration.*

- 

$\square$