DS7

EXERCICE 1

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note : $\langle P \,|\, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$

1. Justifier que l'intégrale définissant $\langle P \,|\, Q\rangle$ est convergente.

- **1 pt :** $t \mapsto P(t)\, Q(t)\, \mathbf{e}^{-t}$ **est continue sur l'intervalle** $[0, +\infty[$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, \mathbf{e}^{-t}\, dt$ **est impropre seulement en** $+\infty$**.**
- **1 pt :** $\left| P(t)\, Q(t)\, \mathbf{e}^{-t} \right| \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)$
- **1 pt : théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives écrit correctement**

2. Montrer que l'application $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

- **1 pt : l'application** $\langle \cdot, \cdot\rangle$ **est symétrique et linéaire à droite**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant** $(0 \leqslant 1)$ **:** $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\, \mathbf{e}^{-t}\, dt \ \geqslant\ 0$
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $t \mapsto \big(P(t)\big)^2\, \mathbf{e}^{-t}$ **est : continue sur** $[0, +\infty[$**, positive sur** $[0, +\infty[$**, d'intégrale nulle sur** $[0, +\infty[$ **donc est nulle sur** $[0, +\infty[$
  - × **1 pt : ainsi** $\forall t \in [0, +\infty[,\ P(t) = 0$ **donc** P **admet une infinté de racines et** $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide d'une intégration par parties, établir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$

- **1 pt : IPP sous réserve de convergence**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, \mathbf{e}^{-t}\, dt = -\left[\ t^k\, \mathbf{e}^{-t}\ \right]_0^{+\infty} + \ k \int_0^{+\infty} t^{k-1}\ \mathbf{e}^{-t}\, dt$
- **1 pt :** $\left[\ t^k\, \mathbf{e}^{-t}\ \right]_0^{+\infty} = \left(\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^k\, \mathbf{e}^{-t}\right) - 0 \times \mathbf{e}^{-0} \ = \ 0$

4. Conclure que $\left\langle X^k \,|\, 1\right\rangle = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

- **1 pt : Initialisation** $\left\langle X^0 \,|\, 1\right\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}\, dt = 1$ **et** $0! = 1$ **(0 pt si erreur de logique)**
- **2 pts : Hérédité** $\left\langle X^{k+1} \,|\, 1\right\rangle = (k+1)\ \left\langle X^k \,|\, 1\right\rangle = (k+1)\ k! = (k+1)!$

On considère α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'$

II.1 - Propriétés de l'application α

5. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- **1 pt :** α **est linéaire**
- **1 pt :** $\deg\big(\alpha(P)\big) = \deg\left(X\, P'' + (1 - X)\, P'\right) \leqslant \max\Big(\deg\left(X\, P''\right), \deg\left((1 - X)\, P'\right)\Big)$
- **1 pt :** $\ldots = \max\Big(1 + \deg\left(P''\right), 1 + \deg\left(P''\right)\Big) \leqslant n$ **car** $\deg(P') \leqslant n - 1$ **et** $\deg(P'') \leqslant n - 2$

6. Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

- **1 pt :** $\Big(\alpha(Q_0)\Big)(X) = X\ Q_0''(X) + (1-X)\,Q_0'(X) = 0$
- **1 pt :** $\Big(\alpha(Q_1)\Big)(X) = X\ Q_1''(X) + (1-X)\,Q_1'(X) = 1 - X = Q_0(X) - Q_1(X) = \Big(Q_0 - Q_1\Big)(X)$
- **1 pt :** $\Big(\alpha(Q_k)\Big)(X) = X\ Q_k''(X) + (1-X)\,Q_k'(X) = X\ \Big(k\,(k-1)\ X^{k-2}\Big) + (1-X)\ \Big(k\,X^{k-1}\Big)$
- **1 pt :** $\dots = k\,(k-1)\ X^{k-1} + k\,X^{k-1} - k\,X^k = \Big(k^2\ Q_{k-1} - k\ Q_k\Big)(X)$

7. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

- **1 pt :** $\chi_\alpha(X) = \chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X+1 & -4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & X+2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X+n \end{vmatrix} = X\,(X+1)\,\dots\,(X+n)$
- **1 pt : comme χ_α est scindé à racines simples, α est diagonalisable**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}(M) = \big\{ -k \mid k \in [\![0, n]\!] \big\}$

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\left(\alpha + k\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$?

- **2 pts :** $1 \ \leqslant\ \dim\big(E_{-k}(\alpha)\big)\ \leqslant\ m_{-k}(\alpha)\ =\ 1$

9. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha\,(P_k) = -kP_k$.

- **1 pt : comme $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})\big) = 1$, il existe un polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}\,(R_k)$**
- **1 pt :** $\dots = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{1}{c_{m,k}} \cdot R_k\right)$ **où $c_{m,k}$ (> 0) le coefficient dominant de R_k**

10. Justifier que P_k est de degré k.

- **1 pt :** $\alpha\big(P_k\big) = \alpha\left(\sum\limits_{j=0}^{m} a_{k,j} \cdot X^j\right) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_{k,j} \cdot \alpha\big(X^j\big) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{k,j} \cdot \alpha\big(X^j\big) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{k,j} \cdot \Big(j^2\,X^{j-1} - j\ X^j\Big)$
- **1 pt :** $\dots = -m\ X^m\ +\ \sum\limits_{j=1}^{m-1} \big(-j\,a_{k,j} + (j+1)^2\,a_{k,j+1}\big)\ X^j\ +\ a_{k,1}$
- **1 pt : or** $\alpha(P_k) = -k \cdot P_k = -k\ \sum\limits_{j=0}^{m} a_{k,j}\ X^j = -k\ X^m\ +\ \sum\limits_{j=0}^{m-1} \big(-k\,a_{k,j}\big)\ X^j$
- **1 pt : par unicité de la décomposition dans la base $(1, X, \dots, X^n)$, les deux décompositions de $\alpha(P_k)$ permettent de conclure, en particulier : $-m = -k$ et donc $m = k$**

11. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

- **1 pt : P_0 est un polynôme unitaire de degré 0 (c'est-à-dire constant), donc $P_0 = 1$**
- **2 pts :**
  - × **1 pt : P_1 unitaire de degré 1, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :** $P_1(X) = 1 \cdot X + a \cdot 1$
  - × **1 pt :** $\alpha(P_1) = \alpha\big(1 \cdot X + a \cdot 1\big) = 1 \cdot \alpha\big(X\big)\ +\ a \cdot \alpha(1) = 1 \cdot \alpha\big(X\big)\ +\ a \cdot 0_{\mathbb{R}_n[X]} = (-1) \cdot (X - 1)$
- **1 pt :** $\alpha\big(X^2 - 4X + 2\big) = \alpha\big(X^2\big)\ -\ 4 \cdot \alpha(X)\ +\ \cancel{2 \cdot \alpha(1)} = 4X - 2X^2\ -\ 4 \cdot \big(1 - X\big)$
  $= -2X^2 + 8X - 4 = -2\ \big(X^2 - 4X + 2\big)$

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. Montrer que $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = - \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

- **1 pt :** $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, P''(t)\, Q(t)\, \mathbf{e}^{-t}\ dt + \int_0^{+\infty} P'(t)\, Q(t)\, \mathbf{e}^{-t}\ dt - \int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q(t)\, \mathbf{e}^{-t}\ dt$
- **2 pts :**
  - $\times$ **1 pt : par IPP** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(t\, P'(t)\, Q(t)\big) \times \big(\mathbf{e}^{-t}\big)\ dt = \Big[\ t\, P'(t)\, Q(t)\ \big(-\mathbf{e}^{-t}\big)\ \Big]_0^{+\infty}$
    $- \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(P'(t)\, Q(t) \ + \ t\, P''(t)\, Q(t) \ + \ t\, P'(t)\, Q'(t)\Big) \times \big(-\mathbf{e}^{-t}\big)\ dt$
  - $\times$ **1 pt :** $\Big[\ t\, P'(t)\, Q(t)\ \big(-\mathbf{e}^{-t}\big)\ \Big]_0^{+\infty} = -\Big(\big(\cancel{\lim\limits_{t \to +\infty} t\, P'(t)\, Q(t)\ \mathbf{e}^{-t}} \big) \ - \ 0 \times P'(0)\, Q(0)\ \mathbf{e}^{-0} \Big) = 0$

13. En déduire que $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = \langle P \,|\, \alpha(Q) \rangle$.

- **1 pt :** $\langle \alpha(P) \,|\, Q \rangle = - \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, \mathbf{e}^{-t}\ dt = - \int_0^{+\infty} t\, Q'(t)\, P'(t)\, \mathbf{e}^{-t}\ dt$
- **1 pt :** $\ldots = \langle \alpha(Q) \,|\, P \rangle = \langle P \,|\, \alpha(Q) \rangle$

14. Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pourra utiliser les questions *9* et *13*.

- **1 pt :** $\langle \alpha(P_i) \,|\, P_j \rangle = \langle (-i) \cdot P_i \,|\, P_j \rangle = -i\ \ \langle P_i \,|\, P_j \rangle$
- **0 pt : de même** $\langle P_i \,|\, \alpha(P_j) \rangle = \langle P_i \,|\, (-j) \cdot P_j \rangle = -j\ \ \langle P_i \,|\, P_j \rangle$
- **1 pt : comme** $-j\ \ \langle P_i \,|\, P_j \rangle \ = \ -i\ \ \langle P_i \,|\, P_j \rangle$ **et** $i \neq j$**,** $\langle P_i \,|\, P_j \rangle = 0$
- **1 pt :** $\mathcal{F} = (P_0, \ldots, P_n)$ **est libre car elle est orthogonale et constituée uniquement de vecteurs non nuls**
- **1 pt :** $\mathcal{F}$ **de cardinal** $\mathrm{Card}\,\big(\mathcal{F}\big) = n + 1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$

EXERCICE 2

Partie I - Un exemple en dimension 2

15. Soit t un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de A.

- **1 pt :** $\chi_A(X) \ = \ \det(X\, I_2 - A) \ = \ \begin{vmatrix} X & -t \\ t & X \end{vmatrix} \ = \ X^2 + t^2 \ = \ (X - it)\,(X + it)$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{it, -it\}$

16. Calculer $R = \big(I_2 + A\big)\ \big(I_2 - A\big)^{-1}$ et montrer que R est une matrice du groupe spécial orthogonal.

- **1 pt :** $(I_2 - A)^{-1} \ = \ \dfrac{1}{\det(I_2 - A)} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \ = \ \dfrac{1}{1 + t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $R \ = \ (I_2 + A)\,(I_2 - A)^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} \times \left(\dfrac{1}{1 + t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ \dfrac{1}{1 + t^2} \begin{pmatrix} 1 - t^2 & 2t \\ -2t & 1 - t^2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** ${}^tR \times R = \dfrac{1}{(1 + t^2)^2} \begin{pmatrix} (1 - t^2)^2 + 4t^2 & 0 \\ 0 & (1 - t^2)^2 + 4t^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(1 + t^2)^2} \begin{pmatrix} (1 + t^2)^2 & 0 \\ 0 & (1 + t^2)^2 \end{pmatrix} = I_2$
- **1 pt :** $\det(R) = \dfrac{1}{(1 + t^2)^2} \begin{vmatrix} 1 - t^2 & 2t \\ -2t & 1 - t^2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{(1 + t^2)^2}\ \big((1 - t^2)^2 + 4t^2\big) = \dfrac{1}{(1 + t^2)^2}\ (1 + t^2)^2 = 1$

17. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer $M = \big(I_2 + R_\theta\big)^{-1} \big(I_2 - R_\theta\big)$.

- **1 pt :** $\det(I_2 + R_\theta) = 2 + 2\cos(\theta)$**. Comme** $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$**, alors :** $\cos(\theta) \neq -1$
- **1 pt :** $(I_2 + R_\theta)^{-1} = \dfrac{1}{2\big(1+\cos(\theta)\big)} \begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M = (I_2+R_\theta)^{-1}\,(I_2-R_\theta) = \dfrac{1}{2\big(1+\cos(\theta)\big)} \begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1-\cos(\theta) \end{pmatrix} =$
$\dfrac{1}{2\big(1+\cos(\theta)\big)} \begin{pmatrix} 1-\big(\cos(\theta)\big)^2 - \big(\sin(\theta)\big)^2 & 2\sin(\theta) \\ -2\sin(\theta) & \big(\sin(\theta)\big)^2 + 1 - \big(\cos(\theta)\big)^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, n désigne un entier strictement positif.

18. Soient B et C deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.

- **1 pt :** $\times C^{-1}$ **à droite**
- **1 pt :** $\times C^{-1}$ **à gauche**

19. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons :${}^t(AX)\overline{X}$, montrer que λ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).

- **2 pts :** ${}^t(AX)\overline{X} = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$
  - **1 pt :** ${}^t(AX)\,\overline{X} \;=\; {}^t(\lambda \cdot X)\,\overline{X}$ **car** X **est un vecteur propre de** A **associé à** λ
  - **1 pt :** ${}^t(AX)\,\overline{X} = \lambda \cdot {}^tX\,\overline{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$
- **3 pts :** ${}^t(AX)\overline{X} = -\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$
  - **1 pt :** ${}^t(AX)\,\overline{X} = {}^tX\,{}^tA\,\overline{X} = {}^tX\,(-A)\,\overline{X}$
  - **1 pt :** $\overline{A} = A$ **car** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **et** $\overline{A}\,\overline{X} = \overline{AX}$
  - **1 pt : enfin** $\overline{AX} = \overline{\lambda \cdot X} = \overline{\lambda} \cdot \overline{X}$

20. Déduire de la question précédente que si A est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et :

$$\big(I_n - A\big)\,\big(I_n + A\big)^{-1} = \big(I_n + A\big)^{-1}\,\big(I_n - A\big)$$

Montrer que $R = \big(I_n + A\big)^{-1}\,\big(I_n - A\big)$ est une matrice orthogonale.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset i\,\mathbb{R}$ **donc** -1 **n'est pas une valeur propre de** A **donc** $A + I_n$ **est inversible**
- **1 pt : on applique** ***18*** **à** $C = I_n + A$ **et** $B = I_n - A$ **(qui commutent)**
- **2 pts :**
  - **1 pt :** ${}^tR \times R = {}^t(I_n - A) \times {}^t\Big((I_n + A)^{-1}\Big) \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A)$
  $= {}^t(I_n - A) \times \Big({}^t(I_n + A)\Big)^{-1} \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A) = (I_n + A) \times (I_n - A)^{-1} \times (I_n + A)^{-1} \times (I_n - A)$
  - **1 pt :** $\cdots = (I_n + A) \times (I_n - A)^{-1} \times (I_n - A) \times (I_n + A)^{-1} = (I_n + A) \times I_n \times (I_n + A)^{-1}$

21. Calculer le déterminant de R.

- **1 pt :** $\det(R) = \det\Big(\ (I_n + A)^{-1} \ \Big) \times \det\big(I_n - A \big) = \dfrac{\det\big(I_n - A \big)}{\det\big(I_n + A \big)}$
- **1 pt :** $\cdots = \dfrac{\det\Big({}^t(I_n + A) \Big)}{\det\big(I_n + A \big)}$ **puisque** ${}^tA = -A$
- **1 pt :** $\dfrac{\det\big(I_n + A \big)}{\det\big(I_n + A \big)} = 1$

22. Soit R une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible.
Démontrer que la matrice $A = \big(I_n + R\big)^{-1} \big(I_n - R\big)$ est antisymétrique.

- **1 pt :** ${}^tA = {}^t(I_n - R) \times {}^t\Big((I_n + R)^{-1}\Big) = ({}^tI_n - {}^tR) \times \Big(({}^tI_n + {}^tR)\Big)^{-1}$
- **1 pt :** $(I_n - R^{-1}) \times \Big(I_n + R^{-1}\Big)^{-1} = (I_n - R^{-1}) \times \Big((R + I_n) \times R^{-1}\Big)^{-1} = (I_n - R^{-1}) \times \Big(R^{-1} \Big)^{-1} \times \big(R + I_n\big)^{-1}$
- **1 pt :** $\cdots = \big(I_n - R^{-1}\big) \times R \times \big(R + I_n\big)^{-1} = \big(R - I_n\big) \times \big(R + I_n\big)^{-1} = -\big(I_n + R\big)^{-1} \times \big(I_n - R\big)$

EXERCICE 3

II existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

On propose ici d'en présenter une.

23. **Question préliminaire**
Si on admet que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$?

- **1 pt :** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{\substack{n=1 \\ \boxed{n \text{ pair}}}}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} + \sum\limits_{\substack{n=1 \\ \boxed{n \text{ impair}}}}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{4}{3} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{4}{3} \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}$

24. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}\, dx$.
On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

- **1 pt :** $\forall x \in \ ]-1,1[,\ \dfrac{1}{x^2 - 1} = -\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$
- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } n \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $x_0 \in \ ]0,1[$**,** $\sum \ \big(x_0{}^2\big)^n$ **ACV donc la série** $\sum \ f_n$ **CS sur** $]0,1[$
  - × **0 pt : la fonction** $S : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^{2k} \ \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$ **est continue (par morceaux) sur** $]0,1[$

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt :** $f_0 : t \mapsto \ln(t)$ **est intégrable sur** $]0,1[$
  - × **1 pt : si** $n > 0$**,** $f_n : t \mapsto t^{2n}\ \ln(t)$ **est continue sur** $]0,1]$ **et l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)$ **est faussement impropre**
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Hypothèse spécifique}}$
  - × **1 pt : par IPP** $\displaystyle\int_0^1 |\, f_n(t)\,|\ dt = -\int_0^1 t^{2n}\ \ln(t)\ dt = \frac{1}{2n+1} \int_0^1 t^{2n}\ dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$
  - × **1 pt :** $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ **CV car** $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{n^2}$
- **0 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\ dx = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}\ \ln(x)\right)\ dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

25. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\ dt$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$

  pour tout $t \in]0,+\infty[$**, la fonction** $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{\arctan(t\,x)}{1+t^2}$ **est** $\mathscr{C}^0$ **sur** $[0,+\infty[$
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $x \in [0,+\infty[$**,** $t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ **est Cpm sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt :** $\left|\dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| = \dfrac{|\arctan(xt)\,|}{|\,1+t^2\,|} = \dfrac{|\arctan(xt)\,|}{1+t^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{1}{1+t^2}$
  - × **0 pt :** $\varphi : t \mapsto \dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{1}{1+t^2}$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$

26. Établir que cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $t \in]0,+\infty[$**,** $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\ \arctan(t\,x)$ **est** $\mathscr{C}^1$ **sur** $[0,+\infty[$**.**
  - × **0 pt :** $\underline{h}_t'(x) = \dfrac{1}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+\big(t\,x\big)^2}\ t = \dfrac{1}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+\big(t\,x\big)^2}\ t = \dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+t^2\,x^2}$
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $x \in [0,+\infty[$**,** $t \mapsto h(x,t)$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$ **d'après la question précédente**
  - × **1 pt : si** $x \in [a,+\infty[$ **et** $t > 0$ **:** $\left|\dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\right| = \dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+x^2\,t^2} \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+a^2\,t^2}$
  - × **1 pt :** $\psi : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}\ \dfrac{1}{1+a^2\,t^2}$ **est intégrable en** 0 **et en** $+\infty$ **(car** $\psi(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$**)**
- **0 pt :** $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underline{h}_t'(x)\ dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\ \frac{1}{1+x^2\,t^2}\ dt$

27. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{x^2t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x\in\,]0,1[$, $f'(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

- **1 pt :** $\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{x^2\,t}{1+t^2x^2} \;=\; \dfrac{t\left(1-x^2\right)}{\left(1+t^2\right)\,\left(1+t^2x^2\right)}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^B \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,dt \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x^2}\,\ln\left(\frac{1+B^2}{1+x^2\,B^2}\right) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x^2}\,\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,dt=\lim_{B\to+\infty}\left(\int_0^B\frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,dt\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{1-x^2}\,\big(-\cancel{2}\ln(x)\big)$

28. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

- **1 pt :** $\displaystyle f(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\big(\arctan(t)\big)^1}{1+t^2}\,dt=\left[\frac{\big(\arctan(t)\big)^2}{2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\Big(\lim_{t\to+\infty}\big(\arctan(t)\big)^2\Big)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$
- **1 pt :** $\displaystyle f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt$
- **1 pt :** $\displaystyle f(0)\;=\;\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(0)}{1+t^2}\,dt\;=\;\int_0^{+\infty}0\,dt\;=\;0$
- **1 pt :** $\displaystyle f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\int_0^x\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt\right)=\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

EXERCICE 4

Partie I - Calcul des probabilités

29. Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n=0$ et $n=1$.

- **1 pt :** $p_0=\mathbb{P}\big(A_0\big)=\mathbb{P}\big(\Omega\big)=1$ **et** $q_0=\mathbb{P}\big(B_0\big)=\mathbb{P}\big(\varnothing\big)\;=\;0$**,** $r_0=\mathbb{P}\big(C_0\big)=\mathbb{P}\big(\varnothing\big)=0$
- **1 pt :** $p_1=\mathbb{P}\big(A_1\big)=\mathbb{P}\big(A_1\cap A_0\big)=\mathbb{P}\big(A_1\,|\,A_0\big)\times\mathbb{P}\big(A_0\big)=\dfrac{1}{2}\times1$
- **1 pt :** $q_1=\mathbb{P}\big(B_1\big)=\mathbb{P}\big(B_1\cap A_0\big)=\mathbb{P}\big(B_1\,|\,A_0\big)\times\mathbb{P}\big(A_0\big)=\dfrac{1}{4}\times1$ **et de même (ou SCE)** $r_1=\dfrac{1}{4}$

30. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1}=MV_n$.

- **1 pt : la famille** (A_n,B_n,C_n) **est un système complet d'événements**
- **1 pt : par la FPT :** $\mathbb{P}\big(A_{n+1}\big)=\mathbb{P}\big(A_{n+1}\cap A_n\big)+\mathbb{P}\big(A_{n+1}\cap B_n\big)+\mathbb{P}\big(A_{n+1}\cap C_n\big)$
  $=\mathbb{P}\big(A_{n+1}\,|\,A_n\big)\times\mathbb{P}\big(A_n\big)+\mathbb{P}\big(A_{n+1}\,|\,B_n\big)\times\mathbb{P}\big(B_n\big)+\mathbb{P}\big(A_{n+1}\,|\,C_n\big)\times\mathbb{P}\big(C_n\big)$
  $=\dfrac{1}{2}\times\mathbb{P}\big(A_n\big)+\dfrac{1}{4}\times\mathbb{P}\big(B_n\big)+\dfrac{1}{4}\times\mathbb{P}\big(C_n\big)$
- **1 pt : de même** $\mathbb{P}\big(B_{n+1}\big)=\dfrac{1}{4}\times\mathbb{P}\big(A_n\big)+\dfrac{1}{2}\times\mathbb{P}\big(B_n\big)+\dfrac{1}{4}\times\mathbb{P}\big(C_n\big)$ **et** $\mathbb{P}\big(C_{n+1}\big)=\cdots$

31. En déduire que $V_n=M^n\,V_0$, puis une expression de p_n,q_n et r_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- **1 pt : récurrence écrite correctement**
- **1 pt :** $V_0\;=\;\begin{pmatrix}\mathbb{P}(A_0)\\ \mathbb{P}(B_0)\\ \mathbb{P}(C_0)\end{pmatrix}\;=\;\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
- **1 pt :** $V_n=M^n\,V_0=\dfrac{1}{3\cdot4^n}\begin{pmatrix}4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1\\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1\\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3\cdot4^n}\begin{pmatrix}4^n+2\\4^n-1\\4^n-1\end{pmatrix}$

32. Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

- **1 pt :** $p_n = \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{4^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$, $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$ **et** $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$
- **1 pt : un nombre limité d'étapes suffit pour que le pion ait presque une égale chance de se retrouver en chacun des points**

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

33. Interpréter la variable aléatoire $X_1+\cdots+X_n$ et le nombre $\mathbb{E}\left(X_1+\cdots+X_n\right)$.

- **1 pt :** $X_1+\cdots+X_n$ **prend pour valeur le nombre de passages du pion au point** A **au cours des** n **premières étapes (l'étape** 0 **étant exclue)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\left(X_1+\cdots+X_n\right)$ **est un moyenne pondérée des valeurs prises par** $X_1+\cdots+X_n$**. Ce nombre n'est autre que** a_n**.**

34. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- **1 pt :** $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ **donc** $X_n \sim \mathcal{B}(s)$ **où** $s = \mathbb{P}\big(\{X_n = 1\}\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{X_n=1\}\big) = \mathbb{P}(A_n) = p_n = \dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{4^n}\right)$

35. En déduire une expression de a_n.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1+\cdots+X_n) = \mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{4^k}\right)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k = \dfrac{n}{3} + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{n}{3} + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{4}{3}\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;

2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

36. Calculer $\mathbb{P}\big(\{T_B=1\}\big)$ et $\mathbb{P}\big(\{T_B=2\}\big)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\{T_B=1\}\big) = \mathbb{P}\big(B_1\big) = \dfrac{1}{4}$ **d'après la question** ***29***
- **1 pt :** $\{T_B = 2\} = \overline{B_1} \cap B_2$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(\overline{B_1}\cap B_2\Big) = \mathbb{P}\Big(A_1\cap\overline{B_1}\cap B_2\Big) + \mathbb{P}\Big(B_1\cap\overline{B_1}\cap B_2\Big) + \mathbb{P}\Big(C_1\cap\overline{B_1}\cap B_2\Big)$ **par FPT**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(A_1\cap B_2\big) + \mathbb{P}\big(\varnothing\cap B_2\big) + \mathbb{P}\big(C_1\cap B_2\big) = \mathbb{P}\big(A_1\big)\times\mathbb{P}_{A_1}\big(B_2\big) + 0 + \mathbb{P}\big(C_1\big)\times\mathbb{P}_{C_1}\big(B_2\big) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)$

37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

- **2 pts :** $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$

38. Établir que $\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$, puis en déduire que $\mathbb{P}\left(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) = \mathbb{P}\Big(B_3 \cap \Big(\ (A_2 \cap \overline{B_1})\ \cup\ (C_2 \cap \overline{B_1})\Big)\ \Big)$
$= \mathbb{P}\Big((B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1})\ \cup\ (B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1})\Big) = \mathbb{P}\Big(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\Big)\ +\ \mathbb{P}\Big(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\Big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\Big) = \mathbb{P}\Big(B_3 \,\big|\, A_2 \cap \overline{B_1}\Big) \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big)$
$= \mathbb{P}\Big(B_3 \,\big|\, A_2\Big) \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big) = \dfrac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big)$
- **0 pt : de même** $\mathbb{P}\Big(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\Big) = \dfrac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(C_2 \cap \overline{B_1}\Big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big) = \dfrac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(A_2 \cap \overline{B_1}\Big)\ +\ \dfrac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(C_2 \cap \overline{B_1}\Big) = \dfrac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big((A_2 \cup C_2) \cap \overline{B_1}\Big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\Big(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)\ =\ \dfrac{\mathbb{P}\Big(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)}{\mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)}\ =\ \dfrac{\frac{1}{4} \times \mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)}{\mathbb{P}\Big(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\Big)}\ =\ \dfrac{1}{4}$

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}$$

39. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}\big(\,\{T_B = k\}\,\big)$. Que vaut $\mathbb{P}\big(\,\{T_B = 0\}\,\big)$?

- **1 pt :** $\{T_B = k\} = \overline{B_1}\ \cap\ \ldots\ \cap\ \overline{B_{k-1}}\ \cap\ B_k$
- **1 pt : par la FPC :** $\mathbb{P}\big(\,\{T_B = k\}\,\big) = \mathbb{P}\Big(B_k\ \cap\ \overline{B_{k-1}}\ \cap\ \ldots\ \cap\ \overline{B_1}\Big)$
$= \mathbb{P}\left(B_k \mid \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{B_{k-1}} \mid \bigcap\limits_{i=1}^{k-2} \overline{B_i}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}) \times \mathbb{P}(\overline{B_1})$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(B_n \mid \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}\right)\ =\ \dfrac{1}{4}$ **donc** $\mathbb{P}(\overline{B_1})\ =\ 1 - \mathbb{P}(B_1)\ =\ 1 - \dfrac{1}{4}\ =\ \dfrac{3}{4}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,\{T_B = k\}\,\big)\ =\ \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} \times \cdots \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4}\ =\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,\{T_B = 0\}\,\big) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\,\{T_B = k\}\,\big) = 1 - \dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k} = 1 - \dfrac{1}{\cancel{4}} \times \dfrac{1}{\cancel{1 - \frac{3}{4}}}$

40. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

- **1 pt :** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\,\{T_B = k\}\,\big)\ =\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}\ =\ \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$ **donc** $T_B \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- **1 pt : ainsi** T_B **est d'espérance finie et :** $\mathbb{E}(T_B) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$