

DS2

Exercice I : Équivalent de Stirling

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Démonstration.

- La fonction $g_x : t \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1) \ln(t)} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est impropre à la fois en 0 et en $+\infty$.

- Démontrons tout d'abord la convergence de l'intégrale impropre (en 0) $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$.

$$\times \forall t \in]0, 1], t^{x-1} \geq 0.$$

$$\times t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} e^0 = \frac{1}{t^{1-x}}.$$

$$\times \text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt \text{ est une intégrale de Riemann, impropre en 0, d'exposant } 1-x.$$

Elle est donc convergente si et seulement si $1-x < 1$, c'est-à-dire si $x > 0$.

Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

- Démontrons maintenant la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

$$\times \forall t \in [1, +\infty[, t^{x-1} e^{-t} \geq 0 \text{ et } \frac{1}{t^2} \geq 0.$$

$$\times t^{x-1} e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

$$\text{En effet : } \frac{t^{x-1} e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{x+1} e^{-t} = \frac{t^{x+1}}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut détailler brièvement l'obtention de cette limite.

$$- \text{ Si } x+1 > 0 \text{ (c'est-à-dire si } x > -1) \text{ alors } \frac{t^{x+1}}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

$$- \text{ Si } x+1 = 0 \text{ alors :}$$

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} = \frac{1}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$- \text{ Si } x+1 < 0 \text{ (c'est-à-dire si } x < -1) \text{ alors :}$$

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} = \frac{1}{t^{-(x+1)}} \times \frac{1}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \times 0 = 0$$

$$\times \text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ est une intégrale de Riemann, impropre en } +\infty, \text{ d'exposant } 2 \text{ (} 2 > 1 \text{).}$$

Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente, indépendamment de la valeur de x .

Rappelons que l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente si et seulement si les intégrales impropres $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ et $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ le sont.

On en conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

Commentaire

- On peut formellement démontrer que, pour tout $x > 0$, la fonction $h_x : t \mapsto t^x = \exp(x \ln(t))$ est continue (même de classe $\mathcal{C}^\infty$ en réalité) sur $]0, +\infty[$. Détaillons cette présentation.

Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto t^x = \exp(x \ln(t))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ car elle est LA composée $h_x = \ell_2 \circ \ell_1$ où :

- × $\ell_1 : t \mapsto x \ln(t)$ est :
 - de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$,
 - telle que $\ell_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
- × $\ell_2 : t \mapsto \exp(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction h_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

- De plus, pour tout $x > 0$, pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
 h'_x(t) &= (\ell_2 \circ \ell_1)'(t) \\
 &= \ell'_2 \circ \ell_1(t) \times \ell'_1(t) \\
 &= \ell'_2(\ell_1(t)) \times \ell'_1(t) \\
 &= \exp(x \ln(t)) \times \frac{x}{t} \\
 &= \exp(x \ln(t)) \times x \times \exp(-\ln(t)) \\
 &= x \times \exp(x \ln(t) - \ln(t)) \\
 &= x \times \exp((x-1) \ln(t)) = x \times t^{x-1}
 \end{aligned}$$

- On détaille ici ce calcul mais il n'y a pas lieu de le faire lors du concours. L'étude des fonctions élévation à une puissance réelle a été réalisée en première année. Ce résultat de dérivation n'est donc pas à redémontrer. On a aussi détaillé le calcul de limite pour mettre en valeur la subtilité concernant le signe de $x+1$. Il n'y a pas forcément lieu de le faire sur une copie de concours. L'écriture $t^{x-1} e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ est suffisante pour convaincre le correcteur de la bonne compréhension du candidat.

- Globalement, il est important de comprendre ce qui constitue le cœur de la question (et doit donc être détaillé précisément) de ce qui constitue des propriétés auxiliaires permettant la résolution. Ici, il est primordial de comprendre qu'on est confronté à une intégrale doublement impropre et qu'il faut donc étudier la convergence de deux intégrales. □

Commentaire

- La méthodologie permettant de démontrer la convergence d'une intégrale impropre $\int_I h(t) dt$ est toujours la même.

1) Étude de la continuité de h sur I .

Dans le cas particulier où la fonction h est continue par morceaux sur le **SEGMENT** $I = [a, b]$ alors l'intégrale $\int_a^b h(t) dt$ est bien définie. Ainsi, la fonction h est intégrable sur $[a, b]$ et l'étude prend fin.

2) Étude de la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b h(t) dt$

On est alors dans le cas où la fonction h est continue (par morceaux) sur l'intervalle $I =]a, b[$ (resp. $[a, b[$, resp. $]a, b]$).

Il faut alors vérifier que l'intégrale généralisée $\int_a^b h(t) dt$, impropre en a (resp. b , resp. impropre à la fois en a et en b), est **absolument** convergente. Pour ce faire, le bon outil est celui du **théorème de comparaison** des intégrales généralisées de fonctions continues positives.

- Il arrive parfois qu'on se ramène à l'intégrabilité d'une autre fonction par changement de variable ou par intégration par parties. Lorsque c'est le cas, l'énoncé précisera la démarche à suivre.
- Attention à ne pas surinterpréter le point précédent. Lorsque la question consiste à déterminer la nature d'une intégrale (ou même d'une série), il est illusoire de penser qu'on va réussir à résoudre le problème par un calcul. En particulier, il est (presque) certain que l'intégrande étudiée ne possède pas de primitive à vue. Si c'était le cas, l'exercice proposé aurait peu d'intérêt : si on connaît une primitive, le symbole d'intégration disparaît et il ne s'agit plus d'un exercice d'intégration.
- Le seul cas où il est pertinent d'envisager le calcul est lorsque l'énoncé le suggère :

« Démontrer que l'intégrale est convergente et déterminer sa valeur »

Dans ce cas, le théorème de comparaison est inutile. On calcule l'intégrale sur le **SEGMENT** $[A, b]$ (resp. $[a, B]$, resp. $[A, B]$) et on vérifie que le résultat possède une limite finie lorsque $A \rightarrow a$ (resp. $B \rightarrow b$, resp. $A \rightarrow a$ et $B \rightarrow b$).

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Démonstration.

Soit $x > 0$.

- Par intégration par parties, sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} t^{(x+1)-1} e^{-t} dt = - [t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$$

Comme $x > 0$ alors $x+1 > 0$. On en déduit, par la question précédente, que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} x t^x e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$ sont toutes les deux convergentes ce qui permet de lever la réserve de convergence.

- Enfin :

$$\left[t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} = \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} \right) - 0^x e^{-0} = 0 - 0 = 0$$

Finalement, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \Gamma(n) = (n-1)!$.

► **Initialisation :**

× D'une part :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = - \left[e^{-t} \right]_0^{+\infty} = - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \right) - e^0 = -(0-1) = 1$$

× D'autre part : $(1-1)! = 0! = 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $\Gamma(n+1) = n!$).

Alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \Gamma(n) && (d'après la relation précédente en $x = n > 0$) \\ &= n \times (n-1)! && (par hypothèse de récurrence) \\ &= n! \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$.

Commentaire

- Dans cette question, on démontre que la fonction Γ , vérifie la propriété : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Cette propriété doit être vue, à translation d'une unité près, comme l'extension de la propriété de définition de la fonction factorielle.
- La fonction Γ est ainsi considérée comme l'extension sur $\mathbb{R}$ de la fonction factorielle. Le deuxième point de la question permet de démontrer que ces deux fonctions coïncident bien (à une translation d'une unité près) sur $\mathbb{N}$. □

3. On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et qu'elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

► **Initialisation :**

× D'une part : $\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$

On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$:

$$\left| \begin{array}{l} u = \sqrt{t} \quad \text{donc} \quad t = u^2 \quad \quad \quad (\text{on note alors } \psi : u \mapsto u^2) \\ \hookrightarrow dt = 2u \, du \\ \bullet \, t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \bullet \, t = +\infty \Rightarrow u = +\infty \end{array} \right.$$

On obtient alors (les intégrales en présence étant convergentes) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cancel{u}} e^{-u^2} \times 2 \cancel{u} du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \cancel{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} \quad \quad \quad (\text{d'après l'indication de l'énoncé}) \end{aligned}$$

× D'autre part : $\frac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0} 0!} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{2^0 \times 1} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}.$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire $\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)} (n+1)!} \sqrt{\pi}$).

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) && (\text{d'après la relation de la question } \color{red}{2} \\ &&& \text{en } x = n + \frac{1}{2} > 0) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} && (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \left(\frac{2n+1}{2}\right) \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{2n+2}{2(n+1)} \times \left(\frac{2n+1}{2}\right) \times \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} && (\text{en multipliant} \\ &&& \text{artificiellement par } 1 = \frac{2n+2}{2n+2}) \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^2 \times 2^{2n} (n+1)!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} (n+1)!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Commentaire

- Le programme officiel autorise le changement de variable directement sur les intégrales généralisées. Cela peut avoir pour conséquence de complexifier la recherche de bornes de l'intégrale résultat. En effet, lorsqu'on considère une intégrale généralisée, les bornes de l'intégrale initiale ne sont pas nécessairement finies et elles ne peuvent donc pas forcément s'écrire sous la forme $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$. Pour se prémunir d'une telle écriture et d'une discussion sur le fait que les bornes initiales puissent être atteinte par ψ , le programme officiel préfère considérer le cas d'une fonction :

$$\psi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$$

où a et b sont les bornes de l'intégrale de départ et α et β celles d'arrivée. Le caractère bijectif et strictement croissant assure que $a = \lim_{t \rightarrow \alpha} \psi(t)$ et $b = \lim_{t \rightarrow \beta} \psi(t)$. C'est essentiellement à cela que sert cette hypothèse : faire le lien entre a et α ainsi qu'entre b et β . On obtient alors un théorème qui s'écrit simplement mais dont l'utilisation est un peu pénible.

- Pour éviter la discussion sur le caractère $\mathcal{C}^1$ bijectif du changement de variable, on peut aussi décider de l'effectuer d'abord sur un segment puis faire tendre la borne où se situe l'impropreté. Typiquement, si l'intégrale initiale est impropre en b , on considère d'abord cette intégrale sur le segment $[a, B]$ (où $B \in [a, b[$), puis on effectue le changement de variable sur $[a, B]$ et enfin on fait tendre B vers b pour obtenir le résultat (ce qui est valide si l'on sait qu'au moins l'une des deux intégrales (celle de départ ou celle d'arrivée) est convergente).
- Globalement, le programme officiel semble considérer que les changements de variable sont des techniques calculatoires et qu'il convient de ne pas trop s'appesantir sur les hypothèses. Pour démontrer la validité du changement de variable tel que posé, on pourrait ajouter le fait que la fonction $\psi : u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
- Enfin, notons que le programme officiel stipule que l'on peut utiliser la technique du changement de variable sur les intégrales généralisées sans aucune justification dès lors que le changement de variable est usuel. Ce dernier terme n'est pas précisé. Un changement de variable affine sera certainement considéré comme usuel. On effectue ici un changement de variable polynomial ce qui apparaît suffisamment classique pour ne pas avoir à plus justifier. □

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\rho_k = \ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(\Gamma(n)) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \ln(\Gamma(n)) &= \ln((n-1)!) && (d'après la question 2) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \end{aligned}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - \int_{1-\frac{1}{2}}^{(n-1)+\frac{1}{2}} \ln(t) dt\end{aligned}$$

et donc : $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k + \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(t) dt.$

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(\Gamma(n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k + \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(t) dt.$

□

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 \ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt$$

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord, pour tout $t \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned}2 \ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t) &= \left(\ln(k) - \ln(k+t) \right) + \left(\ln(k) - \ln(k-t) \right) \\ &= \ln\left(\frac{k}{k+t}\right) + \ln\left(\frac{k}{k-t}\right) \\ &= \ln\left(\frac{k}{k+t} \times \frac{k}{k-t}\right) \\ &= \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - t^2}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{k^2 - t^2}{k^2}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)\end{aligned}$$

On obtient alors : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2 \ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt.$

- Par ailleurs, par linéarité de l'intégrale (les intégrales en présence sont toutes bien définies en tant qu'intégrales de fonctions continues sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$) :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 \ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t) \right) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k) dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k+t) dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k-t) dt$$

Calculons séparément ces trois intégrales.

$$\times 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k) dt = 2 \times \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \times \ln(k) = \ln(k)$$

(intégrale d'une fonction constante sur un intervalle de largeur $\frac{1}{2}$)

× En posant le changement de variable $u = k + t$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k+t) dt = \int_k^{k+\frac{1}{2}} \ln(u) du$$

× En posant le changement de variable $u = k - t$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(k-t) dt = \int_k^{k-\frac{1}{2}} \ln(u) \times (-1) dt = \int_{k-\frac{1}{2}}^k \ln(u) du$$

Finalement :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 \ln(k) - \ln(k+t) - \ln(k-t) \right) dt \\ &= \ln(k) - \int_k^{k+\frac{1}{2}} \ln(u) du - \int_{k-\frac{1}{2}}^k \ln(u) du \\ &= \ln(k) - \left(\int_{k-\frac{1}{2}}^k \ln(u) du + \int_k^{k+\frac{1}{2}} \ln(u) du \right) \quad (\text{par relation de Chasles}) \\ &= \ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(u) du \\ &= \rho_k \end{aligned}$$

(en reconnaissant la
définition de la question 4)

Commentaire

- Dans cette question, on réalise un changement de variable. Il est naturel de penser à faire un changement de variable car le but de cette question est de faire apparaître la quantité ρ_k à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ alors qu'elle est définie en question 4 par une intégrale sur l'intervalle $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$. Il faut évidemment penser à effectuer un changement de variable lorsqu'on constate l'évolution des bornes de l'intégrale étudiée.
- L'utilisation d'un changement de variable est régulièrement suggéré par l'énoncé. Il est même fréquent que le changement de variable à effectuer soit directement fourni. Cependant, un concepteur laissera généralement l'initiative aux candidats du changement à effectuer lorsque celui-ci est assez transparent (comme dans la question 3) ou lorsqu'il s'agit de réaliser un changement de variable affine.

□

6. En déduire que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $h_k : t \mapsto -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)$ est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ en tant que composée de fonctions dérivables sur des intervalles adaptés. De plus, pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$h'_k(t) = (\cancel{1}) \times \frac{1}{1 - \frac{t^2}{k^2}} \times \frac{\cancel{2}t}{k^2} = \frac{2t}{k^2 - t^2} > 0$$

En effet, comme $t < 1 \leq k$ alors $t^2 < k^2$.

On en conclut que la fonction h_k est (strictement) croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$.

- En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^* : \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], h_k(0) \leq h_k(t) \leq h_k\left(\frac{1}{2}\right)$. Et :

$$\times h_k(0) = -\ln(1 - 0) = -\ln(1) = 0.$$

$$\times h_k\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{k^2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right).$$

Finalement :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

Par croissance de l'intégrale ($0 \leq \frac{1}{2}$) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt \leq \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) dt = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

- Démontrons que la série $\sum -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$ est convergente.

$$\times \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k^2} \geq 0$$

$$\times -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{1}{8k^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$\times$ La série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$ est convergente.

- Enfin :

$$\times \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \rho_k \leq -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

$\times$ La série $\sum -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$ est convergente.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \rho_k$ est convergente.

Commentaire

- Essayons de détailler le raisonnement permettant d'aboutir à la démarche présente dans ce corrigé. Il s'agit de déterminer la nature de la série $\sum \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt$.

1) Tout d'abord, on écarte l'idée d'un calcul de l'intégrale. Deux raisons à cela.

Tout d'abord, ce n'est pas l'esprit de l'énoncé. Celui-ci aurait certainement précisé en question 5 : « Démontrer : $\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \dots$ et calculer la valeur de cette intégrale ».

La deuxième raison est que l'intégrande n'admet pas de primitive qui s'exprime simplement.

2) Afin de déterminer la nature de l'intégrale, on va donc devoir utiliser un théorème de comparaison des séries à termes positifs. On écarte d'entrée l'utilisation d'un équivalent ou une relation de négligeabilité. Résoudre une question c'est aussi s'empêcher d'inventer de faux théorèmes permettant d'avancer. Il n'y a pas de résultat au programme permettant d'écrire que deux intégrales de fonctions continues sur un segment sont équivalentes. Il faut donc plutôt se diriger par une comparaison par inégalités.

3) Comme la fonction $u \mapsto \ln(1 - u)$ apparaît dans l'intégrale, on pense naturellement à l'inégalité de convexité :

$$\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1 + u) \leq u$$

Cela permet alors d'écrire que pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \leq -\frac{t^2}{k^2}$$

$$\text{mais dans ce cas : } -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) \geq \frac{t^2}{k^2} \geq 0.$$

L'inégalité apparaît ici dans le mauvais sens (pour utiliser le théorème de comparaison) et celui-ci sera conservé par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant).

4) Il faut donc penser à une autre inégalité. L'intégrande étant une fonction continue sur le SEGMENT $[0, \frac{1}{2}]$, elle est bornée et atteint ses bornes. On peut donc majorer cette fonction par son maximum sur $[0, \frac{1}{2}]$, ce que l'on fait dans ce corrigé.

- Cette question est à considérer comme bien plus difficile que les précédentes (qui étaient essentiellement calculatoires) car elle demande bien plus d'initiatives. Stratégiquement, il est certainement pertinent de la passer dans un premier temps quitte à y revenir plus tard s'il reste du temps en fin d'épreuves. Pour autant, il ne faut pas abandonner là l'énoncé qui offre encore certaines questions tout à fait abordables.

□

7. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\ln(\Gamma(n)) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + c + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

En déduire :

$$\Gamma(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Démonstration.

- D'après la question 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(\Gamma(n)) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$

- Travaillons sur le premier terme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt &= \left[t \ln(t) - t \right]_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} && \text{(car la fonction } t \mapsto t \ln(t) - t \text{ est une primitive de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(n - \frac{1}{2} \right) - \left(n - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \\
 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(n \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right) - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} \\
 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln(n) - n + 1 + \frac{1}{2} \ln(2) + \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln(n) - n + a + \alpha_n && \text{(en notant } a = 1 + \frac{1}{2} \ln(2) \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right))
 \end{aligned}$$

Par ailleurs : $\alpha_n = n \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right)$ et :

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{-1}{2n} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \frac{-1}{2n} = \frac{1}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en conclut : $a + \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a - \frac{1}{2} + 0$.

Ce qui peut s'écrire sous la forme : $a + \alpha_n = a - \frac{1}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

- Par ailleurs, comme la série $\sum \rho_n$ est convergente, la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n \rho_k \right)$ est convergente, de limite que l'on note $b = \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k$ ($\in \mathbb{R}$). Il en est de même de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \right)$.

Ce qui peut s'écrire sous la forme : $\sum_{k=1}^{n-1} \rho_k = b + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

- Finalement :

$$\begin{aligned}
 \ln(\Gamma(n)) &= \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln(t) dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \\
 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln(n) - n + (a + \alpha_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \\
 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln(n) - n + \left(a - \frac{1}{2} \right) + b + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \\
 &= \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln(n) - n + c + o_{n \rightarrow +\infty}(1) && \text{(en notant } c = a - \frac{1}{2} + b)
 \end{aligned}$$

Il existe bien $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\ln(\Gamma(n)) = \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln(n) - n + c + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n) &= \exp(\ln(\Gamma(n))) \\
 &= \exp\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) - n + c + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \\
 &= \exp\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n)\right) \times e^{-n} \times e^c \times \exp\left(o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \\
 &= \exp\left(\ln\left(n^{n-\frac{1}{2}}\right)\right) \times e^{-n} \times e^c \times \exp\left(o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \\
 &= e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \times \exp\left(o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \frac{\cancel{e^c n^{n-\frac{1}{2}}} e^{-n} \times \exp\left(o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)}{\cancel{e^c n^{n-\frac{1}{2}}} e^{-n}} = \exp\left(o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0) = 1.$$

$$\Gamma(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Commentaire

- La première partie de cette question demande un développement calculatoire relativement long même si chaque étape ne présente pas de difficulté majeure. Il est donc possible de ne pas parvenir à finir cette première partie.
- En revanche, la deuxième partie de la question est simple et directe. Il serait dommage de ne pas la traiter : ce sont des points plutôt simples à prendre et il est donc conseillé de traiter cette deuxième partie.

□

8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note :

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$$

Démonstration.

Soit $x > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable

$$u = \frac{t}{n}.$$

$$\left| \begin{array}{l} u = \frac{t}{n} \quad \text{donc} \quad t = nu \quad (on \text{ note alors } \psi : u \mapsto nu) \\ \hookrightarrow dt = n du \\ \bullet t = 0 \Rightarrow u = \frac{0}{n} = 0 \\ \bullet t = n \Rightarrow u = \frac{n}{n} = 1 \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) &= \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \\ &= \int_0^1 (nu)^{x-1} (1-u)^n n du \\ &= n \int_0^1 n^{x-1} u^{x-1} (1-u)^n du\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du$.

□

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \forall x > 0, \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$.

► **Initialisation :**

Soit $x > 0$.

× D'une part :

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^{x-1} (1-u)^1 du &= \int_0^1 u^{x-1} du - \int_0^1 u^x du \quad (\text{par linéarité de l'intégrale, l'intégrale tout à droite étant faussement impropre}) \\ &= \left[\frac{u^x}{x} \right]_0^1 - \left[\frac{u^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1^x - 0^x}{x} - \frac{1^{x+1} - 0^{x+1}}{x+1} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(\textcolor{red}{x} + 1) - \textcolor{red}{x}}{x(x+1)}\end{aligned}$$

× D'autre part : $\frac{1!}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

(c'est-à-dire : $\forall x > 0, \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{n+1} du = \frac{(n+1)!}{x(x+1) \dots (x+n)(x+n+1)}$)

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{n+1} du &= \left[\frac{u^x}{x} (1-u)^{n+1} \right]_0^1 - \frac{n+1}{x} \int_0^1 u^x (-(1-u))^n du \quad (\text{par intégration par parties}) \\
 &= \frac{1^x}{x} \cancel{(1-1)^{n+1}} - \frac{0^x}{x} 1^{n+1} + \frac{n+1}{x} \int_0^1 u^x (1-u)^n du \\
 &= \frac{n+1}{x} \times \Gamma_n(x+1) \\
 &= \frac{n+1}{x} \frac{n!}{(x+1)((x+1)+2) \dots ((x+1)+n)} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\
 &= \frac{(n+1)!}{x(x+1) \dots (x+n)(x+n+1)}
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$.

□

10. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

On définit la fonction $\mathbb{1}_{]0,n[}$ sur $\mathbb{R}_+$, en posant $\mathbb{1}_{]0,n[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, n[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En remarquant que $\Gamma_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,n[}(t) t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$, utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

Démonstration.

Pour une meilleure compréhension des variables en jeu, on renomme x en α . On doit alors démontrer :

$$\forall \alpha > 0, \Gamma_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(\alpha)$$

Soit $\alpha > 0$.

- On définit tout d'abord la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n : t \mapsto \mathbb{1}_{]0,n[}(t) t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \begin{cases} t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite **de fonctions** (u_n) .

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

► Soit $t_0 \in]0, +\infty[$.

Pour n suffisamment grand :

$$u_n(t_0) = t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t_0}{n} \right)^n = t_0^{\alpha-1} \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t_0}{n} \right) \right)$$

Il suffit pour cela de choisir n vérifiant : $n > t_0$.

En posant : $n_0 = \lfloor t_0 \rfloor + 1$, on obtient que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout $n \geq n_0$.

Par ailleurs :

$$n \ln \left(1 - \frac{t_0}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \textcolor{red}{n} \times \frac{-t_0}{\textcolor{red}{n}}$$

Finalement, par produit et composition de limites :

$$u_n(t_0) = t_0^{\alpha-1} \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t_0}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t_0^{\alpha-1} e^{-t_0}$$

Cela démontre que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $u : t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t}$.

► La fonction $u : t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

► Remarquons tout d'abord que pour tout $t \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &= \left| \mathbb{1}_{]0,n[}(t) \times t^{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right| \\ &= \left| \mathbb{1}_{]0,n[}(t) \right| \times |t^{\alpha-1}| \times \left| \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right| \\ &\leq |t^{\alpha-1}| \times \left| \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right| \quad (\text{car } |\mathbb{1}_{]0,n[}(t)| = \mathbb{1}_{]0,n[}(t) \leq 1) \\ &= t^{\alpha-1} \times \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \end{aligned}$$

Or, par inégalité de convexité : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$. En appliquant ce résultat en $x = \frac{-t}{n} \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq 1 + \left(\frac{-t}{n} \right) \leq e^{-\frac{t}{n}}$$

$$\text{donc } 0^n \leq \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \leq \left(e^{-\frac{t}{n}} \right)^n \quad (\text{car la fonction élévation à la puissance } n \text{ est croissante sur }]0, +\infty[)$$

$$\text{donc } 0 \leq t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \leq t^{\alpha-1} e^{-t}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, |u_n(t)| \leq t^{\alpha-1} e^{-t}$$

et $h : t \mapsto t^{\alpha-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Cette inégalité démontre au passage que la fonction u_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction u est intégrable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} u(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)$$

Finalement : $\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)}.$

□

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question 7.

On pourra faire appel aux résultats des questions 1 et 2.

Démonstration.

Soit $x > 0$.

- Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= ((x+n)-1) \Gamma((x+n)-1) && (\text{par la relation démontrée en 2}) \\ &= (x+(n-1)) (x+(n-2)) \Gamma(x+(n-2)) \\ &= (x+(n-1)) (x+(n-2)) \dots x \Gamma(x) && (\text{par récurrence immédiate}) \end{aligned}$$

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} \\ &= \frac{(x+(n-1)) (x+(n-2)) \dots x \Gamma(x)}{\Gamma(n) n^x} \\ &= \frac{(x+n) (x+(n-1)) (x+(n-2)) \dots x \Gamma(x)}{(x+n) \Gamma(n) n^x} \\ &= \frac{(x+n) (x+(n-1)) \dots x \Gamma(x)}{(x+n) (n-1)! n^x} && (\text{d'après la question 2}) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(x+n) (x+(n-1)) \dots x}{n (n-1)! n^x} \times \Gamma(x) && (\text{car : } x+n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(x+n) (x+(n-1)) \dots x}{\cancel{n!} \cancel{n^x}} \times \frac{\cancel{n^x} \cancel{n!}}{x(x+1) \dots (x+n)} && (\text{d'après la question précédente}) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(x+n) (x+(n-1)) \dots x}{x(x+1) \dots (x+n)} = 1 \end{aligned}$$

Finalement : $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n) n^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

- Par ailleurs, en étudiant ce quotient en $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n) n^{\frac{1}{2}}} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}}{\Gamma(n) n^{\frac{1}{2}}} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n)!}{n! \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n \Gamma(2n)}{(n+1) \Gamma(n) \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cancel{2n} \Gamma(2n)}{\cancel{2n} \Gamma(n) \Gamma(n)} \times \frac{1}{2^{2n-1} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \quad (\text{car } n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^c (2n)^{2n-\frac{1}{2}} e^{-2n}}{e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \times e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}} \times \frac{1}{2^{2n-1} n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \quad (\text{par la relation 7}) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^c \times \cancel{e^{-2n}}}{e^c \times e^c \times \cancel{e^{-n} \times e^{-n}}} \frac{\cancel{2^{2n-\frac{1}{2}}} \times n^{2n-\frac{1}{2}}}{n^{n-\frac{1}{2}} \times n^{n-\frac{1}{2}} \times \cancel{2^{2n-1}} \times n^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\pi} \quad (\text{en réarrangeant les termes}) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{e^c}
 \end{aligned}$$

La dernière relation est obtenue en remarquant : $n^{n-\frac{1}{2}} \times n^{n-\frac{1}{2}} \times n^{\frac{1}{2}} = n^{2n-\frac{1}{2}}$.

- D'après la propriété démontrée en début de question : $\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n) n^{\frac{1}{2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

On en conclut : $\frac{\sqrt{\pi}}{e^c} = 1$.

Finalelement : $e^c = \sqrt{\pi}$.

□

Exercice II : Équation télescopique

Notations

- Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_d[X]$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à d .
- On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Rappels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Supposons que l'espace vectoriel F est stable par l'endomorphisme f .

On rappelle qu'on appelle alors endomorphisme induit par f sur F la restriction de f à F au départ et à l'arrivée. Plus précisément, il s'agit de l'application :

$$\begin{aligned} f|_F : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Supposons que l'espace vectoriel E est de dimension finie égale à n . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On rappelle la caractérisation de l'image de f en dimension finie :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Objectifs du problème

Soit h une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est solution de l'équation (E_h) sur $\mathbb{K}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x+1) - f(x) = h(x) \quad (E_h)$$

Le but du problème est l'étude de l'équation (E_h) .

La partie I de ce problème étudie l'existence de solutions dans le cas où h est polynomiale.

La partie II définit les polynômes de Bernoulli et explicite une solution polynomiale à l'équation (E_h) , ainsi qu'une application analytique de ces polynômes.

1. Étude de l'opérateur de différence finie

On considère l'application Δ définie par :

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

12. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que Δ est linéaire.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

$$\begin{aligned} &\Delta(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\ &= (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X+1) - (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)(X) \\ &= \lambda \cdot P(X+1) + \mu \cdot Q(X+1) - \lambda \cdot P(X) - \mu \cdot Q(X) && \text{(par linéarité de l'évaluation en } X+1 \text{ et en } X) \\ &= \lambda \cdot (P(X+1) - P(X)) + \mu \cdot (Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda \cdot \Delta(P)(X) + \mu \cdot \Delta(Q)(X) \\ &= (\lambda \cdot \Delta(P) + \mu \cdot \Delta(Q))(X) \end{aligned}$$

L'application Δ est donc linéaire.

- Démontrons ensuite que Δ est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{K}[X]$$

L'application Δ est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$.

On en déduit que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

□

13. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .

Démonstration.

- On note : $d = \deg(P)$.
Alors il existe $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que :

$$\begin{cases} a_d \neq 0 \\ P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k \end{cases}$$

- On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^d a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^d \left(a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \right) - \sum_{k=0}^d a_k X^k && \text{(par formule du binôme de Newton)} \\ &= \sum_{k=0}^d \left(a_k \binom{k}{k} X^k + a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \right) - \sum_{k=0}^d a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^d \left(\left(\cancel{a_k X^k} + a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \right) - \cancel{a_k X^k} \right) && \text{(par linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{k=0}^d \left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \right) \\ &= \sum_{k=1}^d \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_k \binom{k}{i} X^i \right) && \text{(car le premier terme de la somme est nul)} \\ &= \sum_{0 \leq i < k \leq d} \left(a_k \binom{k}{i} X^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} X^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i \\ &= a_d \binom{d}{d-1} X^{d-1} + \sum_{i=0}^{d-2} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i && \text{(en mettant de côté le dernier terme)} \\ &= d a_d X^{d-1} + \sum_{i=0}^{d-2} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i && \text{(car } \binom{d}{d-1} = \binom{d}{1} = d) \end{aligned}$$

- Ainsi, trois cas se présentent :

× si $\deg(P) = -\infty$, alors : $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Ainsi, comme Δ est linéaire, d'après la question précédente : $\Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) = -\infty, \text{ alors : } \deg(\Delta(P)) = -\infty.}$$

× si $\deg(P) = 0$, c'est-à-dire $d = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{i=0}^{-2} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i + 0 \times a_d X^{d-1} \\ &= \sum_{i \in \emptyset} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i \\ &= 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{(car } 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ est l'élément neutre pour la loi +)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) = 0, \text{ alors : } \deg(\Delta(P)) = -\infty.}$$

× si $\deg(P) \neq 0$, c'est-à-dire $d \neq 0$, alors :

$$\Delta(P) = \sum_{i=0}^{d-2} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i + d a_d X^{d-1}$$

Or, comme $a_d \neq 0$, alors : $d a_d \neq 0$. On en déduit :

$$\deg(\Delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1$$

$$\boxed{\text{Si } \deg(P) \neq 0, \text{ alors : } \deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1.}$$

□

14. Montrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, Δ induit un endomorphisme sur $\mathbb{K}_d[X]$.

Démonstration.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

Il s'agit de démontrer : $\forall P \in \mathbb{K}_d[X], \Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.

Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$. D'après la question précédente, deux cas se présentent.

- Si $\deg(P) \leq 0$, alors : $\deg(\Delta(P)) = -\infty$.

Autrement dit : $\Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$. D'où : $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.

- Si $\deg(P) \neq 0$, alors : $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$. Donc : $\Delta(P) \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

Or : $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \mathbb{K}_d[X]$. D'où : $\Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.

Finalement : $\forall P \in \mathbb{K}_d[X], \Delta(P) \in \mathbb{K}_d[X]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } d \in \mathbb{N}^*, \Delta \text{ induit un endomorphisme sur } \mathbb{K}_d[X].}$$

□

On note Δ_d l'endomorphisme de $\mathbb{K}_d[X]$ induit par Δ .

15. Déterminer $\text{Ker}(\Delta_d)$ et $\text{Im}(\Delta_d)$ pour tout $d \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminons $\text{Ker}(\Delta_d)$.

Soit $P \in \mathbb{K}_d[X]$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que : $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot P_k$ où $(P_0, \dots, P_d)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_d[X]$.

$$\begin{aligned}
 P \in \text{Ker}(\Delta_d) &\Leftrightarrow \Delta_d(P) = 0_{\mathbb{K}_d[X]} \\
 &\Leftrightarrow \Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]} && \text{(car } \Delta_d \text{ est l'endomorphisme induit par } \Delta \text{ sur } \mathbb{K}_d[X]) \\
 &\Leftrightarrow \deg(\Delta(P)) = -\infty \\
 &\Leftrightarrow \deg(P) \leq 0 && \text{(d'après } \textcolor{red}{13}) \\
 &\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_d = 0
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(\Delta_d) &= \left\{ \sum_{k=0}^d a_k \cdot P_k \mid a_1 = a_2 = \dots = a_d \right\} \\
 &= \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\
 &= \text{Vect}(P_0) = \mathbb{K}_0[X]
 \end{aligned}$$

Finalemt : $\text{Ker}(\Delta_d) = \mathbb{K}_0[X]$.

- Déterminons $\text{Im}(\Delta_d)$.

On sait que :

- × l'application Δ_d est linéaire (car Δ l'est),
- × l'espace vectoriel $\mathbb{K}_d[X]$ est de dimension finie.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(\Delta_d) &= \text{Vect}(\Delta_d(P_0), \Delta_d(P_1), \dots, \Delta_d(P_d)) \\
 &= \text{Vect}(\Delta(P_0), \Delta(P_1), \dots, \Delta(P_d))
 \end{aligned}$$

De plus :

- × comme $\deg(P_0) = 0$, alors, d'après $\textcolor{red}{13}$: $\Delta(P_0) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
- × pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \Delta(P_k) &= P_k(X+1) - P_k(X) \\
 &= (X+1)^k - X^k \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - X^k \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i + \cancel{X^k} \right) - \cancel{X^k} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i
 \end{aligned}$$

On note alors : $Q_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$. On obtient :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\Delta_d) &= \text{Vect}(\cancel{0_{\mathbb{K}[X]}}, Q_0, \dots, Q_{d-1}) \\ &= \text{Vect}(Q_0, \dots, Q_{d-1}) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}' = (Q_0, \dots, Q_{d-1})$ est ainsi une famille :

- génératrice de $\text{Im}(\Delta_d)$ d'après ce qui précède,
- libre, car c'est une famille de polynômes non nuls qui est échelonnée en degré (par définition de $Q_0, \dots, Q_{d-1}$).

C'est donc une base de $\text{Im}(\Delta_d)$ Ainsi :

$$\dim(\text{Im}(\Delta_d)) = \text{Card}(\mathcal{B}') = d$$

On en déduit :

- $\text{Im}(\Delta_d) \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
En effet, $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ est un espace vectoriel et : $\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, Q_k \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.
- $\dim(\text{Im}(\Delta_d)) = \dim(\mathbb{K}_{d-1}[X])$.

On en conclut : $\text{Im}(\Delta_d) = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

□

16. En déduire $\text{Ker}(\Delta)$ et $\text{Im}(\Delta)$. Appliquer les résultats obtenus à l'étude de l'équation (E_h) dans le cas où h est une fonction polynomiale.

Démonstration.

- On commence par déterminer $\text{Ker}(\Delta)$. Pour cela, on raisonne comme en question précédente.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que : $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot P_k$.

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\Delta) &\Leftrightarrow \Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]} \\ &\Leftrightarrow \deg(\Delta(P)) = -\infty \\ &\Leftrightarrow \deg(P) \leq 0 && (d'après \textcolor{red}{13}) \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_d = 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\Delta) &= \{a_0 \cdot P_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}\} \\ &= \text{Vect}(P_0) = \mathbb{K}_0[X] \end{aligned}$$

Finalement : $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{K}_0[X]$.

- On détermine ensuite $\text{Im}(\Delta)$. Plus précisément, on démontre : $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$.
On procède par double inclusion.
- ($\subset$) D'après la question 12, l'application Δ est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$. Ainsi :

$$\text{Im}(\Delta) \subset \mathbb{K}[X]$$

($\supset$) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Démontrons : $Q \in \text{Im}(\Delta)$.

× Notons : $m = \deg(Q)$. Comme $Q \in \mathbb{K}_m[X]$, alors, d'après la question précédente (appliquée à $d = m + 1$) : $Q \in \text{Im}(\Delta_{m+1})$.

Il existe donc $P \in \mathbb{K}_{m+1}[X]$ tel que : $Q = \Delta_{m+1}(P)$.

× Comme Δ_{m+1} est l'endomorphisme induit de Δ sur $\mathbb{K}_{m+1}[X]$, alors : $Q = \Delta(P)$.

De plus, comme $\mathbb{K}_{m+1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$, alors : $P \in \mathbb{K}[X]$.

× Ainsi, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $Q = \Delta(P)$.

Autrement dit : $Q \in \text{Im}(\Delta)$.

D'où : $\mathbb{K}[X] \subset \text{Im}(\Delta)$.

Finalement : $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$.

Commentaire

- L'intuition derrière l'égalité : $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$, est la suivante. D'après la question **15**, l'application Δ envoie, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des polynômes de degré au plus d , sur l'ensemble des polynômes de degré au plus $d - 1$.

Avec les mains, cette application fait « perdre un degré ». On peut donc raisonnablement penser que cette application Δ envoie $\mathbb{K}[X]$ (ensemble des polynômes de n'importe quel degré) sur $\mathbb{K}[X]$.

- Plus rigoureusement, par définition d'endomorphisme induit :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad \text{Im}(\Delta_d) = \text{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]$$

Autrement dit, d'après la question précédente :

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{K}_{d-1}[X] = \text{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathbb{K}_{d-1}[X] &= \bigcup_{d=1}^{+\infty} (\text{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]) \\ &= \text{Im}(\Delta) \cap \left(\bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathbb{K}_d[X] \right) \quad (\text{par distributivité de } \cup \text{ sur } \cap) \\ &= \text{Im}(\Delta) \cap \mathbb{K}[X] \\ &= \text{Im}(\Delta) \quad (\text{car : } \text{Im}(\Delta) \subset \mathbb{K}[X]) \end{aligned}$$

Comme : $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathbb{K}_{d-1}[X] = \mathbb{K}[X]$, on en conclut : $\mathbb{K}[X] = \text{Im}(\Delta)$.

- Rappelons que, par définition d'endomorphisme induit, on a aussi, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Ker}(\Delta_d) = \text{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]$$

Avec le même raisonnement que dans le point précédent, on obtient de nouveau :

$$\begin{aligned} \bigcup_{d=1}^{+\infty} \text{Ker}(\Delta_d) &= \bigcup_{d=1}^{+\infty} (\text{Ker}(\Delta) \cap \mathbb{K}_d[X]) \\ &\quad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \mathbb{K}_0[X] &= \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathbb{K}_0[X] \qquad \qquad \text{Ker}(\Delta) \end{aligned}$$

- Supposons que h est une fonction polynomiale. On note $\tilde{Q}$ son polynôme associé.
Alors, pour toute fonction polynomiale f :

$$\begin{aligned}(E_h) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{K}, f(x+1) - f(x) = h(x) \\ &\Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = \tilde{Q}(X) \quad (\text{où } P \text{ est le polynôme associé à } f) \\ &\Leftrightarrow \Delta(P) = \tilde{Q}\end{aligned}$$

L'équation (E_h) admet donc une solution (polynomiale) si et seulement si le polynôme $\tilde{Q}$ admet un antécédent par l'application Δ .

Or, d'après ce qui précède : $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{K}[X]$. L'application Δ est donc surjective. Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ admet donc un antécédent par Δ , en particulier $\tilde{Q}$.

Dans le cas où h est polynomiale, l'équation (E_h) admet des solutions.

□

17. On suppose (pour cette question seulement) que h est la fonction $x \mapsto x$. Déterminer une solution de (E_h) dans $\mathbb{K}_2[X]$, puis toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_h) .

Démonstration.

- Par définition de h , son polynôme Q_0 associé est ici : $\tilde{Q}(X) = X = P_1(X)$.
D'après la question 16 (et l'énoncé), on cherche un polynôme $\tilde{P} \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que : $\tilde{Q} = \Delta(\tilde{P})$.
- On sait de plus :
× d'une part :

$$\Delta(P_1)(X) = P_1(X+1) - P_1(X) = X + 1 - X = 1 = P_0(X)$$

× d'autre part :

$$\Delta(P_2)(X) = P_2(X+1) - P_2(X) = (X+1)^2 - X^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 = 2 \cdot P_1(X) + P_0(X)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta(P_2) - \Delta(P_1) &= 2 \cdot P_1 \\ \text{donc } \Delta(P_2) - \Delta(P_1) &= 2 \cdot \tilde{Q} \quad (\text{par définition de } \tilde{Q}) \\ \text{donc } \Delta(P_2 - P_1) &= 2 \cdot \tilde{Q} \quad (\text{par linéarité de } \Delta) \\ \text{d'où } \frac{1}{2} \cdot \Delta(P_2 - P_1) &= \tilde{Q} \\ \text{ainsi } \Delta\left(\frac{1}{2} \cdot (P_2 - P_1)\right) &= \tilde{Q} \quad (\text{par linéarité de } \Delta)\end{aligned}$$

Le polynôme $\frac{1}{2} \cdot (P_2 - P_1)$ est donc un antécédent de $\tilde{Q}$ dans $\mathbb{K}_2[X]$.

Une solution de (E_h) est donc la fonction $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2} (x^2 - x)$.

- Déterminons maintenant toutes les solutions polynomiales de (E_h) .
Soit f une fonction polynomiale. On note P son polynôme associé.

$$\begin{aligned}
 f \text{ solution de } (E_h) &\Leftrightarrow \Delta(P) = \tilde{Q} && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &\Leftrightarrow \Delta(P) = \Delta(\tilde{P}) && \text{(d'après le point précédent)} \\
 &\Leftrightarrow \Delta(P) - \Delta(\tilde{P}) = 0_{\mathbb{K}[X]} \\
 &\Leftrightarrow \Delta(P - \tilde{P}) = 0_{\mathbb{K}[X]} && \text{(par linéarité de } \Delta) \\
 &\Leftrightarrow P - \tilde{P} \in \text{Ker}(\Delta) \\
 &\Leftrightarrow P - \tilde{P} \in \mathbb{K}_0[X] && \text{(d'après 16)} \\
 &\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{K}_0[X], P - \tilde{P} = R \\
 &\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{K}_0[X], P = \tilde{P} + R \\
 &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{K}, P(X) = \tilde{P}(X) + c \\
 &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{K}, f(x) = \tilde{f}(x) + c
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions polynomiales de (E_h) est donc :
 $\{x \mapsto \tilde{f}(x) + c \mid c \in \mathbb{K}\} = \{x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x) + c \mid c \in \mathbb{K}\}$

Commentaire

- Même si ce n'est pas dans l'esprit du sujet, on pouvait également déterminer directement l'ensemble des solutions polynomiales de (E_h) sans passer le découpage :
 × recherche d'une solution particulière,
 × obtention de l'ensemble des solutions.
- Tout d'abord, remarquons que l'on cherche les antécédents de $\tilde{Q}$ par Δ . Or $Q \in \mathbb{K}_1[X]$. Ainsi, d'après la question 15, ces antécédents appartiennent à $\mathbb{K}_2[X]$.
 Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Alors il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.

$$\begin{aligned}
 \Delta(P) = \tilde{Q} &\iff \cancel{a_0 \cdot \Delta(P_0)} + a_1 \cdot \Delta(P_1) + a_2 \cdot \Delta(P_2) = P_1 && \text{(par linéarité de } \Delta \text{ et définition de } \tilde{Q}) \\
 &\iff a_1 \cdot P_0 + a_2 \cdot (2 \cdot P_1 + P_0) = P_1 \\
 &\iff (a_1 + a_2) \cdot P_0 + 2 a_2 \cdot P_1 = P_1 \\
 &\iff \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2 a_2 = 1 \end{cases} && \text{(car la famille } (P_0, P_1) \text{ est libre)} \\
 \stackrel{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\iff} &\iff \begin{cases} 2 a_1 = -1 \\ 2 a_2 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\Delta(P) = \tilde{Q}$ est :

$$\{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } a_2 = \frac{1}{2}\} = \{a_0 \cdot P_0 - \frac{1}{2} \cdot P_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \mid a_0 \in \mathbb{K}\}$$

On retrouve bien que l'ensemble des solutions polynomiales de (E_h) est :

$$\{x \mapsto a_0 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \mid a_0 \in \mathbb{K}\}$$

□

18. Démontrer : $\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_d[X])}$.

Démonstration.

- On cherche ici à démontrer une égalité entre applications linéaires. Il s'agit de démontrer que ces applications sont égales sur une base de $\mathbb{K}_d([X])$.
- Soit $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$.

Tout d'abord, par définition d'un endomorphisme induit :

$$\Delta_d(P_k) = \Delta(P_k)$$

D'après la question 13 :

$$\deg(\Delta(P_k)) \leq \deg(P_k) - 1 = k - 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg(\Delta^n(P_k)) \leq k - n$$

En particulier, comme $k \leq d$:

$$\deg(\Delta_d^{d+1}(P_k)) \leq k - (d + 1) \leq d - (d + 1) < 0$$

On en déduit : $\Delta_d^{d+1}(P_k) = 0_{\mathbb{K}_d[X]}$.

Finalement : $\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_d[X])}$.

□

19. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

En déduire un polynôme annulateur de Δ_d . L'endomorphisme Δ_d est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\Delta_d^{d+1} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_d[X])}$$

Un polynôme annulateur de Δ_d est donc : X^{d+1} . On le note Q .

- Comme Q est un polynôme annulateur de Δ , alors :

$$\text{Sp}(\Delta_d) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$$

On procède alors par l'absurde pour démontrer que Δ_d n'est pas diagonalisable.

Supposons que l'endomorphisme Δ_d est diagonalisable.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}_d[X]$ dans laquelle la matrice représentative de Δ_d est diagonale.

On note alors : $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta_d)$.

- × La matrice D est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de Δ_d .

Or : $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta_d)$. Ainsi :

$$\text{Sp}(D) = \text{Sp}(\Delta_d) = \{0\}$$

Tous les coefficients diagonaux de D sont donc nuls. On en déduit : $D = 0_{\mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{K})}$.

- × Or :

$$D = 0_{\mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{K})} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Delta_d) = 0_{\mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{K})}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_d = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_d[X])} \quad (\text{par injectivité de } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\cdot))$$

La première assertion est vraie. Ainsi, par raisonnement par équivalence, la dernière assertion aussi.

On en déduit : $\Delta_d = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}_d[X])}$.

Absurde ! En effet : $\Delta_d(P_1) = P_0 \neq 0_{\mathbb{K}_d[X]}$.

L'endomorphisme Δ_d n'est donc pas diagonalisable.

□

2. Polynômes de Bernoulli

On note ω l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $t \in [0, 1]$, par : $\omega(t) = e^{2i\pi t}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on définit dans cette partie :

$$B_n(z) = n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1) (\omega(t))^{n-1}} dt$$

2.a) Une intégrale

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$I_p = \int_0^1 \frac{(\omega(t))^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1} dt$$

20. Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

La fonction $g : t \mapsto \frac{(\omega(t))^{p+1}}{e^{\omega(t)} - 1}$ est continue sur le SEGMENT $[0, 1]$ car elle est le quotient $g = \frac{g_1}{g_2}$ de :

× $g_1 : t \mapsto (\omega(t))^{p+1}$ qui est continue sur $[0, 1]$ car elle est le produit de fonctions continues sur $[0, 1]$.

× $g_2 : t \mapsto e^{\omega(t)} - 1$ qui :

- est continue sur $[0, 1]$, car elle est la composée de fonctions continues sur des intervalles adéquats,
- NE S'ANNULE PAS sur $[0, 1]$.

En effet, soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} e^z - 1 = 0 &\Leftrightarrow e^z = 1 \\ &\Leftrightarrow e^x e^{iy} = 1 \times e^{i0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ y \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 0 + 2ik\pi \end{aligned}$$

En particulier, les complexes z vérifiant : $e^z - 1 = 0$, sont des nombres complexes de module 2π .

Or, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$|\omega(t)| = |e^{2i\pi t}| = 1$$

Ainsi : $\forall t \in [0, 1], g_1(t) = e^{\omega(t)} - 1 \neq 0$.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'intégrale I_p est donc bien définie.

□

On admet :

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, I_p = 0 \end{cases}$$

2.b) Lien avec l'équation (E_h)

21. On admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} I_{k-n}$$

Démontrer que B_n est un polynôme unitaire de degré n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de B_n :

$$B_n(X) = n! \sum_{k=0}^n \frac{I_{k-n}}{k!} X^k$$

- On remarque d'abord : $B_n \in \mathbb{K}_n[X]$.
- De plus, le coefficient de degré n de B_n est :

$$\cancel{n!} \times \frac{I_{n-n}}{\cancel{n!}} = I_0 = 1 \quad (\text{d'après le résultat admis par l'énoncé})$$

Ce coefficient est non nul. Ainsi : $\deg(B_n) = n$.

- Comme le coefficient de B_n vaut 1, ce polynôme est unitaire.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme unitaire de degré n .

□

22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B'_n = n B_{n-1}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} B'_n(X) &= n! \sum_{k=1}^n \frac{I_{k-n}}{k!} k X^{k-1} \\ &= n! \sum_{k=1}^n \frac{I_{k-n}}{(k-1)!} X^{k-1} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1-n}}{k!} X^k \quad (\text{par décalage d'indice}) \\ &= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k-(n-1)}}{k!} X^k \\ &= n \times (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k-(n-1)}}{k!} X^k \\ &= n B_{n-1}(X) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = n \cdot B_{n-1}$$

□

23. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1}$$

On pourra utiliser sans démonstration l'égalité : $\int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(\omega(t))^{n-1}} dt = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} B_n(z+1) - B_n(z) &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt - n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 \frac{e^{(z+1)\omega(t)} - e^{z\omega(t)}}{(e^{\omega(t)} - 1)(\omega(t))^{n-1}} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)} \cancel{(e^{\omega(t)} - 1)}}{\cancel{(e^{\omega(t)} - 1)} (\omega(t))^{n-1}} dt \\ &= n! \int_0^1 \frac{e^{z\omega(t)}}{(\omega(t))^{n-1}} dt \\ &= n! \times \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\text{d'après l'indication de l'énoncé}) \\ &= n z^{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1}}$$

□

24. En déduire l'expression d'une fonction polynomiale vérifiant l'équation (E_h) sur $\mathbb{C}$ lorsque h est une fonction polynomiale.

Démonstration.

Supposons que h est une fonction polynomiale. Alors il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tels que :

$$h : z \mapsto \sum_{k=0}^d a_k z^k$$

- Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1}(z+1) - B_{k+1}(z) = (k+1) z^k$$

Autrement dit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \frac{1}{k+1} B_{k+1}(z) = z^k$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z) = a_k z^k$$

- Ainsi, en sommant les égalités précédentes pour k variant de 0 à d , on obtient :

$$\sum_{k=0}^d \left(\frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z) \right) = \sum_{k=0}^d a_k z^k = h(z)$$

• Or :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^d \left(\frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z+1) - \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}(z) \quad (\text{par linéarité de la somme}) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} B_{k+1} \right) (z+1) - \left(\sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} B_{k+1} \right) (z) \quad (\text{par linéarité de l'évaluation en } z+1 \text{ et en } z) \\
 &= \tilde{g}(z+1) - \tilde{g}(z) \quad (\text{en notant : } \tilde{g} = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} B_{k+1})
 \end{aligned}$$

On a donc trouvé une fonction $\tilde{g}$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \tilde{g}(z+1) - \tilde{g}(z) = h(z)$$

La fonction $\tilde{g}$ est donc une solution de (E_h) sur $\mathbb{C}$.

- Enfin, la fonction $\tilde{g}$ est bien polynomiale, car c'est une combinaison linéaire des fonctions $B_1, \dots, B_{d+1}$ qui sont polynomiales.

La fonction $\tilde{g} = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} B_{k+1}$, est une solution polynomiale de (E_h) sur $\mathbb{C}$.

□

2.c) Unicité

25. Montrer que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = n B_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(t) dt = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- On commence par vérifier que la suite (B_n) est bien solution du système mentionné, que l'on note (S).
 - × D'après la question **21**, le polynôme B_0 est un polynôme unitaire de degré 0. C'est donc un polynôme constant de coefficient dominant égal à 1. Autrement dit :

$$B_0(X) = 1$$

- × D'après la question **22** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = n B_{n-1}$$

- × Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction B_n est continue (car polynomiale) sur le SEGMENT $[0, 1]$.

L'intégrale $\int_0^1 B_n(t) dt$ est donc bien définie.

De plus :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 B_n(t) dt &= \int_0^1 \frac{1}{n+1} B'_{n+1}(t) dt && \text{(car, d'après le point précédent : } B'_{n+1} = (n+1) B_n) \\
 &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 B'_{n+1}(t) dt && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
 &= \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(t)]_0^1 \\
 &= \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)) \\
 &= \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(0+1) - B_{n+1}(0)) \\
 &= \frac{1}{n+1} \times (n+1) 0^n && \text{(d'après 23)} \\
 &= 0 && \text{(car } n > 0)
 \end{aligned}$$

On en conclut que la suite (B_n) est bien solution du système (S) .

- Démontrons que le système (S) admet une unique suite de polynômes solution.
On procède par l'absurde.
Supposons qu'il existe une suite de polynômes (C_n) telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0(X) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, C'_n = n C_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 C_n(t) dt = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, C_{n_0} \neq B_{n_0}$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : C_n = B_n$.

► **Initialisation :**

Les suite (B_n) et (C_n) satisfont le système (S) . Ainsi :

$$B_0(X) = 1 = C_0(X)$$

D'où : $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $C_{n+1} = B_{n+1}$).

× On commence par remarquer :

$$\begin{aligned}
 B'_{n+1} &= (n+1) B_n && \text{(car la suite } (B_n) \text{ satisfait } (S)) \\
 &= (n+1) C_n && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
 &= C'_{n+1} && \text{(car la suite } (C_n) \text{ satisfait } (S))
 \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que :

$$C_{n+1} = B_{n+1} + \alpha$$

× La fonction $t \mapsto C_{n+1}(t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, car c'est une fonction polynomiale.
L'intégrale $\int_0^1 C_{n+1}(t) dt$ est donc bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \int_0^1 C_{n+1}(t) dt &= \int_0^1 B_{n+1}(t) + \alpha dt \\ &= \int_0^1 B_{n+1}(t) dt + \alpha \int_0^1 1 dt && \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= 0 + \alpha [t]_0^1 && \text{(car la suite } (B_n) \text{ satisfait (S))} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Or la suite (C_n) satisfait (S). Donc : $\int_0^1 C_{n+1}(t) dt = 0$. On en déduit : $\alpha = 0$.

Autrement dit :

$$C_{n+1} = B_{n+1}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = B_n$. Absurde !

On en conclut que (B_n) est l'unique suite de polynômes vérifiant (S).

□

26. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, H_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : H_n = B_n$.

Démonstration.

D'après la question précédente, la suite (B_n) est l'unique suite de polynômes à satisfaire le système (S). Pour démontrer que les suites de polynômes (B_n) et (H_n) sont égales, il suffit donc de démontrer que la suite (H_n) satisfait également le système (S).

• Tout d'abord :

$$H_0(X) = (-1)^0 B_0(1 - X) = B_0(1 - X) = 1$$

En effet, d'après **25**, B_0 est le polynôme constant égal à 1.

$$H_0(X) = 1$$

• Ensuite, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} H'_n(X) &= (-1)^n \times (-1) B'_n(1 - X) \\ &= (-1)^{n+1} B'_n(1 - X) \\ &= (-1)^{n+1} \times n B_{n-1}(1 - X) && \text{(d'après 25)} \\ &= (-1)^2 \times n (-1)^{n-1} B_{n-1}(1 - X) \\ &= n H_{n-1}(X) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H'_n = n H_{n-1}$$

- Enfin, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 H_n(t) dt &= \int_0^1 (-1)^n B_n(1-t) dt \\
 &= (-1)^n \int_1^0 B_n(u) (-du) \quad (\text{avec le changement de variable } \boxed{u = 1-t}) \\
 &= (-1)^n \int_0^1 B_n(u) du \\
 &= 0(-1)^n \times 0 \quad (\text{car la suite } (B_n) \text{ satisfait } (S))
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\int_0^1 H_n(t) dt = 0$.

La suite de polynômes (H_n) satisfait (S) . Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = B_n$.

Commentaire

L'énoncé affirme directement que la suite (H_n) ainsi définie est une suite de polynômes. Il était rapide de démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme car il est la composée $Q_n \circ R$ de :

- × $R(X) = 1 - X$ qui est un polynôme,
- × $Q_n(X) = (-1)^n B_n$ qui est un polynôme.

□

Problème : Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I. Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

27. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

Démonstration.

× $\forall t \in [0, +\infty[, e^{-t} \geq 0$

× $|e^{-t^2}| = e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$

× L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre 1 (> 0).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

□

On étudie les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

28. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $f(x)$ existe en tant qu'intégrale de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ continue sur le SEGMENT $[0, 1]$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)(-x)^2}}{t^2+1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1) \times 0}}{t^2+1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= [\arctan(t)]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{\pi}{4}$$

□

29. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt$$

Démonstration.

Dans toute la suite :

× on note $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$.

× pour tout $x_0 \in]-\infty, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto h(x_0, t) = \frac{e^{-x_0^2(t^2+1)}}{t^2+1}$.

× pour tout $t_0 \in [0, 1]$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto h(x, t_0) = \frac{1}{t_0^2+1} e^{-(t_0^2+1)x^2}$

(i) Caractère $\mathcal{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t_0 \in [0, 1]$, la fonction $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto \frac{1}{t_0^2 + 1} e^{-(t_0^2 + 1)x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, +\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in] -\infty, +\infty[$:

$$\underline{h}_{t_0}'(x) = \frac{1}{\cancel{t_0^2 + 1}} \times (-2(\cancel{t_0^2 + 1})x) \times e^{-(t_0^2 + 1)x^2} = -2x e^{-(t_0^2 + 1)x^2}$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

(0) Pour tout $x \in] -\infty, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2 + 1}$ est intégrable sur $[0, 1]$ car elle est continue sur le **SEGMENT** $[0, 1]$.

- Intégrabilité par domination

(1) ► Pour tout $x \in] -\infty, +\infty[$, la fonction $t \mapsto -2x e^{-x^2(t^2+1)}$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, 1]$.

► Soit $(a, b) \in] -\infty, +\infty[^2$. On suppose $a < b$.

Soit $x \in [a, b]$. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\left| -2x e^{-x^2(t^2+1)} \right| = \left| -2x \right| \left| e^{-x^2(t^2+1)} \right| = 2|x| e^{-x^2(t^2+1)} \leq 2 \max(|a|, |b|) \quad (*)$$

Et la fonction $\psi : t \mapsto 2 \max(|a|, |b|)$ est intégrable sur $[0, 1]$ car elle est continue sur le **SEGMENT** $[0, 1]$.

(l'inégalité $(*)$ démontre au passage que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto -2x e^{-x^2(t^2+1)}$ est intégrable sur $[0, 1]$)

L'inégalité $(*)$ s'obtient en remarquant que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|x| \leq \max(|a|, |b|) \quad \text{et} \quad e^{-x^2(t^2+1)} \leq 1 \quad \text{puisque} \quad -x^2(t^2+1) \leq 0$$

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle du type $[a, b] \subset] -\infty, +\infty[$ et donc sur $] -\infty, +\infty[$.

De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\infty, +\infty[, \quad f'(x) &= \int_0^1 \underline{h}_t'(x) \, dt \\ &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)} \, dt \\ &= -2x \int_0^1 e^{-x^2 t^2 - x^2} \, dt \\ &= -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} \, dt \\ &= -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} \, dt \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} \, dt$$

Commentaire

- Il est précisé dans le programme officiel « En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation ». Cette remarque est valide pour les trois théorèmes de régularité des intégrales à paramètre.
- Plus précisément, l'hypothèse de domination sur tout segment s'écrit :

$\forall (a, b) \in A^2$ (avec $a < b$), il existe une fonction $\varphi_{a,b}$ intégrable sur I telle que :

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in I, |h'_t(x)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

- Le fait d'utiliser l'hypothèse de domination sur tout segment $[a, b]$ produit une fonction $\varphi_{a,b}$ dont l'expression fait apparaître a et / ou b (si ce n'est pas le cas, autant dominer sur A tout entier !). Si l'expression de α ne dépend que de a , alors on peut préférer faire l'hypothèse de domination sur des intervalles de la forme $[a, \beta]$ où β est la borne haute de A . C'est ce qui est réalisé dans la question où l'hypothèse de domination est réalisée sur tout intervalle de type $[a, +\infty[$.

□

30. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

La fonction $s : t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est LA primitive de s qui s'annule en 0.

En particulier, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = s(x) = e^{-x^2}$.

Commentaire

- Il est aussi possible, pour répondre à cette question, de mettre en place l'étude générale d'une intégrale fonction de ses bornes.
- Rappelons que, de manière générale, la fonction :

$$x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t) dt$$

N'est PAS la primitive de la fonction f qui s'annule en a . Elle l'est seulement lorsque la borne basse de l'intégrale ne dépend pas de x est que la borne haute est $v(x) = x$ (et pas $v(x) = 2x$ ou $v(x) = -x$ ou toute autre expression en x).

□

31. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2g'(x)g(x)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt \quad (\text{d'après la question 29}) \\ &= -2x g'(x) \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt \end{aligned}$$

- Par ailleurs, pour tout $x \neq 0$, en posant le changement de variable $u = xt$:

$$\int_0^1 e^{-(xt)^2} dt = \int_0^x e^{-u^2} \frac{1}{x} du$$

$$\text{Finalement : } \forall x \neq 0, f'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt = -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \frac{1}{x} du = -2 e^{-x^2} g(x).$$

- Cette dernière formule est aussi vérifiée en $x = 0$ puisque :

$$\times f'(0) = -2 \times 0 \times e^{-0^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt = 0$$

$$\times -2 e^0 \times g(0) = -2 \int_0^0 e^{-u^2} du = 0$$

□

32. Vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2$$

Démonstration.

- D'après la question 30, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $u : x \mapsto \frac{\pi}{4} - g(x)^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par somme et produit de telles fonctions.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= -2 g(x) \times g'(x) \\ &= f'(x) \quad (\text{d'après la question 31}) \end{aligned}$$

La fonction $u - f$ étant de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette fonction est constante. On en conclut qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = f(x) + c$$

Par ailleurs :

$$\times u(0) = \frac{\pi}{4} - (g(0))^2 = \frac{\pi}{4} - 0^2 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\times f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ d'après la question 28.}$$

$$\text{Ainsi, } c = u(0) - f(0) = 0 \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{4} - (g(x))^2.$$

Commentaire

On peut expliciter le théorème utilisé dans cette question. On démontre :

$$\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = f'(t)$$

Cela permet de conclure, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x u'(t) dt &= \int_0^x f'(t) dt \\ \parallel &\parallel \\ u(x) - u(0) &= [u(t)]_0^x \quad [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) \end{aligned}$$

On en conclut alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = u(x) - u(0) + f(0)$.

□

33. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis conclure : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer d'abord la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en x »

- Pour tout $t_0 \in [0, 1]$, la fonction $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto \frac{1}{t_0^2 + 1} e^{-(t_0^2 + 1)x^2}$ admet une limite finie en $+\infty$.
Plus précisément :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_0^2 + 1} e^{-(t_0^2 + 1)x^2} = 0 \quad (\text{car } e^{-(t_0^2 + 1)x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ puisque } -(t_0^2 + 1)x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty)$$

- La fonction $\ell : t \mapsto 0$ est continue (par morceaux) sur $[0, 1]$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t(x) = \frac{1}{t^2 + 1} e^{-(t^2 + 1)x^2}$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.
► Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} |\underline{h}_t(x)| &= \left| \frac{1}{t^2 + 1} e^{-(t^2 + 1)x^2} \right| \\ &= \frac{|e^{-(t^2 + 1)x^2}|}{|t^2 + 1|} \\ &= \frac{e^{-(t^2 + 1)x^2}}{t^2 + 1} \\ &\leq \frac{1}{t^2 + 1} \quad (\text{car } -(t^2 + 1)x^2 \leq 0 \text{ puisque } t^2 + 1 > 0 \text{ et } x^2 \geq 0 \\ &\quad \text{et donc } \exp(-(t^2 + 1)x^2) \leq e^0 = 1) \end{aligned}$$

Et la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{1 + t^2}$ est intégrable sur $[0, 1]$ car elle est continue sur ce segment.
(cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{f}_t(x)$ est intégrable sur $[0, 1]$)

Alors, par théorème de convergence dominée (à paramètre continu), la fonction f admet une limite en $+\infty$ donnée par :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-(t^2 + 1)x^2}}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(t^2 + 1)x^2}}{t^2 + 1} \right) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

Commentaire

- Dans la question, on doit déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. L'hypothèse de domination doit alors être effectuée sur n'importe quel intervalle dont la plus grande borne est $+\infty$. Ici, on fait le choix $x \in]-\infty, +\infty[$ mais on aurait aussi pu choisir de travailler sur l'intervalle $[0, +\infty[$ ou encore $[1, +\infty[$ (par exemple).
- Cela ne signifie **EN AUCUN CAS** que l'on peut effectuer la domination sur tout segment (comme on le fait pour les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre). Comme signalé au-dessus, le seul critère est de considérer un intervalle dont l'une des bornes est $+\infty$ (puisque l'on recherche une limite en $+\infty$). Les intervalles $[10, +\infty[$ ou $[100, +\infty[$... peuvent aussi convenir.
- On pouvait aussi obtenir ce résultat par théorème d'encadrement.
Plus précisément, pour tout $x \geq 0$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} = \frac{1}{t^2+1} \times e^{-(tx)^2} \times e^{-x^2} \leq 1 \times 1 \times e^{-x^2}$$

On en conclut, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant), les intégrales en présence étant convergentes :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}$$

Or :

$$\begin{aligned} &\times 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \\ &\times e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- Il est légitime de se poser la question de la manière qui doit être privilégiée. Il convient de choisir celle qu'on sait mener au bout. Celle par encadrement permet d'éviter d'utiliser un théorème aux hypothèses complexes mais requiert une prise d'initiative lors de la majoration. On doit trouver une expression qui dépend de x , dont on peut calculer l'intégrale et dont l'intégrale tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. L'utilisation du théorème de convergence dominée (à paramètre continu) exige moins d'initiative car il suffit de dérouler les différentes hypothèses de ce théorème. En revanche, l'hypothèse de domination est généralement jugée complexe.

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x))^2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} - f(x) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$ par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq x$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(g(x))^2} \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x))^2} \quad (\text{par continuité de la fonction racine sur } [0, +\infty[) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

- On a démontré que la quantité $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On en conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

□

II. Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right)$$

II.A - Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

34. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale I_n est donc impropre seulement en $+\infty$.
- $\times \forall t \in [0, +\infty[, t^n e^{-t} \geq 0$ et $e^{-\frac{1}{2}t} \geq 0$
 $\times |t^n e^{-t}| = t^n e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)$

$$\text{En effet : } \frac{t^n e^{-t}}{e^{-\frac{1}{2}t}} = \frac{t^n}{e^{\frac{1}{2}t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

$\times$ L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t} dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $\frac{1}{2} > 0$.

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est (absolument) convergente.

□

35. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n , et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On procède par intégration par parties.
Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt \\ &= - \left[t^{n+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

Les intégrales I_n et I_{n+1} étant convergentes, la réserve est levée. Par ailleurs :

$$\left[t^{n+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^{n+1} e^{-t}) - \cancel{0^{n+1} e^{-0}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$$

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1) I_n$.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : I_n = n!$.

► **Initialisation :**

× D'une part :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} - e^{-0} \right) = 1$$

× D'autre part : $0! = 1$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $I_{n+1} = (n+1)!$).

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1) I_n && (d'après le point précédent) \\ &= (n+1) \times n! && (par hypothèse de récurrence) \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Commentaire

La récurrence dans cette question est élémentaire et classique. Il est légitime de se poser la question de l'obligation de détailler cette récurrence. De manière générale, cela dépend de la manière dont la question est formulée. Ici, la réponse apparaît dans l'énoncé. Affirmer qu'il est vrai par « par récurrence immédiate » ce n'est donc pas produire une preuve. Il est d'ailleurs évident qu'il faut au minima écrire le calcul de I_0 pour espérer obtenir des points sur cette dernière partie de la question. □

II.B - Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\text{II.1})$$

36. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente :

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $y = \frac{1}{\sqrt{n}}t - \sqrt{n}$:

$$\left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{\sqrt{n}}t - \sqrt{n} \quad \text{donc} \quad t = n + \sqrt{n}y \quad (\text{on note alors } \psi : u \mapsto n + \sqrt{n}u) \\ \hookrightarrow dt = \sqrt{n} dy \\ \bullet t = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{n}} \times 0 - \sqrt{n} \\ \bullet t = +\infty \Rightarrow y = +\infty \end{array} \right.$$

On obtient alors (les intégrales en présence étant convergentes) :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt &= \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} (n + \sqrt{n}y)^n e^{-(n + \sqrt{n}y)} \times \sqrt{n} dy \\ &= n^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}y\right)^n e^{-n} e^{-\sqrt{n}y} \times \sqrt{n} dy \\ &= \sqrt{n} n^n e^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}y\right)^n e^{-\sqrt{n}y} dy \end{aligned}$$

$$\text{On en conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*, n! = I_n = n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy.$$

Commentaire

- Au vu de l'énoncé, il apparaît qu'il faut transformer t^n en $\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n$.

On pense donc initialement à poser le changement de variable $t = 1 + \frac{y}{\sqrt{n}}$.

En agissant ainsi, on transformerait e^{-t} en $e^{-(1 + \frac{y}{\sqrt{n}})} = e^{-1} e^{-\frac{y}{\sqrt{n}}}$ alors que l'on souhaite faire apparaître $e^{-\sqrt{n}y}$. En réalité, il faut transformer la quantité t^n en :

$$n^n \times \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(n \times \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = (n + \sqrt{n}y)^n$$

Ainsi, on pose le changement de variable $t = n + \sqrt{n}y$.

Commentaire

- Dans l'expression précédente, on exprime t (qui est donc a priori la nouvelle variable) en fonction de y . C'est donc plutôt la formulation que l'on utilise pour transformer l'intégrale présente dans la question en celle présente dans les questions précédentes. Si l'on souhaite partir de la définition initiale de I_n , on fera plutôt apparaître le changement de variable sous la forme : $y = \frac{1}{\sqrt{n}} t - \sqrt{n}$.
- Dans cette question, on réalise un changement de variable. Il est naturel de penser à faire un changement de variable car le but de cette question est de faire apparaître la quantité $n!$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ alors qu'elle est définie en question 35 par une intégrale sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Il faut évidemment penser à effectuer un changement de variable lorsqu'on constate l'évolution des bornes de l'intégrale étudiée.
- L'utilisation d'un changement de variable est régulièrement suggéré par l'énoncé. Il est même fréquent que le changement de variable à effectuer soit directement fourni. Cependant, un concepteur laissera généralement l'initiative aux candidats du changement à effectuer lorsque celui-ci est assez transparent ou lorsqu'il s'agit de réaliser un changement de variable affine.

□

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

37. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Autrement dit, pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y)$.

Démonstration.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

- Pour n suffisamment grand, $y_0 \in [-\sqrt{n}, +\infty[$ (il suffit de choisir pour cela n tel que $y_0 \geq -\sqrt{n}$ c'est-à-dire $n \geq \lceil y_0^2 \rceil$). Ainsi $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(y_0) = 1$ et :

$$\begin{aligned} f_n(y_0) &= 1 \times \left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y_0\sqrt{n}} \\ &= \exp\left(n \times \ln\left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}}\right)\right) \times e^{-\sqrt{n}y_0} \\ &= \exp\left(n \times \ln\left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}y_0\right) \end{aligned}$$

- Or :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$$

$$\text{donc} \quad \ln\left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}}\right) = \frac{y_0}{\sqrt{n}} - \frac{\left(\frac{y_0}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad n \times \ln\left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}}\right) &= n \frac{y_0}{\sqrt{n}} - n \frac{y_0^2}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \\ &= \sqrt{n}y_0 - \frac{y_0^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$n \times \ln \left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{n} y_0 = -\frac{y_0^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} f_n(y_0) &= \exp \left(n \times \ln \left(1 + \frac{y_0}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{n} y_0 \right) \\ &= \exp \left(-\frac{y_0^2}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{y_0^2}{2} \right) \times \exp \left(o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(-\frac{y_0^2}{2} \right) \times \exp(0) \end{aligned}$$

On démontre ainsi, pour tout $y \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Ainsi : $\forall y \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Commentaire

- Déterminer la limite simple d'une suite de fonction (f_n) sur un intervalle I , c'est déterminer, pour tout $x_0 \in I$, la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$. Cette limite peut dépendre de la valeur de x_0 ce qui amène naturellement à faire une disjonction de cas. C'est par exemple le cas lorsque l'on détermine la limite d'une suite géométrique. Plus précisément, pour tout $x_0 \geq 0$:

$$x_0^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x_0 < 1 \\ 1 & \text{si } x_0 = 1 \\ +\infty & \text{si } x_0 > 1 \end{cases}$$

- Cet exercice illustre le cas où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie par cas et où les cas dépendent de n . Plus précisément :

$$f_n : y \mapsto \begin{cases} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-y\sqrt{n}} & \text{si } t \in I_n \\ 0 & \text{si } t \in J_n \end{cases}$$

où $I_n = [-\sqrt{n}, +\infty[$ et $J_n =]-\infty, -\sqrt{n}]$. Raisonner sur la limite (quand n tend vers $+\infty$) de la suite $(f_n(y_0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ à y_0 fixé n'est pas si simple :

- × si l'on souhaite utiliser l'expression de $f_n(y_0)$ qui correspond au cas où $y_0 \in I_n$, il faudrait s'assurer que y_0 appartient à I_n pour toute valeur de n .
- × si l'on souhaite utiliser l'expression de $f_n(y_0)$ qui correspond au cas où $y_0 \in J_n$, il faudrait s'assurer que y_0 appartient à J_n pour toute valeur de n .

Commentaire

- Dans un tel cas, on commence par « déterminer la limite » des intervalles I_n et J_n .

$$\ll \lim_{n \rightarrow +\infty} [-\sqrt{n}, +\infty[=]-\infty, +\infty[= I \gg \text{ et } \ll \lim_{n \rightarrow +\infty}]-\infty, -\sqrt{n}[=]-\infty, -\infty[= \emptyset = J \gg$$

Insistons sur le fait que ces notations de limites n'ont pas de sens mathématiquement parlant. Une telle démarche doit donc apparaître uniquement au brouillon et pas sur une copie de concours. Cette étape est cependant essentielle. Elle permet de comprendre que commencer la rédaction par « Soit $y_0 \in [n, +\infty[$ » ne fait pas de sens si l'on souhaite déterminer la limite de $f_n(y_0)$ car pour n suffisamment grand, y_0 n'appartiendra plus à J_n . La bonne disjonction de cas à effectuer est donc celle sur les intervalles limite I et J . Dans le cas qui nous intéresse comme $J = \emptyset$, on suppose donc uniquement $y_0 \in I =]-\infty, +\infty[$. On est assuré que pour n suffisamment grand, y_0 sera toujours élément de I_n . À partir de ce rang, on peut donc utiliser la définition de $f_n(y_0)$ correspondant au cas où $y_0 \in I_n$. □

Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ on pose $q(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

38. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $] - 1, +\infty[$ que l'on convient de noter également q .

Démonstration.

- La fonction q est continue sur $] - 1, 0[$ car elle est le quotient $q = \frac{q_1}{q_2}$ où :

× $q_1 : x \mapsto x - \ln(1+x)$ est continue sur $] - 1, 0[$.

× $q_2 : x \mapsto x^2$ est :

► continue sur $] - 1, 0[$.

► NE S'ANNULE PAS sur $] - 1, 0[$.

On démontre de même que la fonction q est continue sur $]0, +\infty[$.

Finalement, la fonction q est continue sur $] - 1, +\infty[\setminus \{0\}$.

- Comme vu dans la question précédente :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\text{donc } x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\text{donc } \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la fonction q est prolongeable par continuité en 0 en posant $q(0) = \frac{1}{2}$. □

39. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

Démonstration.

Soit $x > -1$.

- Remarquons tout d'abord que la fonction $u \mapsto \frac{u}{1+ux}$ est continue sur le SEGMENT $[0, 1]$.

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$ est bien définie.

- Supposons $x \neq 0$. Remarquons que pour tout $u \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{u}{1+ux} &= \frac{1}{x} \frac{xu}{1+ux} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1+ux}{1+ux} - \frac{1}{1+ux} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x}{1+ux} \right) \quad (\text{en multipliant par } \frac{x}{x}) \end{aligned}$$

On en déduit, en intégrant de part et d'autre :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x}{1+ux} \right) du \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\int_0^1 x du - \int_0^1 \frac{x}{1+ux} du \right) \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x - \left[\ln(|1+ux|) \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x - \left(\ln(|1+x|) - \ln(|1|) \right) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(x - \ln(1+x) + \ln(1) \right) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

- Si $x = 0$, $q(0) = \frac{1}{2}$. Par ailleurs :

$$\int_0^1 \frac{u}{1} du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} [u^2]_0^1 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2)$$

Ainsi, la formule précédente est aussi vraie en 0.

Finalement : $\forall x > -1$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

□

40. En déduire que q est une fonction décroissante sur $] -1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, f_n(y) \leq (1+y)e^{-y} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_-, f_n(y) \leq e^{-y^2/2}$$

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que la fonction q est décroissante sur $] -1, +\infty[$.

Soit $(y, z) \in] -1, +\infty[^2$. On suppose $y \leq z$.

Pour tout $u \in [0, 1]$:

$$uy \leq uz \quad (\text{en multipliant par } u \geq 0)$$

$$\text{donc} \quad 1 + uy \leq 1 + uz$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{1 + uy} \geq \frac{1}{1 + uz} \quad (\text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0, +\infty[)$$

$$\text{donc} \quad \frac{u}{1 + uy} \geq \frac{u}{1 + uz} \quad (\text{en multipliant par } u \geq 0)$$

Ainsi : $\forall u \in [0, 1], \frac{u}{1 + uy} \geq \frac{u}{1 + uz}$. On en déduit, par croissance de l'intégrale (de bornes $0 \leq 1$) :

$$q(y) = \int_0^1 \frac{u}{1 + uy} du \geq \int_0^1 \frac{u}{1 + uz} du = q(z)$$

On en déduit que la fonction q est décroissante sur $] -1, +\infty[$.

- Avant d'obtenir les majorations demandées, examinons le lien entre f_n et q .

Rappelons tout d'abord que pour tout $y \geq -\sqrt{n}$:

$$\begin{aligned} f_n(y) &= \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \times e^{-\sqrt{n}y} \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}y\right) \quad (\text{comme déjà vu en question 37}) \\ &= \exp\left(n \left(\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(n \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^2}{\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^2} \left(\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\cancel{\text{r}} \frac{y^2}{\cancel{\text{r}}} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right) - \frac{y}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^2}\right) \\ &= \exp\left(y^2 \times \left(-q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Dans le cas où $y < -\sqrt{n}$:

$$f_n(y) = 0 \leq \exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R} : f_n(y) \leq \exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

- Démontrons maintenant les majorations demandées. Soit $y \in \mathbb{R}$.

Deux cas se présentent.

× Si $y \geq 0$:

Comme $n \geq 1$ alors $\sqrt{n} \geq 1$ et ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 \quad (\text{par décroissance de la fonction inverse sur } [0, +\infty[)$$

$$\text{donc} \quad \frac{y}{\sqrt{n}} \leq y$$

$$\text{donc} \quad q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \geq q(y) \quad (\text{par décroissance de la fonction } q \text{ sur }]-1, +\infty[)$$

$$\text{donc} \quad -q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \leq -q(y)$$

$$\text{donc} \quad -y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \leq -y^2 q(y)$$

$$\text{donc} \quad \exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp(-y^2 q(y)) \quad (\text{par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R})$$

Par ailleurs :

$$\exp(-y^2 q(y)) = \exp\left(-y^2 \times \frac{y - \ln(1+y)}{y^2}\right) = \exp(-y) \times \exp(\ln(1+y)) = (1+y) e^{-y}$$

$$\text{Pour tout } y \geq 0, f_n(y) \leq \exp(-y^2 q(y)) \leq (1+y) e^{-y}.$$

× Si $y < 0$: Alors $\frac{y}{\sqrt{n}} < 0$ et :

$$\text{alors} \quad q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right) \geq q(0) \quad (\text{par décroissance de la fonction } q \text{ sur }]-1, +\infty[)$$

$$\text{donc} \quad \exp\left(-y^2 q\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \leq \exp(-y^2 q(0)) \quad (\text{comme dans le point précédent})$$

$$\text{Comme } q(0) = \frac{1}{2}, \text{ alors pour tout } y < 0, f_n(y) \leq \exp(-y^2 q(y)) \leq e^{-y^2/2}.$$

□

41. (UNIQUEMENT POUR LES 5/2)

Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

Démonstration.

- D'après la question 36, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} n! &= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy.$$

- Déterminons maintenant la limite de la suite $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy \right)$. Pour ce faire, il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- Pour tout $y_0 \in]-\infty, +\infty[$, on a démontré en question 37, que la suite numérique $(f_n(y_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $e^{-\frac{y_0^2}{2}}$. Cela démontre que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $] - \infty, +\infty[$ vers la fonction $u : y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$.
- La fonction $u : y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ est continue par morceaux sur $] - \infty, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en y »

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $] - \infty, +\infty[$.
- Pour tout $y \in] - \infty, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f_n(y)| \leq \varphi(y)$$

$$\text{où } \varphi \text{ est la fonction définie par } \varphi : y \mapsto \begin{cases} (1+y)e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ e^{-\frac{y^2}{2}} & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

Il s'agit alors de démontrer que la fonction φ est intégrable sur $] - \infty, +\infty[$. Remarquons tout d'abord que cette fonction est continue par morceaux sur $] - \infty, +\infty[$ et à valeurs positives sur $] - \infty, +\infty[$. Par ailleurs :

1) l'intégrale (impropre en $+\infty$) $\int_0^{+\infty} \varphi(y) dy$ est convergente.

En effet, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-y} dy$ et $\int_0^{+\infty} y e^{-y} dy$ sont convergentes d'après la question 34. On en déduit, par linéarité de l'intégrale, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1+y)e^{-y} dy$ est aussi convergente.

2) l'intégrale (impropre en $-\infty$) $\int_{-\infty}^0 \varphi(y) dy$ est convergente.

En effet, comme la fonction $w : y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ est paire sur $\mathbb{R}$, alors les intégrales $\int_{-\infty}^0 w(y) dy$

et $\int_0^{+\infty} w(y) dy$ sont de même nature. Par ailleurs, en posant le changement de variable

$$t = \frac{y}{\sqrt{2}}, \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \times \sqrt{2} dt && \text{(d'après la question 27, cette dernière} \\ & && \text{intégrale est convergente, ce qui démontre} \\ & && \text{que la première l'est aussi)} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} && \text{(d'après la question 33)} \end{aligned}$$

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction u est intégrable sur $] -\infty, +\infty[$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y) \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

De plus, par argument de parité de la fonction w (déjà mis en avant) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2 \sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{2\pi}$$

Finalement : $n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y) dy \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi}.$

Commentaire

- La question 40 est à considérer comme difficile car les deux majorations demandées obligent à faire apparaître la fonction q dans l'expression de f_n . Établir ce lien n'est pas explicitement demandé mais il faut penser à prendre cette initiative car l'énoncé demande d'abord d'effectuer l'étude de la monotonie de la fonction q .
- Cette question, en revanche, est à considérer comme plus simple car il s'agit d'une question bilan qui demande peu de démonstration mais seulement de citer correctement les résultats démontrés dans l'énoncé. Même si on ne parvient pas à traiter la question 40, il est vivement conseillé de traiter la question 41 qui ne présente pas de difficulté méthodologique puisqu'il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée.
- Le cœur de la question est la bonne utilisation du théorème de convergence dominée. Dès lors, l'intégrabilité de la fonction φ sera certainement considéré comme un résultat annexe dont on attend une justification courte.
- Les questions les plus longues et difficiles rapportent plus de points car demandent un investissement plus important. Cependant, dans un énoncé aussi long, il faut faire attention de ne pas bloquer sur les questions les plus difficiles : elles ne rapporteront des points que si elles sont en partie traitées correctement. Il faut apprendre à passer à la question qui suit afin de conserver le temps de traiter une masse suffisante de questions, seule stratégie permettant de tirer son épingle du jeu dans un énoncé de type Centrale. □

II.C - Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad v_n = \ln(u_n) \quad w_n = v_{n+1} - v_n$$

42. Vérifier : $w_n = \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_n &= v_{n+1} - v_n \\ &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \\ &= (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + \frac{1}{2} \ln(n+1) - \ln((n+1)!) \\ &\quad - n \ln(n) + n - \frac{1}{2} \ln(n) + \ln(n!) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} w_n &= n \left(\ln(n+1) - \ln(n) \right) - 1 + \frac{1}{2} \left(\ln(n+1) - \ln(n) \right) - \ln \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right) + \ln(n+1) \\ &= n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \cancel{\ln(n+1)} + \cancel{\ln(n+1)} \end{aligned}$$

- Par ailleurs : $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$. On en déduit :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)$$

On en déduit :

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{ainsi} \quad n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Finalement : $w_n = \frac{1}{12n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \geq 0$
- $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$
- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème d'équivalent des séries à termes positifs, la série $\sum w_n$ est (absolument) convergente

□

II.C.1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

43. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n$$

Démonstration.

- Remarquons :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, -\varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} - 1 \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, 1 - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n$$

- La première proposition étant vérifiée, il en est de même de la dernière.

On en déduit que pour toute valeur de ε , il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n$.

□

44. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

Démonstration.

- $\times \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \geq 0$
 $\times a_n = O_{n \rightarrow +\infty}(b_n)$. En effet, pour tout $n \geq n_0$:

$$1 - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \varepsilon$$

La suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ est donc bornée à partir du rang n_0 , ce qui démontre qu'elle est bornée.

- $\times$ La série $\sum b_n$ est convergente.

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ est convergente.

Commentaire

- On peut aussi utiliser ici la propriété $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ pour conclure quant à la convergence de la série $\sum b_n$.
- On décide d'utiliser le théorème de domination plutôt que d'équivalence car la formulation de l'énoncé suggère que l'on doit utiliser le résultat précédent.

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \geq n_0$. On suppose $N \geq n_0$.
Rappelons que d'après la question précédente :

$$\forall k \geq n_0, (1 - \varepsilon) b_k \leq a_k \leq (1 + \varepsilon) b_k$$

En sommant les inégalités de la question précédente pour k variant de n ($\geq n_0$) à N ($\geq n$), on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^N b_k \leq \sum_{k=n}^N a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^N b_k$$

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ étant convergentes, les suites $\left(\sum_{k=n}^N a_k\right)_{N \geq n}$ et $\left(\sum_{k=n}^N b_k\right)_{N \geq n}$ sont convergentes. Par passage à la limite (lorsque $N \rightarrow +\infty$) dans la double inégalité précédente, on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$

Cela démontre, d'après la chaîne d'équivalence de la question 43 appliquée aux suites $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, que ces suites sont équivalentes.

□

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

45. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir : $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [n, n+1]$.

$$n \leq t \leq n+1$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{par décroissance de la} \\ \text{fonction } t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ sur }]0, +\infty[\end{array} \right)$$

$$\text{donc} \quad \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2} dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{par croissance de l'intégrale} \\ \text{sur un SEGMENT, les bornes} \\ \text{étant dans l'ordre croissant} \\ (n+1 \geq n) \end{array} \right)$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$$

On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$.

□

46. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow \infty$.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

Soit $j \geq 2$. En appliquant l'inégalité de gauche en $k = j-1 \in \mathbb{N}^*$, et celle de droite en $k = j \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\frac{1}{j^2} \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_j^{j+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{j^2}$$

$$\forall j \geq 2, \int_j^{j+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{j^2} \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{t^2} dt$$

- Soit $n \geq 2$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$. On suppose $N \geq n$.

En sommant ces inégalités pour j variant de n à N , on obtient :

$$\sum_{j=n}^N \int_j^{j+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{j=n}^N \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=n}^N \int_{j-1}^j \frac{1}{t^2} dt$$

$$\int_n^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \quad \overset{||}{=} \quad \sum_{j=n}^N \frac{1}{j^2} \quad \overset{||}{=} \quad \int_{n-1}^N \frac{1}{t^2} dt \quad \left(\begin{array}{l} \text{par relation} \\ \text{de Chasles} \end{array} \right)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \times \int_n^{N+1} \frac{1}{t^2} dt &= \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{N+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}. \\ \times \int_{n-1}^N \frac{1}{t^2} dt &= \left[-\frac{1}{t} \right]_{n-1}^N = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

En passant à la limite (quand $N \rightarrow +\infty$) dans la double égalité précédente, on obtient :

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{n-1}$$

En multipliant de part et d'autre par $\frac{1}{\frac{1}{n}}$, on obtient :

$$1 \leq \frac{\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{n}{n-1}$$

Or :

$$\begin{aligned} \times 1 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \\ \times \frac{n}{n-1} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\frac{\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Autrement dit : $\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Commentaire

- Il est aussi possible de traiter cette question à l'aide de la question 44. Pour ce faire, on introduit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

- Ces suites vérifient les propriétés suivantes :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 0 \text{ (par croissance de l'intégrale) et } b_n > 0.$$

$$\times \text{ la série } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

$$\times a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n. \text{ En effet, d'après la question précédente : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{(n+1)^2} \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{Ainsi, en multipliant de part et d'autre par } \frac{1}{b_n} > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}.$$

$$\text{Ce qui permet de conclure, par théorème d'encadrement : } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ ou encore : } a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n.$$

Commentaire

- On en conclut, d'après la question 44 : $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Or :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n}^{+\infty} a_k &= \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=n}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_n^{N+1} \frac{1}{t^2} dt \right) \quad (\text{par relation de Chasles}) \\
 &= \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

□

II.C.3)

47. Dédurre des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration.

- Les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{12} \frac{1}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifient :
 - × $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n \geq 0$ et $\frac{1}{12} \frac{1}{n^2} > 0$.
 - × la série $\sum \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$ est convergente.
 - × $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n^2}$ d'après la question 42.
- On en déduit, par la question 44 :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{12} \frac{1}{k^2} \right)$$

Par ailleurs : $\sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{12} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n}$.

Finalement : $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12} \frac{1}{n}$.

□

48. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n} \right)$$

Démonstration.

- Par définition : $\forall k \in \mathbb{N}^*, w_k = v_{k+1} - v_k$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $N \geq n$:

$$\sum_{k=n}^N w_k = \sum_{k=n}^N (v_{k+1} - v_k) = v_{N+1} - v_n$$

Ainsi, en passant à la limite (lorsque $N \rightarrow +\infty$), on obtient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} v_{N+1} \right) - v_n \quad (*)$$

- Déterminons $\lim_{N \rightarrow +\infty} v_{N+1}$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \quad (\text{d'après la question 41}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est convergente de limite $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Il en est de même de la suite (u_{n+1}) .

On en déduit : $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_{N+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et par composition de limites :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} v_{N+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln(u_{N+1}) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = -\ln(\sqrt{2\pi})$$

Ainsi, d'après $(*)$: $v_n = -\sum_{k=n}^{+\infty} w_k - \ln(\sqrt{2\pi})$.

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n) \\ &= \ln\left(\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right) - \ln(n!) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right) - v_n \\ &= \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right) + \ln(\sqrt{2\pi}) + \sum_{k=n}^{+\infty} w_k \\ &= \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) + \sum_{k=n}^{+\infty} w_k \end{aligned}$$

En appliquant la fonction exp de part et d'autre, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \times \exp\left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k\right)$$

- D'après la question précédente : $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$. On en déduit :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} w_k = \frac{1}{12n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \exp \left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \right) &= \exp \left(\frac{1}{12n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{12n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right) \quad (\text{car } e^u = 1 + u + \underset{u \rightarrow 0}{o}(u)) \end{aligned}$$

On note alors (q_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = n \times \left(\exp \left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \right) - \left(1 + \frac{1}{12n} \right) \right)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \times \forall n \in \mathbb{N}^*, \exp \left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \right) &= 1 + \frac{1}{12n} + \exp \left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \right) - \left(1 + \frac{1}{12n} \right) = 1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}. \\ \times \frac{q_n}{n} &= \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right), \text{ ce qui démontre :} \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{q_n}{n}}{\frac{1}{n}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{\cancel{\text{r}}} \times \frac{q_n}{\cancel{\text{r}}} \longrightarrow 0$$

On a bien trouvé une suite (q_n) convergente de limite nulle, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \times \exp \left(\sum_{k=n}^{+\infty} w_k \right) = \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \times \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n} \right)$$

□