DS4 (/91)

EXERCICE 1 (/17)

On note : $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer les valeurs propres de A.

- **1 pt : début de calcul convenable de** $\chi_A(X) = \det\Big(X\, I_3 - A\Big)$
- **1 pt :** $\chi_A(X) = - \begin{vmatrix} X+2 & -6X-12 \\ X+2 & -(X^2+7X+10) \end{vmatrix}$
- **1 pt :** $\chi_A(X) = (X+2)^2\ (X-1)$

b) Déterminer les sous-espaces propres associés.

- **3 pts :**
  - × **1 pt :** $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \ \Leftrightarrow\ -2\,x + 2\,y - 2\,z = 0$
  - × **1 pt :** $E_{-2}(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt :** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre et génératrice et donc une base de** $E_{-2}(A)$
- **3 pts :**
  - × **1 pt :** $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{rcr} -5\,x \quad\quad & = & -10\,z \\ y & = & 6\,z \end{array}\right.$
  - × **1 pt :** $E_1(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
  - × **1 pt :** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre et génératrice et donc une base de** $E_1(A)$

c) En déduire que A est diagonalisable et exhiber une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

- **1 pt :** $\dim\big(E_{-2}(A)\big) + \dim\big(E_1(A)\big) = 2 + 1 = 3 = \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$ **donc** A **diagonalisable**
- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(concaténation des vecteurs propres des bases déterminées précédemment) et** $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -4\,u_n & + & 2\,v_n & - & 2\,w_n \\ v_{n+1} & = & -6\,u_n & + & 4\,v_n & - & 6\,w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n & + & v_n & - & 3\,w_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}\,X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de α_0, β_0, γ_0 et n.

- **1 pt : par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n\ X_0$.**
- **1 pt :** $X_n = A^n\ X_0 = \left(P \times D \times P^{-1}\right)^n\ X_0 = P \times D^n \times P^{-1}\ X_0$
- **1 pt :** $Y_n = P^{-1}\ X_n = D^n \times P^{-1}\ X_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$

b) À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

- **1 pt :** $X_n = \begin{pmatrix} (-2)^n\ \alpha_0 - (-2)^n\ \beta_0 + 2\ \gamma_0 \\ (-2)^n\ \alpha_0 + 6\ \gamma_0 \\ (-2)^n\ \beta_0 + \gamma_0 \end{pmatrix}$
  Ainsi : $u_n = \alpha_0\ \left(-2\right)^n - \beta_0\ \left(-2\right)^n + 2\ \gamma_0$ **;** $v_n = \alpha_0\ \left(-2\right)^n + 6\ \gamma_0$ **;** $w_n = \beta_0\ \left(-2\right)^n + \gamma_0$
- **1 pt : comme** $\left(\left(-2\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **est divergente,** (v_n) **est convergente** $\Leftrightarrow \alpha_0 = 0$
- **0 pt : de même,** (w_n) **est convergente** $\Leftrightarrow \beta_0 = 0$
- **1 pt : dans ce cas :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\ \gamma_0$, $v_n = 6\ \gamma_0$ **et** $w_n = \gamma_0$

EXERCICE 2 (/ 20)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

et on note $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ la somme de la série de fonctions $\sum f_n$.

3. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

- **1 pt : cas** $x_0 = 0$, $\sum\ 1$ **diverge grossièrement**
- **1 pt : cas** $x_0 < 0$, $\sum\ f_n(x_0)$ **diverge grossièrement**
- **2 pts : cas** $x_0 > 0$
  × **1 pt :** $\mathrm{e}^{-x_0 \times \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
  × **1 pt : critère des SATP écrit correctement**

4. Démontrer que f est continue sur D.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0}$ **pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I**
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence uniforme (par convergence normale sur tout segment)}}$
  × **1 pt :** $\left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ **pour tout** $x \in [a, b]$

× **1 pt :** $0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$

× **1 pt : par critère de comparaison des SATP, la série** $\sum \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ **est convergente**

5. Calculer la limite de f en $+\infty$.

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie}}$

  × **1 pt :** $\ell_0 = 1$

  × **1 pt : si** $n \geqslant 1$, $\ell_n = 0$
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence uniforme (par convergence normale)}}$

  × **1 pt :** $0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

  × **1 pt : par critère de comparaison des SATP, la série** $\sum \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ **est convergente**

6. Démontrer que, pour tout $x \in D$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$.

- **1 pt : pour tout** $k \in \mathbb{N}$ **et tout** $t \in [k, k+1]$, $\mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \geqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{k+1}}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_0^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}$ **(somme `FINIE`)**
- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt$ **est convergente donc** $\displaystyle\int_0^{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} = f(x)$ **par CV de la série numérique** $\sum f_n(x)$

7. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

- **2 pts :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} u\, \mathrm{e}^{-xu}\, du = \frac{2}{x^2}$ **par IPP**
- **1 pt :** $1 \leqslant \dfrac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} \leqslant \dfrac{x^2}{2} + 1$
- **1 pt : théorème d'encadrement écrit correctement**

PROBLÈME

- Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

A. Une intégrale à paramètre

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\, du \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\, du$$

8. Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

- **1 pt :** ψ **est continue sur** $]0, +\infty[$**. Ainsi, l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(u)\, du$ **est impropre à la fois en** 0 **et en** $+\infty$
- **1 pt :** $\psi(u) \underset{u\to0}{\sim} \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ **et th comparaison intégrales généralisées**
- **1 pt :** $\psi(u) \underset{u\to+\infty}{o} \left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ **et th comparaison intégrales généralisées**

9. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

- **2 pts : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $f_{x_0} : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x_0)}$ est continue sur**
  × **0 pt :** $]0,+\infty[$ **si** $x_0 \geqslant 0$
  × **2 pts :** $]0,x_0[\ \cup\ ]x_0,+\infty[$ **si** $x_0 < 0$.
  De plus : $\lim\limits_{u\to x_0} f_{x_0}(u) = \infty$ **et ainsi f_x n'est pas continue par morceaux sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt : Cas où $x = 0$**
  $f_x(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ **et donc non intégrable en** 0
- **2 pts : Cas où $x > 0$: intégrable en 0 et en $+\infty$**

10. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$ **pour tout $u > 0$, $\underline{f}_u : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$**
  De plus : $f'_u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\ \dfrac{-1}{(u+x)^2}$
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  × **1 pt : intégrabilité sans forcément dominer - pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u \mapsto \underline{f}_t^{(0)}(u)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente**
  × **2 pts : intégrabilité par domination sur tout segment**
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u \mapsto \underline{f}_u^{(1)}(x)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$
  $\forall x \in [a,b],\ \forall u \in]0,+\infty[,\ \left|\underline{f}_u^{(1)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{a^2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{a^2}\,\psi(u)$

11. En déduire que pour tout $x \in I$, $x\,F'(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right) F(x) = -K$.

- **3 pts :**
  × **1 pt : sous réserve de convergence, par IPP**
  × **1 pt :** $F(x) = \left[\dfrac{2\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}}{x+u}\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}}{x+u}du + \int_0^{+\infty} \dfrac{2\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}}{(x+u)^2}du$
  $= \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2u\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(x+u)}du + 2\int_0^{+\infty} \dfrac{u\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(x+u)^2}du$
  × **1 pt : le crochet vaut 0 + convergence**
- **1 pt :** $2K - 2xF(x) + F(x) - 2xF'(x)$
  $= \ 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}du - 2x\int_0^{+\infty} \dfrac{2u\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(x+u)}du + \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(x+u)}du - 2x\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(x+u)^2}du$
  $=$ **mise sous même dénominateur**
  $= \ F(x)$

12. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\,F(x)$.

Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$: $G(x) = C - K \displaystyle\int_0^x \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

- **1 pt : G est dérivable sur I par produit de fonctions qui le sont**
- **1 pt :** $G'(x) = -K\,\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ **d'après la question précédente**

- **1 pt :** $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$ **est la primitive qui s'annule en** 0 **donc de dérivée** $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$
- **0 pt :** $G' = -K\, H'$ **donc** G **et** $-K\, H$ **sont égales à une constante près**

13. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = C - K \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{t}\, dt = C - K^2$ **d'après la question précédente**
- **1 pt :** $F(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\, K$ **donc** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ **et** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x \to 0} G(x) = C$ **d'après la question précédente**
- **4 pts : Limite en** 0 **en exploitant l'expression** $G(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)}\, du$
  - × **1 pt : changement de variable affine** $\boxed{u = xt}$ **alors :**
  $\sqrt{x}F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}\mathrm{e}^{-xt}dt}{\sqrt{xt}(xt+x)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\ dt}{\sqrt{t}(1+t)}$
  - × **1 pt :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } x \textbf{ »}}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\ dt}{\sqrt{t}(1+t)} = \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}$
  et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}$ **est continue par morceaux sur** I
  - × **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$

  pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ **est est continue (par morceaux) sur** $]0, +\infty[$
  $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in]0, +\infty[,\ \left| \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} \right| \ \leqslant\ \dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}$

B. Étude de deux séries de fonctions

- Dans toute cette partie, on définit les fonctions :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, \mathrm{e}^{-nx}$$

14. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0}$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$, **la fonction** $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-n\,x}}{\sqrt{n}}$ **est de classe** $\mathscr{C}^0$ **sur** I
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Convergence uniforme (par convergence normale sur tout segment } [a,b]\textbf{)}}$
  - × **1 pt :** $\left| \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \right| \ =\ \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}} \ \leqslant\ \dfrac{\mathrm{e}^{-n\,a}}{\sqrt{n}}$ **pour tout** $x \in [a, b]$
  - × **1 pt :** $0 \ \leqslant\ \|f_n\|_{\infty,[a,b]} \ \leqslant\ \dfrac{\mathrm{e}^{-n\,a}}{\sqrt{n}}$
  - × **1 pt : par critère de comparaison des SATP, la série** $\sum\ \|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ **est convergente**
- **1 pt : on agit de la même manière pour** g

15. Montrer que pour tout $x \in I$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}\, du.$
En déduire un équivalent de f en 0.

- **1 pt : si** $u \in [k, k+1]$**,** $\dfrac{\mathrm{e}^{-(k+1)\,x}}{\sqrt{k+1}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-u\,x}}{\sqrt{u}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}}$

  donc $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-(k+1)\,x}}{\sqrt{k+1}} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{e}^{-(k+1)\,x}}{\sqrt{k+1}}\, du \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{e}^{-u\,x}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}}\, du = \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{N+2} \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}} \leqslant \int_0^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{-u\,x}}{\sqrt{u}}\, du \quad \left(\leqslant \sum_{k=0}^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}}\right)$

  et $\displaystyle\left(\sum_{k=2}^{N+2} \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}} \leqslant\right) \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{-u\,x}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{-k\,x}}{\sqrt{k}}$
- **1 pt : passage à la limite pour obtenir le résultat**
- **1 pt : on pose** $\boxed{v = u\,x}$
- **1 pt : par encadrement** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\, f(x) = \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{-v}}{\sqrt{v}}\, dv = \sqrt{\pi}$ **vu précédemment**

16. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

- **1 pt : la suite est décroissante (calcul + mise au même dénominateur)**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}$ **par comparaison série-intégrale**
- **1 pt : ainsi la suite est minorée par** -2

17. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

18. En déduire un équivalent de h en 0.
Montrer alors : $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\,x^{3/2}}$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

- À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \textit{si } n \in A \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

- Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge.

- On pose $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \,\mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$.
- Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim\limits_{x\to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

19. Quel est l'ensemble I_a si A est fini ?

Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

- **1 pt : si A est fini, la suite (a_n) est nulle sauf pour un nombre fini de coefficients égaux à 1**
- **1 pt : dans ce cas $I_A = \mathbb{R}_+$**
- **3 pts :**
  - × **1 pt : si A est infini, on sélectionne les éléments de (a_n) qui sont non nulles. Cela forme une suite extraite de (a_n) constante égale à 1**
  - × **1 pt : si $x = 0$, la série $\sum a_n$ est (G)DV**
  - × **1 pt : si $x > 0$, $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n \,\mathrm{e}^{-n\,x} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-n\,x} = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ et donc $I_a = \mathbb{R}_+^*$**

20. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n))\,\mathrm{e}^{-nx}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))\,\mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

- Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

21. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor \,\mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

En déduire un encadrement de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0.

Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

- Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls.
- On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.
- Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

22. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\,\mathrm{e}^{-nx} = (\,f_{A_1}(x)\,)^2$$

Montrer alors que pour tout $x > 0$: $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

D. Étude de deux séries de fonctions

- Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge.
- On suppose :
$$\lim_{x\to 0}\left(x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\right) = \ell \in [0,+\infty[$$
On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0,1]$.
- On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$.
- Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe
$$(L(\psi))(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n \mathrm{e}^{-nx}\ \psi(\mathrm{e}^{-nx})$$

23. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F.
Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

- **1 pt :** $|\alpha_n e^{-nx}\psi(\mathbf{e}^{-nx})| \leqslant ||\psi||_\infty \alpha_n \mathbf{e}^{-nx}$ **et** $\sum\ \alpha_n e^{-nx}$ **convergente par hypothèse**
- **2 pts : linéarité**

- On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose :
$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$$

24. Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \|\ \|_\infty)$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

25. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$.
En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

- Pour tous a ,$b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $\mathbb{1}_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par
$$\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [a,b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$
- Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in\ ]0,\min(a,1-a)[$. On note :
$$g_- : x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & si\ x \in\ ]a-\varepsilon, a[\\ 0 & si\ x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+ : x \mapsto \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \textit{si } x \in \,]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \textit{si } x \in [a+\varepsilon, 1] \end{cases}$$

26. ***a)*** Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

b) Montrer alors que $\mathbb{1}_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(\mathbb{1}_{[0,a]})$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

c) En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**