

DS1

PROBLÈME - Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

- Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
 - On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$, $J_n = \int_0^n f(t) dt$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k = \int_{k-1}^k f(t) dt$.
1. Préciser la monotonie de (S_n) et (J_n) , puis montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$.
- **2 pts** : (S_n) croissante (car f positive) et (J_n) croissante (car l'intégrale est croissante)
 - **1 pt** : pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k-1) \geq f(t) \geq f(k)$ par décroissance de f sur $[0, +\infty[$
 - **1 pt** : par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leq k$),

$$\int_{k-1}^k f(k-1) dt \geq \int_{k-1}^k f(t) dt \geq \int_{k-1}^k f(k) dt$$
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - f(0) \leq J_n \leq S_{n-1}$.
- **1 pt** : par sommation des inégalités précédentes $\sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$
 - **1 pt** : $\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt = \int_0^n f(t) dt$ par relation de Chasles et simplifications
3. Démontrer enfin les deux résultats suivants.
- a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente, si et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.
- **2 pts** : ($\Rightarrow$)
 - × **1 pt** : (S_n) suite croissante car $\sum f(n)$ est une SATP
 - × **1 pt** : puis majoration car $S_n \leq \int_0^n f(t) dt \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$
 - **3 pts** : ($\Leftarrow$)
 - × **0 pt** : on note $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$
 - × **1 pt** : La suite (S_n) est croissante et majorée (par un réel M)
 - × **1 pt** : $F(x) \leq F(\lceil x \rceil) \leq S_{\lceil x \rceil-1} \leq M$
 - × **1 pt** : par théorème de la limite monotone, comme F est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$, F admet une limite finie en $+\infty$
- b) La série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ converge.
- **1 pt** : la série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$ est à termes positifs (d'après la question 1) donc sa suite des sommes partielles est croissante
 - **1 pt** : $\int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1)$ (d'après la question 1)
 - **1 pt** : $\sum_{n=1}^N \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right) \leq \sum_{n=1}^N (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N) \leq f(0)$
(ou avec le théorème de comparaison des séries à termes positifs)

4. Un exemple

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in [2, +\infty[$, on note $f(x) = \frac{1}{x (\ln(x))^\alpha}$.

a) Étudier la monotonie de la fonction f , calculer $\int_2^x f(t) dt$ et en déduire la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln(n))^\alpha}.$$

• **2 pts : la fonction f est décroissante (soit par inégalités, soit en calculant $f'(x) = \frac{-1}{x^2 (\ln(x))^{\alpha+1}} (\ln(x) + \alpha) \leq 0$)**

• **1 pt : Cas $\alpha = 1$, $\int_2^x \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(|\ln(t)|)]_2^x = \ln(|\ln(x)|) - \ln(\ln(2))$**

• **1 pt : Cas $\alpha \neq 1$, $\int_2^x \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha} = \left[-\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(\ln(t))^{\alpha-1}} \right]_2^x = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln(x))^{\alpha-1}} \right)$**

• **1 pt : ainsi $x \mapsto \int_2^x \frac{dt}{t \ln(t)}$ admet une limite finie en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$**

• **1 pt : on est dans les hypothèses du théorème et la série est donc convergente ssi $\alpha > 1$**

b) Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln(2)$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln(n))^2}$.

• **1 pt : la fonction f est positive, continue décroissante sur $[2, +\infty[$ (mention)**

• **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\int_2^{n+1} \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \int_2^n \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx + \frac{1}{2(\ln(2))^2}$**

• **1 pt : $\frac{1}{\ln(2)} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^2} \leq \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{2(\ln(2))^2}$ avec convergence justifiée**

5. Une application

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a) En utilisant le résultat b) de la question 3., établir que la suite (T_n) est convergente.
On notera γ sa limite (appelée constante d'Euler).

• **1 pt : $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = 1 - \sum_{k=2}^n \left(\int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt - \frac{1}{k} \right)$**

• **1 pt : on applique 3.b) à $x \mapsto \frac{1}{x}$, continue, positive, décroissante sur $[1, +\infty[$**

b) Justifier : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

En déduire un équivalent (au voisinage de $+\infty$) de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$.

• **1 pt : $T_n = \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$**

• **1 pt : comme $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$**

6. Une application sur une série de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, $g_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on note : $f(t) = \frac{x}{t^2 + x^2}$.

Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$.

- 1 pt : f décroissante (avec calcul de dérivée ou par vérification de la conservation d'inégalités)
- 1 pt : on applique le théorème à la fonction f positive, continue décroissante
- 2 pts :
 - × 1 pt : extraire l'inégalité de gauche
 - × 1 pt : extraire l'inégalité de droite

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

- 2 pts : à distribuer sur

$$\times \int_0^n f(t) dt = \int_0^n \frac{1}{x} \frac{1}{\left(\frac{t}{x}\right)^2 + 1} dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^n = \arctan\left(\frac{n}{x}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\times \int_1^{n+1} f(t) dt = \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

(1 pt calcul + 1 pt limite par exemple)

- 1 pt : comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente, la série $\sum f(n)$ l'est (on est dans le cadre du théorème)
- 1 pt : on passe alors à la limite ($n \rightarrow +\infty$) dans l'inégalité de la question précédente

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

- 2 pts : en tout ou rien. On applique le théorème d'encadrement.
La mention « passage à la limite » vaut 0 pt.

Partie II - Contre-exemples

7. On pose pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \lfloor \sin(2\pi x) \rfloor$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_n^{n+1} f(t) dt$.

On pourra remarquer : $\int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t) dt$.

- 1 pt : la fonction sinus est positive sur $[0, \pi]$ et négative sur $[\pi, 2\pi]$. Par périodicité, $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est positive sur $[n, n + \frac{1}{2}]$ et négative sur $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$
- 1 pt : $\int_n^{n+1} f(t) dt = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t) dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t) dt$ par relation de Chasles (citée)
- 1 pt : calcul

$$\dots = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \sin(2\pi x) dx - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \sin(2\pi x) dx = \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \right]_n^{n+\frac{1}{2}} - \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi} \right]_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} =$$

$$\dots = \frac{2}{\pi}$$

Dans la suite, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x .

b) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, établir : $\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \frac{2}{\pi} ([x] - 1)$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est-elle convergente ? Que dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$?

• **1 pt** : $\int_1^x |\sin(2\pi t)| dt \geq \int_1^{[x]} |\sin(2\pi t)| dt$ car $|\dots| \geq 0$

• **1 pt** : $\dots = \sum_{n=1}^{[x]-1} \int_n^{n+1} |\sin(2\pi t)| dt = \sum_{n=1}^{[x]-1} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} ([x] - 1)$

• **1 pt** : $\int_1^x \dots \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par comparaison

• **1 pt** : la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est convergente car de terme général nul

8. On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est divergente.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $a_n \in \mathbb{R}$ de sorte que le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\frac{1}{n^2}$.

• **2 pts** : il suffit de prendre $a_n = \frac{1}{n^2}$

b) On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ comme suit :

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = 1$.

× pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est représentée par le triangle de base $[n - a_n, n + a_n]$ et de hauteur 1 sur l'intervalle $[n - a_n, n + a_n]$.

× la fonction est nulle en dehors partout ailleurs.

Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[1, +\infty[$.

• **2 pts** : représentation graphique correcte

c) Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

• **1 pt** : $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \int_{n-a_n}^{n+a_n} f(n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2}$

• **1 pt** : $\sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{n=2}^N 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$

Exercice 1 - Restes de séries alternées

• Dans cet exercice, f désigne une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$, décroissante et convexe, à valeurs strictement positives et de limite nulle en $+\infty$.

9. Établir, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la double inégalité : $0 \leq \frac{f(t) - f(t+1)}{f(t)} \leq -\frac{f'(t)}{f(t)}$.

• **1 pt** : la fonction f est convexe donc sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes notamment celle au point d'abscisse t d'équation : $y = f(t) + f'(t)(x - t)$.

On en déduit : $\forall x \geq 0, f(x) \geq f(t) + f'(t)(x - t)$

• **1 pt** : en particulier, en $x = t + 1$, on obtient $f(t+1) \geq f(t) + f'(t)(t+1 - t)$

• **1 pt** : $f(t) - f(t+1) \geq 0$ par décroissance de f

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = (-1)^n f(n)$.

a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

- **2 pts : la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, positive et converge vers 0, le CSSA s'applique.**

(il faut parler de la suite $(f(n))$ pas de la fonction f !)

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(i) $|r_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p f(n+p)$

(ii) $0 \leq |r_n| - |r_{n+1}| \leq f(n) - f(n+1)$

- **1 pt : r_n est du signe de $(-1)^n f(n)$ donc de celui de $(-1)^n$ donc $|r_n| = (-1)^n r_n$**

- **1 pt : $|r_n| = (-1)^n r_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{n+k} f(k) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{2n+p} f(n+p) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p f(n+p)$**
(1 pt pour le décalage d'indice)

- **1 pt : $|r_n| - |r_{n+1}| = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (f(n+p) - f(n+p+1))$ d'après la question précédente**

- **2 pts : la série $\sum (-1)^p (f(n+p) - f(n+p+1))$ vérifie les propriétés du CSSA**

× **1 pt : la suite $(f(n+p) - f(n+p+1))$ est positive et converge vers 0**

× **1 pt : $f(n+p+1) \leq \frac{f(n+p) + f(n+p+2)}{2}$ par convexité de f donc $2f(n+p+1) \leq f(n+p) + f(n+p+2)$ et $f(n+p+1) - f(n+p+2) \leq f(n+p) - f(n+p+1)$**

- **1 pt : on en conclut que $|r_n| - |r_{n+1}|$ est du signe du 1^{er} terme et majoré par la valeur absolue de celui-ci ($= f(n) - f(n+1)$)**

c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} r_n$ est convergente.

- **1 pt : comme vu dans la question précédente, r_n est du signe de $(-1)^n$ donc $|r_n| = (-1)^n r_n$ et donc $r_n = (-1)^n |r_n|$**

- **1 pt : de plus la suite $(|r_n|)$ est décroissante (question précédente), et de limite nulle (comme reste d'une série convergente)**

- **1 pt : ainsi, par CSSA, la série $\sum (-1)^n |r_n|$ est convergente**

d) Démontrer que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = 0$ alors : $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$.

- **0 pt : il s'agit de démontrer $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2} = \frac{(-1)^n f(n)}{2}$**

- **1 pt : $\sum_{k=n}^{+\infty} ((-1)^k f(k) - (-1)^{k+1} f(k+1)) = 2r_n - (-1)^n f(n)$ ou encore :**

$$r_n = \frac{(-1)^n f(n)}{2} + \sum_{k=n}^{+\infty} ((-1)^k f(k) - (-1)^{k+1} f(k+1)) = \frac{u_n}{2} + v_n$$

- **1 pt : par CSSA, $|v_n| \leq f(n) - f(n+1)$**

- **1 pt : $f(n) - f(n+1) \leq -\frac{f'(n)}{f(n)} f(n) = -\frac{f'(n)}{f(n)} (-1)^n u_n$ et ainsi (comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(n)}{f(n)} = 0$),**

$$v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$$

- **1 pt : finalement $r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$**

11. a) Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$ est-elle convergente ?

- 2 pts : si $x > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$ est (A)CV car $\left| \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x} \right| = o\left(\frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}}\right)$
- 1 pt : si $x \in]0, 1]$, la suite $\left(\frac{\ln(n)}{n^x}\right)_{n \geq 3}$ est décroissante, positive et converge vers 0 par croissances comparées. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$ est donc convergente par CSSA
- 1 pt : si $x \leq 0$, $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x} \not\rightarrow 0$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^x}$ est (G)DV

b) Pour ces valeurs, déduire des résultats précédents un équivalent (au voisinage de $+\infty$) de la suite $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x}\right)$.

- 3 pts : pour tout $x > 0$, on considère $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$. On démontre que f vérifie les hypothèses permettant d'utiliser le résultat démontré et ainsi $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \ln(n)}{2n^x}$
(1 pt pour l'idée sans démonstration)

Exercice 2 - Étude d'une série de fonctions

Dans cet exercice, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

12. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

démontrer que la série $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ est convergente.

- 1 pt : $|(a_n - a_{n+1}) b_n| \leq M (a_n - a_{n+1})$
- 1 pt : or la série $\sum a_n - a_{n+1}$ est convergente puisque la suite (a_n) l'est (somme télescopique)
- 1 pt : on en déduit, par théorème de comparaison des SATP et par l'inégalité donnée dans l'énoncé, que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n a_k (b_k - b_{k-1})\right)$ est convergente

13. Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- 1 pt : $e^{ix} \neq 1$
- 2 pts : $\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{ix} \frac{e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

14. À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0, 2\pi[$.

- 1 pt : on définit (a_n) et (b_n) par $b_0 = 0$ et $b_n = \sum_{k=1}^n e^{ikx}$ et $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$
- 1 pt : d'après la question précédente $|b_n| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ donc (b_n) bornée
- 1 pt : la suite (a_n) est une suite réelle positive décroissante de limite nulle
- 0 pt : ainsi pour tout $x \in]0, 2\pi[$, la série $\sum \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ est convergente

15. On admet dans cette question que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

- 1 pt : $\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S_n(x) - \int_1^{n+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right) \right|$
 $\dots \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right|$
- 1 pt : par l'inégalité fournie $\dots \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$
- 1 pt : on obtient le résultat par passage à la limite

16. Déterminer la limite, quand x tend vers 0, de :

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$$

On pourra effectuer un changement de variable et utiliser (sans avoir à la démontrer au préalable)

l'égalité : $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$

- 1 pt : par changement de variable $\boxed{u = \sqrt{tx}}$, $I(x) = 2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{iu^2} du$
- 1 pt : ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} I(x)$ existe
- 1 pt : et vaut $2 \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{iu^2} du = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}$

17. Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{ix}$.

Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

- 1 pt : $\frac{e^{ix} - 1}{ix} = \frac{\sin(x)}{x} - i \frac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
- 1 pt : l'inégalité de q.15 démontre, pour $x \in]0, 2\pi[$, $\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} \sqrt{x} S(x) - I(x) \right| \leq \sqrt{x} C$
- 1 pt : ainsi (par théorème d'encadrement) $\frac{e^{ix} - 1}{ix} \sqrt{x} S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ et donc $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$