

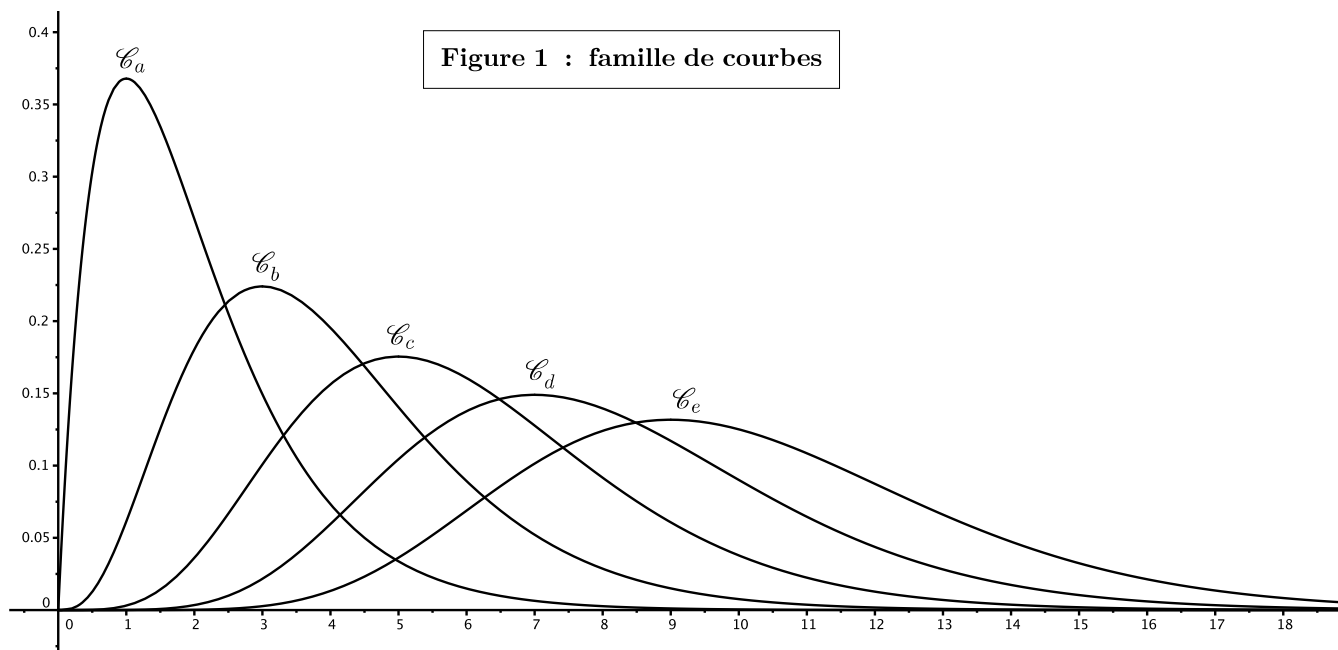
DS4

EXERCICE 1

On considère la fonction $f : t \mapsto 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n , définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n : t \mapsto \frac{e^{-t} t^n}{n!}$$

1. On rappelle qu'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
 - a) Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire son maximum.
 - b) Démontrer : $f_n(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.
 - c) Établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.
2. a) Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est convergente, et vérifier : $\mathbb{R}_+ \subset D$.
 - b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^x dt$ est convergente.
 - c) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
 - d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.
 - e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.
 - a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = 1 - \int_0^x f_n(t) dt$.
 - b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de H'_n .
 - c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les limites $\lim_{x \rightarrow 0} (H_n(x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.
 - d) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.
4. Dans la figure 1 (page suivante), on peut visualiser certaines représentations graphiques des fonctions de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont celle de f_1 et f_5 .
 - a) Lesquelles des courbes $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_d$ ou $\mathcal{C}_e$ de la figure 1 correspondent respectivement aux représentations graphiques de f_1 et de f_5 ?
 - b) Pouvez-vous faire le lien entre cette figure et certaines propriétés analysées dans les questions précédentes ?
5. a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
 - b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.
 - c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.



EXERCICE 2

Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

- On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))$$

- Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .
- Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. **On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .**
- Par exemple, si l'on suppose :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

et donc : $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I- Généralités sur l'application φ

- Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
- 6. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

- On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse.
En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

8. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

9. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M .
10. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Partie III - Étude d'un second exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
11. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

12. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

- Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
- On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

- En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

IV. 1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

13. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.
14. Dédurre de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.
15. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV. 2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

16. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.
17. En utilisant 14 en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.
18. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

EXERCICE 3 : Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

- On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face avec la probabilité $\frac{1}{2}$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne face ».
- On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
- Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 : $\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$

Exemple 2 : $\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k}_{\text{Série n° 3}}$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'événement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série

19. Rappeler (sans le démontrer) les conditions sur x de convergence de la série géométrique $\sum_{k \geq 0} x^k$ et de la série géométrique dérivée deuxième $\sum_{k \geq 1} k x^{k-1}$.

On donnera la valeur des sommes de ces séries.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

20. Exprimer l'événement $\{L_1 = k\}$ en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.
 21. Montrer que $\mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 2^{-k}$.
 22. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\})$.
 23. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur.
 Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

24. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .
 25. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

26. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'événements :

$$\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

puis en déduire :

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n)$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ les relations :

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap F_n)$$

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap P_n)$$

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap F_n)$$

27. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\})$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(\{N_m = k\}) x^k$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_1(x) = x$$

28. Dédire de 27 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x)$$

29. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

30. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de G'_n , dérivée de la fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

31. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .