DS3 - B

Problème 1

Présentation générale

- L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phénomène de Gibbs.
- **Notations, rappels et théorème admis** :
  - × $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
  - × pour tout intervalle réel I et toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ **bornée** sur I, on pourra noter :

$$\|f\|_{\infty,I} = \sup_{x \in I} \big| f(x) \big|$$

On rappelle que $\sup\limits_{x\in I} \big| f(x) \big|$ est la borne supérieure de l'ensemble $\{\big| f(x) \big| \mid x \in I\}$. En particulier, c'est un majorant de cet ensemble ce qui permet d'affirmer :

$$\forall x \in I, \big| f(x) \big| \leqslant \sup_{x \in I} \big| f(x) \big| = \|f\|_{\infty,I}$$

  - × on rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue sur un segment $[a, b]$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un couple de réels tel que $a < b$) est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. Une telle fonction f admet donc une borne supérieure sur $[a, b]$ qui vérifie : $\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max\limits_{x \in [a,b]} \big| f(x) \big|$.
  - × on rappelle, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la caractérisation séquentielle de la limite de f en un point $a \in \mathbb{R}$:

La fonction f admet la limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a	$\Leftrightarrow$	Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite a, la suite $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

  - × on admet enfin le théorème de Weierstrass.

> Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ est un couple de réels tel que $\alpha < \beta$.
> Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$.
> On suppose que la fonction f est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$.
>
> Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui vérifie :
>
> × il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction $f - f_n$ est bornée.
>
> × $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = 0$.

On pourra admettre et utiliser le théorème de Weierstrass qui affirme que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha < \beta$ et toute fonction continue $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, il existe .

Partie I - Résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\ dt = 0$$

1. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \right| \leqslant \dfrac{2\pi\ \|f'\|_{\infty,[0,2\pi]}}{n}$.

b) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\ \cos(nt)\ dt = 0$$

2. On note $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\ dt$.

a) Montrer que la fonction Φ est 2π-périodique.

b) Quelle est la régularité de Φ sur $\mathbb{R}$? En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
En s'inspirant de la question ***1***, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\ \varphi(nt)\ dt = 0$$

3. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$.

a) Démontrer :

$$\left| \int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\ dt \right| \leqslant M\,|\beta-\alpha|\ \|h-g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} + \left| \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\ dt \right|$$

b) En déduire, à l'aide du théorème de Weierstrass, que pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\ \varphi(nt)\ dt = 0$$

4. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
Déduire de ce qui précède :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\ \sin^2(nt)\ dt = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\ dt$$

Partie II - L'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ soit bornée.

5. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\ dt$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\ dt$ sont convergentes et :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\ dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\ dt - \frac{F(a)}{a}$$

6. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ sont convergentes et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$$

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ soit absolument convergente.

7. Montrer que la fonction :

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

8. On suppose de plus que la fonction f est bornée.

a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
Pour ce faire, on démontre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

b) Démontrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.
On pourra penser à utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

9. On note $f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$

sur $]0,+\infty[$.

b) On cherche une solution particulière de (**E**) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifient :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[,\ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$

Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)\,dt$ et $\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_2(t)\,dt$ où f_1 et f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ est une solution de l'équation (**E**) sur $]0,+\infty[$.

d) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in\,]0,+\infty[,\ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

10. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt$$

11. ***a)*** Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \right) = 0$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

12. Déduire des questions précédentes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

Partie III - Phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \,]0, \pi[\\ 0 & si\ x = 0\ \ ou\ x = \pi \end{cases} \tag{E.1}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

13. En calculant la dérivée de S_n, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi],\ \ S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\, dt$$

14. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

15. En déduire que $S_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

16. ***a)*** Calculer $S_n(\pi - x)$ en fonction de $S_n(x)$.

b) En utilisant le résultat de la question ***3***, montrer que, pour tout $x \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1$$

17. Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par (**E.1**) sur $\mathbb{R}$.
(il s'agit de démontrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x)$)

18. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} \dfrac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2n}\right)} & si\ x \in \,]0, \pi] \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

converge simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & si\ x \in \,]0, \pi] \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

(il s'agit de démontrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$)

19. Montrer que φ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et en déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

puis :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

Problème 2 : Les matrices de Kac

Notations et définitions

- Dans toute la suite, on note $\mathbb{K}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles carrées d'ordre n et $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales carrées d'ordre n
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !
- On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Plus précisément, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que : $A = P\,D\,P^{-1}$. Dans le cas où D et P sont à coefficients réels, on dira que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$; on dira qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si l'une de ces deux matrices contient un coefficient qui n'est pas réel.
- On appelle spectre réel d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\,I_3 - A)$. On définit de manière similaire l'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$) sont appelées les valeurs propres réelles (resp. complexes) de A.
- On appelle **sous-espace propre** de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble :

$$E_\lambda(A) = \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda\,I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \;=\; \mathrm{Ker}\big(A - \lambda\,I_n\big)$$

  On pourra par ailleurs utiliser le fait que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$1 \;\leqslant\; \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \;\leqslant\; n$$

Résultats admis

- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser les **conditions suffisantes** suivantes :
  - × si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  - × si A possède exactement n valeurs propres dans $\mathbb{K}$, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la **condition nécessaire et suffisante** suivante :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim_{\mathbb{K}} \Big(E_\lambda(A)\Big) = n}$$

On pourra enfin remarquer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim_{\mathbb{K}} \Big(E_\lambda(A)\Big) \leqslant n$.

20. **Un petit résultat**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que A et B sont semblables.

Démontrer que si B est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors A l'est aussi.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\, I_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

22. ***a)*** En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.

23. ***a)*** Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Vérifier : $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

24. ***a)*** La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

b) Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$$

25. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

26. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

- Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \ \sin^{n-k}(x)$$

- On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n) \ = \ \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ | \ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$$

27. ***a)*** Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

b) En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

28. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire :

$$\begin{array}{cccc} \varphi_n & : & V_n & \to & V_n \\ & & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \mathrm{e}^{i(2k-n)x}$.

29. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \Big(\cos(x) + i \sin(x) \Big)^k \ \Big(\cos(x) - i \sin(x) \Big)^{n-k}$.

30. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton : $\forall k \in [\![0, n]\!], g_k \in V_n$.

31. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g'_k. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

32. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

33. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et en déduire :

$$\mathrm{Ker}\,(B_n \ - \ in\, I_{n+1}) = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \right)$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k} \dbinom{n}{k}$.