

DS2 / 159

Exercice I : Équivalent de Stirling (/41)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

• 1 pt : $g_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1) \ln(t)} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

• 2 pts : étude en 0

× 1 pt : $t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} e^0 = \frac{1}{t^{1-x}}$

× 1 pt : $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ convergente si et seulement si $1 - x < 1$ c-à-d $x > 0$

• 2 pts : étude en $+\infty$. Affirmer $t^{x-1} e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$

× 1 pt : si affirmation sans explication

× 1 pt : si affirmation avec explication pertinente (étude de cas selon x)

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

• 1 pt : $\int_0^{+\infty} t^{(x+\cancel{x})-\cancel{x}} e^{-t} dt = -[t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$ sous réserve CV

• 1 pt : signaler que deux éléments convergent

• 2 pts : récurrence (1 pour initialisation, 1 pour hérédité, 0/2 si pb de rédaction)

3. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

• 3 pts : récurrence

× 1 pt : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \cancel{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}}$ en posant $\boxed{u = \sqrt{t}}$

× 1 pt : $\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} = \dots = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} (n+1)!} \sqrt{\pi}$

× 1 pt : bonus si tout bon

0 / 3 si problème de rédaction (récurrence non lue)

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\rho_k = \ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(\Gamma(n)) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

- **1 pt** : $\ln(\Gamma(n)) = \ln((n-1)!) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k)$
- **1 pt** : $\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - \int_{1-\frac{1}{2}}^{(n-1)+\frac{1}{2}} \ln(t) dt$

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- $\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt$
- **1 pt** : $2\ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t) = -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k}{k+t}\right) + \ln\left(\frac{k}{k-t}\right) = \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - t^2}\right) = -\ln\left(\frac{k^2 - t^2}{k^2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)$
- **0 pt** : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k) dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k+t) dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k-t) dt$
- **1 pt** : $2 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k) dt = 2 \times \left(\frac{1}{2} - 0\right) \times \ln(k) = \ln(k)$
- **1 pt** : $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k+t) dt = \int_k^{k+\frac{1}{2}} \ln(u) dt$ en posant $\boxed{u = k+t}$
- **1 pt** : $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k-t) dt = \int_k^{k-\frac{1}{2}} \ln(u) \times (-1) dt = \int_{k-\frac{1}{2}}^k \ln(u) dt$ en posant $\boxed{u = k-t}$

6. En déduire que $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

- **1 pt** : $h_k : t \mapsto -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)$ est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$
- **1 pt** : $h'_k(t) = \cancel{(1)} \times \frac{1}{1 - \frac{t^2}{k^2}} \times \frac{2t}{k^2} = \frac{2t}{k^2 - t^2} > 0$ donc h_k strictement croissante
- **1 pt** : $h_k(0) = 0 \leq -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = h_k\left(\frac{1}{2}\right)$
- **1 pt** : $-\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{1}{8k^2} = \underset{k \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et théorème domination

7. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\ln(\Gamma(n)) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + c + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

En déduire :

$$\Gamma(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\varepsilon n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

- **0 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(\Gamma(n)) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$
- **1 pt** : $\int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + 1 + \frac{1}{2} \ln(2) + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + a + \alpha_n$

- **1 pt** : $n \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$ **et** $-\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$
- **0 pt** : **ainsi** $a + \alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} a - \frac{1}{2} + 0$
- **1 pt** : $\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = b + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$ **où** $b = \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k$
- **1 pt** : $\ln(\Gamma(n)) = (n - \frac{1}{2}) \ln(n) - n + (a + \alpha_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = (n - \frac{1}{2}) \ln(n) - n + (a - \frac{1}{2}) + b + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$
- **1 pt** : $\Gamma(n) = \exp(\ln(\Gamma(n))) = e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \times \exp\left(\underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$

8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } \Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (nu)^{x-1} (1-u)^n n du = n \int_0^1 n^{x-1} u^{x-1} (1-u)^n du$$

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

• **3 pts : par récurrence**

$$\times \text{ 1 pt : } \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^1 du = \int_0^1 u^{x-1} du - \int_0^1 u^x du = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\times \text{ 1 pt : } \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{n+1} du = \left[\frac{u^x}{x} (1-u)^{n+1} \right]_0^1 - \frac{n+1}{x} \int_0^1 u^x (-(1-u))^n du$$

$$\times \text{ 1 pt : } \dots = \frac{n+1}{x} \times \Gamma_n(x+1) = \frac{n+1}{x} \frac{n!}{(x+1)((x+1)+2) \dots ((x+1)+n)} = \frac{(n+1)!}{x(x+1) \dots (x+n+1)}$$

10. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

On définit la fonction $\mathbb{1}_{]0, n[}$ sur $\mathbb{R}_+$, en posant $\mathbb{1}_{]0, n[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0, n[}(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

$$\bullet \text{ 0 pt : notation } u_n : t \mapsto \mathbb{1}_{]0, n[}(t) t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

• 2 pts : Existence d'une limite finie - étude « en n »

× 1 pt : dès que $n > t_0$, $u_n(t_0) = t^{\alpha-1} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t_0}{n}\right)\right)$

× 1 pt : $n \ln\left(1 - \frac{t_0}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cancel{n} \times \frac{-t_0}{\cancel{n}} \text{ donc } u_n(t_0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} t^{\alpha-1} e^{-t_0}$

• 3 pts : Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

× 1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est cpm sur $]0, +\infty[$.

× 1 pt : $|u_n(t)| = |\mathbf{1}_{]0, n[}(t)| \times |t^{\alpha-1}| \times \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right| \leq |t^{\alpha-1}| \times \left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right|$

× 1 pt : $0 \leq t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^{\alpha-1} e^{-t}$ par inégalité de convexité sur $\ln$ ou $\exp$

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question 7.

On pourra faire appel aux résultats des questions 1 et 2.

• 1 pt : $\Gamma(x+n) = ((x+n)-1) \Gamma((x+n)-1) = (x+(n-1)) (x+(n-2)) \dots x \Gamma(x)$ (réc)

• 0 pt : $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} = \frac{(x+n) (x+(n-1)) \dots x \Gamma(x)}{(x+n) (n-1)! n^x}$

• 1 pt : $\dots \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(x+n) (x+(n-1)) \dots x}{n (n-1)! n^x} \times \Gamma(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(x+n) \dots x}{\cancel{n!} \cancel{n^x}} \times \frac{\cancel{n^x} \cancel{n!}}{x \dots (x+n)} = 1$

• 1 pt : $\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n) n^{\frac{1}{2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)!}{n! \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi}$

• 1 pt : $\dots \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n \Gamma(2n)}{(n+1) \Gamma(n) \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cancel{2n} \Gamma(2n)}{\cancel{2n} \Gamma(n) \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n-1} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi}$

• 1 pt : $\dots \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^c (2n)^{2n-\frac{1}{2}} e^{-2n}}{e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \times e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}} \times \frac{1}{2^{2n-1} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{e^c}$

Exercice II : Équation télescopique (/44)

Objectifs du problème

Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) = h(x) \quad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h) .

La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.

La partie II définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h) , ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.

1. Étude de l'opérateur de différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

12. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

- 1 pt : linéarité
- 1 pt : Δ est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$

13. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .

- 1 pt : $\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X-1)))$ apparaît ou argument convaincant pour $\deg(\Delta(P)) \leq \deg(P) - 1$ (point « parallèle » pas supplémentaire)
- 0 pt : $\Delta(P) = \sum_{k=0}^d \left(a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \right) - \sum_{k=0}^d a_k X^k$ (par formule du binôme de Newton)
- 1 pt : $\Delta(P) = \sum_{i=0}^d \left(\sum_{k=i}^d a_k \binom{k}{i} X^i \right) - \sum_{i=0}^d a_i X^i$
- 1 pt : $\Delta(P) = \sum_{i=0}^{d-2} \left(\sum_{k=i}^d a_k \binom{k}{i} - a_i \right) X^i + d a_d X^{d-1}$
- 1 pt : si $\deg(P) \leq 0$, alors : $\deg(\Delta(P)) = -\infty$
- 1 pt : si $\deg(P) \geq 1$, alors : $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$

14. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

- 1 pt : $\Delta(\mathbb{K}_d[X]) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ .

15. Déterminer $\text{Ker}(\Delta_d)$ et $\text{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

- 1 pt : $P \in \text{Ker}(\Delta_d) \Leftrightarrow \Delta_d(P) = 0_{\mathbb{K}_d[X]} \Leftrightarrow \deg(\Delta_d(P)) = -\infty \Leftrightarrow \deg(P) \leq 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_d = 0$
- 1 pt : $\text{Ker}(\Delta_d) = \text{Vect}(P_0) = \mathbb{K}_0[X]$
- 1 pt : $\text{Im}(\Delta_d) = \text{Vect}(\Delta(P_0), \Delta(P_1), \dots, \Delta(P_d))$
- 0 pt : $\Delta(P_k) = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}[X]} & \text{si } k = 0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i & \text{sinon} \end{cases}$
- 1 pt : $(Q_0, \dots, Q_{d-1})$ est une base de $\text{Im}(\Delta_d)$
- 1 pt : $\text{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$

16. En déduire $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

- 1 pt : $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]$
- 2 pts : $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$
 - × 1 pt : d'après la question précédente, en notant $m = \deg(Q)$, il existe $P \in \mathbb{K}_{m+1}[X]$ tel que : $Q = \Delta_{m+1}(P) = \Delta(P)$
 - × 1 pt : $P \in \mathbb{K}[X]$ car $\mathbb{K}_{m+1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$
- 1 pt : si h est polynomiale, l'équation (E_h) admet des solutions.

17. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h) .

- 0 pt : $\Delta(P_1) = P_0$ et $\Delta(P_2) = 2 \cdot P_1 + P_0$
- 1 pt : $\Delta\left(\frac{1}{2}(P_2 - P_1)\right) = \tilde{Q}$
- 1 pt : une solution de (E_h) est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x)$
- 1 pt : L'ensemble des solutions polynomiales de (E_h) est donc : $\{x \mapsto \tilde{f}(x) + c \mid c \in \mathbb{K}\} = \{x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x) + c \mid c \in \mathbb{K}\}$

18. Démontrer : $\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_d[X])}$.

- 1 pt : d'après 13 et par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(\Delta^n(P_k)) \leq k - n$
- 1 pt : $\deg(\Delta_d^{d+1}(P_k)) \leq k - (d+1) \leq d - (d+1) < 0$. Donc : $\Delta_d^{d+1}(P_k) = 0_{\mathbb{K}_d[X]}$

19. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

En déduire un polynôme annulateur de Δ_d . L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable ?

- 1 pt : Un polynôme annulateur de Δ_d est : X^{d+1} .
- 1 pt : $\text{Sp}(\Delta_d) \subset \{0\}$
- 2 pts : raisonnement par l'absurde

2. Polynômes de Bernoulli

On note ω l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par : $\omega(t) = e^{2i\pi t}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt$$

2.a) Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $I_p = \int_0^1 \frac{(\omega(t))^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt$.

20. Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

- 1 pt : $e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi$
- 1 pt : $\forall t \in [0, 1], |\omega(t)| = |e^{2i\pi t}| = 1 \neq 2\pi$
- 1 pt : la fonction $t \mapsto \frac{(\omega(t))^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur le SEGMENT $[0, 1]$

On admet :

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, I_p = 0 \end{cases}$$

2.b) Lien avec l'équation (E_h)

21. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$$

Démontrer que B_n est un polynôme unitaire de degré n .

- 1 pt : le coefficient de degré n de B_n est : $\cancel{n!} \times \frac{I_{n-n}}{\cancel{n!}} = I_0 = 1$

22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B'_n = n B_{n-1}$.

- 1 pt : $B'_n(X) = n! \sum_{k=1}^n \frac{I_{k-n}}{k!} k X^{k-1} = n! \sum_{k=1}^n \frac{I_{k-n}}{(k-1)!} X^{k-1} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1-n}}{k!} X^k$
- 1 pt : $\dots = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k-(n-1)}}{k!} X^k = n \times (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k-(n-1)}}{k!} X^k = n B_{n-1}(X)$

23. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1}$$

On pourra utiliser sans démonstration l'égalité : $\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(\omega(t))^{n-1}} dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ 1 pt : } B_n(z+1) - B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt - n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)} - e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(\omega(t))^{n-1}} dt = n! \times \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

24. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ 1 pt : } \sum_{k=0}^d \left(\frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z) \right) &= \sum_{k=0}^d a_k z^k = h(z) \\ \bullet \text{ 1 pt : } \sum_{k=0}^d \left(\frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z) \right) &= \tilde{g}(z+1) - \tilde{g}(z) \\ \bullet \text{ 1 pt : } \tilde{g} \text{ est bien polynomiale car } B_1, \dots, B_{d+1} \text{ le sont} \end{aligned}$$

2.c) Unicité

25. Montrer que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = n B_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0 \end{cases}$$

- 2 pts : la suite (B_n) est solution du système ci-dessous
 - × 1 pt : $B_0(X) = 1$ d'après 21 et $\forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = n B_{n-1}$ d'après 22
 - × 1 pt : $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$
- 4 pts : c'en est l'unique solution
 - × 1 pt : initialisation
 - × 3 pts : hérédité

26. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, H_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : H_n = B_n$.

- 2 pts : (H_n) satisfait le système de la question précédente
 - × 1 pt : $H_0(X) = 1$ et $H'_n = n H_{n-1}$
 - × 1 pt : $\int_0^1 H_n(t) dt = 0$ avec le changement de variable $u = 1 - t$

Problème : Quelques applications de la formule de Stirling (/69)

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

27. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

- 1 pt : $|e^{-t^2}| = e^{-t^2} = o(e^{-t})$ $_{t \rightarrow +\infty}$
- 1 pt : théorème de négligeabilité écrit correctement

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

28. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

- 1 pt : f définie sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ continue sur le SEGMENT $[0, 1]$
- 1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$
- 1 pt : $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

29. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2} dt$$

- 2 pts :

Caractère $\mathcal{C}^1$ - étude « en x »
- × 1 pt : pour tout $t_0 \in [0, 1]$, $h_{t_0} : x \mapsto \frac{1}{t_0^2+1} e^{-(t_0^2+1)x^2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, +\infty[$.
- × 1 pt : $h_{t_0}'(x) = \frac{1}{\cancel{t_0^2+1}} \times (-2(\cancel{t_0^2+1})x) \times e^{-(t_0^2+1)x^2} = -2x e^{-(t_0^2+1)x^2}$

- 3 pts :

Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- × 1 pt : pour tout $x \in] -\infty, +\infty[$, $t \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$ est intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur le SEGMENT $[0, 1]$
- × 2 pts : si $x \in [a, b]$ et $t \in [0, 1]$: $\left| -2x e^{-x^2(t^2+1)} \right| = 2|x| e^{-x^2(t^2+1)} \leq 2 \max(|a|, |b|)$

30. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- 2 pts : $s : t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est LA primitive de s qui s'annule en 0.
En particulier, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = s(x) = e^{-x^2}$.

31. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$$

• 1 pt : si $x \neq 0$, en posant $\boxed{u = xt}$, $\int_0^1 e^{-(xt)^2} dt = \int_0^x e^{-u^2} \frac{1}{x} du$.

• 1 pt : de plus $f'(0) = 0 = -2e^0 \times g(0)$

32. Vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$$

• 1 pt : $u : x \mapsto \frac{\pi}{4} - g(x)^2$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -2g(x) \times g'(x)$

• 1 pt : il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = f(x) + c$

• 1 pt : $c = u(0) - f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$ donc $f = u$

33. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis conclure : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer d'abord la limite de f en $+\infty$.

• 1 pt : $\boxed{\text{Existence d'une limite finie - étude « en } x \text{ »}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_0^2 + 1} e^{-(t_0^2 + 1)x^2} = 0$ (car $e^{-(t_0^2 + 1)x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ puisque $-(t_0^2 + 1)x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$)

• 2 pts : $\boxed{\text{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \text{ »}}$

× 1 pt : $\ell : t \mapsto 0 / t \mapsto \frac{1}{t^2 + 1} e^{-(t^2 + 1)x^2}$ cpm sur $[0, 1]$ (au moins une)

× 1 pt : $|h_t(x)| = \frac{e^{-(t^2 + 1)x^2}}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{t^2 + 1}$ et $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}$ est intégrable sur $[0, 1]$

• 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x))^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} - f(x) \right) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

• 0 pt : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n} \right)$$

II.A - Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

34. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

• 1 pt : $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc I_n impropre seulement en $+\infty$

• 1 pt : $|t^n e^{-t}| = t^n e^{-t} = o\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)$

• 0 pt : théorème de négligeabilité

35. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n , et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n .

- 1 pt : IPP $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = - \left[t^{n+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$
- 1 pt : mise en avant de la convergence des intégrales
- 2 pts : récurrence pour démontrer $I_n = n!$

II.B - Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\text{II.1})$$

36. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente :

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy$$

- 2 pts : en posant $y = \frac{1}{\sqrt{n}} t - \sqrt{n}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n + \sqrt{n}y)^n e^{-(n+\sqrt{n}y)} \times \sqrt{n} dy$
 $= n^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} y\right)^n e^{-n} e^{-\sqrt{n}y} \times \sqrt{n} dy = \sqrt{n} n^n e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} y\right)^n e^{-\sqrt{n}y} dy$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

37. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y)$.

- 1 pt : si n grand ($n \geq \lceil y_0^2 \rceil$), $f_n(y_0) = \exp(n \ln(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}})) e^{-\sqrt{n}y_0} = \exp(n \times \ln(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}}) - \sqrt{n}y_0)$
- 2 pts :
 - × 1 pt : $n \times \ln\left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}y_0 - \frac{y_0^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$
 - × 1 pt : $f_n(y_0) = \exp\left(-\frac{y_0^2}{2}\right) \times \exp\left(o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{y_0^2}{2}\right) \times \exp(0)$

Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ on pose $q(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

38. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1, +\infty[$ que l'on convient de noter également q .

- 1 pt : q est continue sur $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$ par quotient
- 1 pt : $\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$

39. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

- 2 pts : cas $x \neq 0$
 - × 1 pt : $\frac{u}{1+ux} = \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x}{1+ux}\right)$
 - × 1 pt : $\int_0^1 \frac{u}{1+ux} du = \frac{1}{x^2} (x - \ln(1+x) + \ln(1))$
- 1 pt : $\int_0^1 \frac{u}{1} du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} [u^2]_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = q(0)$

40. En déduire que q est une fonction décroissante sur $] -1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, f_n(y) \leq (1+y)e^{-y} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_-, f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$$

- 1 pt : si $y \leq z$ alors $\frac{u}{1+uy} \geq \frac{u}{1+uz}$ puis croissance de l'intégrale
- 1 pt : si $y \geq -\sqrt{n}$, $f_n(y) = \exp\left(y^2 \times \left(-q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)$
- 0 pt : si $y < -\sqrt{n}$, $f_n(y) = 0 \leq \exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)$
- 2 pts : si $y \geq 0$
 × 1 pt : $\exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp(-y^2 q(y))$ car $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$
 × 1 pt : $\exp(-y^2 q(y)) = \exp\left(-y^2 \times \frac{y - \ln(1+y)}{y^2}\right) = \exp(-y) \times \exp(\ln(1+y)) = (1+y)e^{-y}$
- 1 pt : si $y \leq 0$, $\exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp(-y^2 q(0)) = e^{-y^2/2}$

41. Dédurre des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

- 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy$
- 1 pt :

Existence d'une limite finie - étude « en n »

 la suite de fonctions (f_n) CS sur $] -\infty, +\infty[$ vers $u : y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ cpm sur $] -\infty, +\infty[$
- 3 pts :

Intégrabilité (par domination) - étude « en y »

 × 1 pt : $|f_n(y)| \leq \varphi(y) = \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{si } y < 0 \end{cases}$
 × 1 pt : $\int_0^{+\infty} (1+y)e^{-y} dy$ est convergente par linéarité
 × 1 pt : $\int_{-\infty}^0 e^{-y^2/2} dy$ est convergente
- 1 pt : $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$

II.C - Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad v_n = \ln(u_n) \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

42. Vérifier que $w_n = \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

- 1 pt : $w_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- 1 pt : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
- 1 pt : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- 1 pt : $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$

II.C.1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

43. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n$$

- **1 pt** : $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n$

- **1 pt** : rédaction correcte

44. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

- **1 pt** : $a_n = O_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$ et théorème de domination

- **1 pt** : $(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^N b_k \leq \sum_{k=n}^N a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^N b_k$ donc $(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$

- **1 pt** : d'après l'équivalence (q 43), $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont équivalentes

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$.

- **1 pt** : $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$ (par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$)

- **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$ par croissance de l'intégrale

46. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

- **1 pt** : $\forall j \geq 2, \int_j^{j+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{j^2} \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{t^2} dt$ en réordonnant

- **1 pt** : $\frac{1}{n} \leq \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{n-1}$ en passant par une somme finie

- **1 pt** : $\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ par théorème d'encadrement

II.C.3)

47. Dédurre des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- **1 pt** : $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{12} \frac{1}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifient :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n \geq 0 \text{ et } \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} > 0.$$

$$\times \text{ la série } \sum \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} \text{ est convergente.}$$

$$\times w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n^2} \text{ d'après la question 42.}$$

- **1 pt** : $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{12} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n}$

48. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$$

- 1 pt : $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} v_{N+1}\right) - v_n$ par télescopage sur les sommes finies
- 1 pt : $u_n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
- 0 pt : $v_n = -\sum_{k=n}^{+\infty} w_k - \ln(\sqrt{2\pi})$
- 1 pt : $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \times \exp\left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k\right)$
- 1 pt : $\exp\left(\frac{1}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{12n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$
- 1 pt : $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \times \exp\left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k\right) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \times \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$
avec $q_n = n \times \left(\exp\left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k\right) - \left(1 + \frac{1}{12n}\right)\right)$