

DS1

PROBLÈME - Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

- Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.

- VOCABULAIRE**

Soit $a \in [0, +\infty[$ et soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

× On dit que l'objet $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est une **intégrale impropre en $+\infty$** .

× On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **convergente** (en $+\infty$) si la fonction :

$$\begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt \end{array}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Si c'est le cas, la valeur de $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est donnée par : $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$.

Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

- Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
 - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$, $J_n = \int_0^n f(t) dt$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \int_{k-1}^k f(t) dt$.
1. Préciser la monotonie des suites (S_n) et (J_n) , puis démontrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.

3. Démontrer enfin les deux résultats suivants.

a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente, si et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.

b) La série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge.

4. **Un exemple**

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in [2, +\infty[$, on note $f(x) = \frac{1}{x (\ln(x))^\alpha}$.

a) Étudier la monotonie de la fonction f , calculer $\int_2^x f(t) dt$ et en déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln(n))^\alpha}.$$

b) Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln(2)$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln(n))^2}$.

5. Une application

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) En utilisant le résultat **b)** de la question **3.**, établir que la suite (T_n) est convergente.
On notera γ sa limite (appelée constante d'Euler).

b) Justifier : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

En déduire un équivalent (au voisinage de $+\infty$) de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$.

6. Une application sur une série de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, $g_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on note : $f(t) = \frac{x}{t^2 + x^2}$.

Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

Partie II - Contre-exemples

7. On pose pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_n^{n+1} f(t) dt$.

On pourra remarquer : $\int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t) dt$.

Dans la suite, on note $[x]$ la partie entière du réel x .

b) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, établir : $\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \frac{2}{\pi}([x] - 1)$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est-elle convergente ? Que dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$?

8. On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est divergente.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $a_n \in \mathbb{R}$ de sorte que le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\frac{1}{n^2}$.

b) On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ comme suit :

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = 1$.

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est représentée par le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 sur l'intervalle $[n - a_n, n + a_n]$.

× la fonction est nulle en dehors partout ailleurs.

Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[1, +\infty[$.

c) Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

Exercice 1 - Restes de séries alternées

- Dans cet exercice, f désigne une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.
- On rappelle que, si $v = (v_n)_{n \geq 0}$ est une suite à termes réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle, alors :

× la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ est convergente

× pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k v_k$ est positive si n est pair, négative si n est impair, et vérifie

$$\text{l'inégalité : } \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k v_k \right| \leq v_n.$$

9. Établir, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la double inégalité :

$$0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -\frac{f'(t)}{f(t)}$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = (-1)^n f(n)$.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(i) $|r_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p)$

(ii) $0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1)$

c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} r_n$ est convergente.

d) Démontrer que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = 0$ alors : $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$.

11. a) Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$ est-elle convergente ?

b) Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent (au voisinage de $+\infty$) de la suite $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} \right)$.

Exercice 2 - Étude d'une série de fonctions

Dans cet exercice, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

- 12.** On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

démontrer que la série $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ est convergente.

- 13.** Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- 14.** À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0, 2\pi[$.

- 15.** On admet dans cette question que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

- 16.** Déterminer la limite, quand x tend vers 0, de :

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$$

On pourra effectuer un changement de variable et utiliser (sans avoir à la démontrer au préalable)

l'égalité : $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$

- 17.** Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{ix}$.

Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.