

DS2

Exercice I : Équivalent de Stirling

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

3. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\rho_k = \ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(\Gamma(n)) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 \ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt$$

6. En déduire que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

7. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\ln(\Gamma(n)) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + c + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

En déduire :

$$\Gamma(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$$

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

10. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

On définit la fonction $\mathbb{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$, en posant $\mathbb{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,n[}(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question 7.

On pourra faire appel aux résultats des questions 1 et 2.

Exercice II : Équation télescopique

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d .
- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Rappels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Supposons que l'espace vectoriel F est stable par l'endomorphisme f .

On rappelle qu'on appelle alors endomorphisme induit par f sur F la restriction de f à F au départ et à l'arrivée. Plus précisément, il s'agit de l'application :

$$\begin{aligned} f|_F : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Supposons que l'espace vectoriel E est de dimension finie égale à n . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On rappelle la caractérisation de l'image de f en dimension finie :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Objectifs du problème

Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) = h(x) \quad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h) .

La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.

La partie II définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h) , ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.

1. Étude de l'opérateur de différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

12. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
13. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .
14. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.
On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ .
15. Déterminer $\text{Ker}(\Delta_d)$ et $\text{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.
16. En déduire $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.
17. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h) .
18. Démontrer : $\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_d[X])}$.
19. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)
En déduire un polynôme annulateur de Δ_d . L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable ?

2. Polynômes de Bernoulli

On note ω l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par : $\omega(t) = e^{2i\pi t}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt$$

2.a) Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$I_p = \int_0^1 \frac{(\omega(t))^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt$$

20. Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

On admet :

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, I_p = 0 \end{cases}$$

2.b) Lien avec l'équation (E_h)

21. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$$

Démontrer que B_n est un polynôme unitaire de degré n .

22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B'_n = n B_{n-1}$.

23. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1}$$

On pourra utiliser sans démonstration l'égalité : $\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(\omega(t))^{n-1}} dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

24. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

2.c) Unicité

25. Montrer que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = n B_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0 \end{cases}$$

26. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : H_n = B_n$.

Problème : Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

27. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

28. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

29. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt$$

30. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

31. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$$

32. Vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$$

33. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis conclure : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer d'abord la limite de f en $+\infty$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$$

II.A - Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

34. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

35. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n , et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n .

II.B - Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\text{II.1})$$

36. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente :

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $] -\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

37. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ on pose $q(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

38. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $] -1, +\infty[$ que l'on convient de noter également q .

39. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

40. En déduire que q est une fonction décroissante sur $] -1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, f_n(y) \leq (1+y)e^{-y} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_-, f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$$

41. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

II.C - Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad v_n = \ln(u_n) \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

42. Vérifier que $w_n = \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

43. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n$$

44. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$.

46. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

II.C.3)

47. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

48. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$$