

DS3

Problème 1

Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

Sous réserve que cette expression ait un sens, on pose pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tf(t)}{x^2 + t^2} dt$$

L'objet de ce problème est d'étudier cette transformation et d'en déduire le calcul de certaines intégrales.

1. Dans cette question on considère la fonction f définie par $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$.

a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) On pose $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$. Exprimer F en fonction de G .

c) Montrer avec précision que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

d) Calculer G' et en déduire la valeur de $F(x)$ pour tout x .

e) Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et utiliser ce qui précède pour déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 dt$$

2. Dans cette question on considère la fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$.

a) Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) On considère H la fonction définie par $H : x \mapsto xF(x)$.

Montrer que la fonction H est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et : $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \frac{\pi}{2}$.

(on pourra penser au changement de variable $t = ux$)

c) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

d) On note $h : (x, t) \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$.

En admettant la relation (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

établir que H est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

e) En déduire l'expression de F .

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

(on commencera par déterminer χ_{M_a})

4. Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

5. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$ associe $\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{1+xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$.

6. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

7. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

8. **Limite de f en l'infini**

a) Démontrer que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ .

b) Déterminer la valeur de ℓ .

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 3

9. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

10. a) Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

b) En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

11. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

12. Calculer $\varphi(1)$.

13. a) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx$.

b) En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x) dx \right)$, déterminer la valeur de

la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Problème 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique.

On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^n e_i \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(e_j) = e_1 + e_j \right) \quad \text{et} \quad (g = f - \text{id}_{E_n})$$

14. Donner, dans la base $\mathcal{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g .

15. Justifier que f et g sont diagonalisables.

16. Diagonalisation de f et de g dans une même base

a) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(g)$.

b) Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n .

c) Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\text{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

d) On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

(A) Méthode 1

(i) Démontrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont stables par g .

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathcal{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\text{Im}(g)$ induit par g .

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h .

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2 .

(B) Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\text{Sp}(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathcal{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n , la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

e) Déterminer une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$. On ne demande pas de déterminer P^{-1} .

f) Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

17. Résoudre pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = FX(t) + tU$ où U est la première colonne de la matrice P .