DS7

EXERCICE 1

Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $\langle P \mid Q \rangle$ est convergente.

2. Montrer que l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

4. Conclure que $\left\langle X^k \mid 1 \right\rangle = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\left(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$?

9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

10. Justifier que P_k est de degré k.

11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$.

13. En déduire que $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, \alpha(Q) \rangle$.

14. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra utiliser les questions *9* et *13*.

EXERCICE 2

Présentation générale

On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2, on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble des matrices orthogonales.

Notations

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et, pour tout entier $n > 0$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ antisymétriques à coefficients réels et par $\mathrm{O}\,n$ celui des matrices $n \times n$ orthogonales à coefficients réels. Le groupe spécial orthogonal est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1 .

Partie I - Un exemple en dimension 2

15. Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.

16. Calculer $R = \big(I_2 + A\big)\, \big(I_2 - A\big)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.

17. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $M = \big(I_2 + R_\theta\big)^{-1}\, \big(I_2 - R_\theta\big)$.

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier strictement positif.

18. Soient B et C deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.

19. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons

$$^t(AX)\overline{X},$$

montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).

20. Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et :

$$\big(I_n - A\big)\, \big(I_n + A\big)^{-1} = \big(I_n + A\big)^{-1}\, \big(I_n - A\big)$$

Montrer que $R = \big(I_n + A\big)^{-1}\, \big(I_n - A\big)$ est une matrice orthogonale.

21. Calculer le déterminant de R.

22. Soit R une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible.
Démontrer que la matrice $A = \big(I_n + R\big)^{-1}\, \big(I_n - R\big)$ est antisymétrique.

EXERCICE 3

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

On propose ici d'en présenter une.

23. **Question préliminaire**

Si on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

24. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

25. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\, dt$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

26. Établir que cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

27. Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

28. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

EXERCICE 4

Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.
À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;

2. pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n ». On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(A_n),\ q_n = \mathbb{P}(B_n),\ r_n = \mathbb{P}(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}\big(E \cap F\big)}{\mathbb{P}(F)}$$

Partie I - Calcul des probabilités

29. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

30. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.

31. En déduire que $V_n = M^n\, V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

32. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

33. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}\left(X_1 + \cdots + X_n\right)$.

34. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

35. En déduire une expression de a_n.

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;

2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

36. Calculer $\mathbb{P}\big(\{T_B = 1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{T_B = 2\}\big)$.

37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

38. Établir que $\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$, puis en déduire que $\mathbb{P}\left(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}$$

39. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}\big(\{T_B = k\}\big)$. Que vaut $\mathbb{P}\big(\{T_B = 0\}\big)$?

40. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?