

DS4 (/ 102)

EXERCICE 1 / 34

On considère la fonction $f : t \mapsto 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n , définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n : t \mapsto \frac{e^{-t} t^n}{n!}$$

1. On rappelle qu'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

a) Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire son maximum.

- 1 pt : la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \geq 0$, $f'_n(t) = \frac{e^{-t} t^{n-1}}{n!} (n - t)$
- 1 pt : f_n croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$ donc atteint son max en $f_n(n) = \frac{e^{-n} n^n}{n!}$

b) Démontrer : $f_n(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

- 1 pt : $f_n(n) = \frac{e^{-n} n^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-n} n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

c) Établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

- 1 pt : $\forall t \geq 0$, $|f_n(t) - f(t)| = |f_n(t)| \leq f_n(n)$ donc pour tout n la fonction f_n est bornée et $0 \leq \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq f_n(n)$
- 1 pt : par théorème d'encadrement, $\|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2. a) Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est convergente, et vérifier : $\mathbb{R}_+ \subset D$.

- 1 pt : la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t} t^x = e^{-t} e^{x \ln(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$
- 1 pt : $e^{-t} t^x \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- 1 pt : théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues POSITIVES écrit correctement
- 1 pt : $e^{-t} t^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ et donc intégrabilité si $-x < 1$ c-à-d $x > -1$
- 0 pt : on en conclut $D =]-1, +\infty[$

b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^x dt$ est convergente.

- 1 pt : la fonction $g_x : t \mapsto \ln(t) e^{-t} t^x = \ln(t) e^{-t} e^{x \ln(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$
- 1 pt : $|\ln(t) e^{-t} t^x| = |\ln(t)| e^{-t} |t^x| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- 1 pt : $|\ln(t) e^{-t} t^x| = |\ln(t)| e^{-t} |t^x| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln(t)| t^x \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ puisque $x > 0$ donc intégrale faussement impropre en 0
- 1 pt : $|\ln(t) e^{-t} t^0| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln(t)|$ et la fonction $\ln$ est intégrable en 0

c) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

• 1 pt : Caractère $\mathcal{C}^1$ - étude « en x »

× 1 pt : pour tout $t \in]0, +\infty[$, $h_t : x \mapsto e^{-t} t^x = e^{-t} e^{x \ln(t)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

× 0 pt : $h_t'(x) = e^{-t} \ln(t) e^{x \ln(t)}$

• 3 pts : Intégrabilité - étude « en t »

× 1 pt : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto e^{-t} e^{x \ln(t)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (2.b)

× 0 pt : $t \mapsto e^{-t} \ln(t) e^{x \ln(t)}$ est c.p.m sur $]0, +\infty[$

× 2 pts : pour tout $x \in [a, b]$

► 1 pt : si $t \in [0, 1]$, $|e^{-t} \ln(t) e^{x \ln(t)}| = e^{-t} |\ln(t)| t^x \leq e^{-t} |\ln(t)|$

► 1 pt : si $t > 1$, $e^{-t} |\ln(t)| t^x \leq e^{-t} |\ln(t)| t^b$

et $\varphi : t \mapsto \begin{cases} e^{-t} |\ln(t)| & \text{si } t \in [0, 1] \\ e^{-t} |\ln(t)| t^b & \text{si } t > 1 \end{cases}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

• 1 pt : question 2.a) avec $x = n \geq 0$

e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.

• 1 pt : $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = -n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt + n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$

• 1 pt : par une récurrence immédiate $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = n!$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = 1$

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = 1 - \int_0^x f_n(t) dt$.

• 1 pt : par relation de Chasles $\int_0^x f_n(t) dt + \int_x^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$

b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de H_n' .

• 1 pt : f_n continue sur $[0, +\infty[$ donc admet une primitive F_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$

• 1 pt : ainsi $\int_0^x f_n(t) dt = [F_n(t)]_0^x = F_n(x) - F_n(0)$

• 0 pt : ainsi, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $H_n'(x) = -F_n'(x) = -f_n(x)$

c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les limites $\lim_{x \rightarrow 0} (H_n(x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.

• 1 pt : H_n est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (H_n(x)) = H_n(0) = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$

• 1 pt : comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ CV, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_n(x) = 0$

d) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.

Théorème d'interversion de symboles par convergence uniforme

- 1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0, x]$
- 1 pt : la suite de fonctions (f_n) CU sur le SEGMENT $[0, x]$
- 0 pt : ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^x f(t) dt = 0$

4. Dans la figure 1 (page suivante), on peut visualiser certaines représentations graphiques des fonctions de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont celle de f_1 et f_5 .

a) Lesquelles des courbes $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_d$ ou $\mathcal{C}_e$ de la figure 1 correspondent respectivement aux représentations graphiques de f_1 et de f_5 ?

- 1 pt : f_1 admet son max en 1 et f_5 en 5. Les courbes respectives sont donc $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_c$

b) Pouvez-vous faire le lien entre cette figure et certaines propriétés analysées dans les questions précédentes ?

- 1 pt : la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers f (phénomène d'écrasement : plus précisément le sup qui tend vers 0) OU l'aire constante

5. a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

- 1 pt : $|f_n(t)| = \frac{e^{-t} t^n}{n!} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^n}{n!} \right)$ et la série numérique $\sum \frac{t^n}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle

b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.

- 1 pt : si $t \in [a, b]$, $|f_n(t)| = \frac{e^{-t} t^n}{n!} \leq \frac{b^n}{n!}$
- 1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est bornée et $\|f_n\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{b^n}{n!}$
- 0 pt : la série numérique $\sum \frac{b^n}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle

c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

- 1 pt : par l'absurde. Supposons $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. Alors, en particulier, pour tout n , f_n est bornée et $\forall t \geq 0, |f_n(t)| \leq \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$

- 1 pt : $0 \leq f_n(n) \leq \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$ et comme $\sum \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$ converge alors $\sum f_n(n)$ CV.

Absurde car $f_n(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

Ou plutôt de manière directe ! $\|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\sum \|f_n\|_{\infty, [0, +\infty[}$ diverge

EXERCICE 2 / 32

Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

- On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))$$

- Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .
- Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. **On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .**
- Par exemple, si l'on suppose :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

et donc : $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I- Généralités sur l'application φ

- Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
- 6. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
 - **1 pt :** $\varphi(P)$ reste de la div. eucl. de AP par B ($\neq 0$) donc $\deg(\varphi(P)) < \deg(B) = n+1$
- On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

- 7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse.

En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

- **1 pt :** $A(\lambda P_2) = B(\lambda Q_2) + \lambda R_2$ et $A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$
- **1 pt :** $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(\lambda R_2)) < \deg(B) = n+1$
- **1 pt :** par unicité de la division euclidienne, $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2)$

Partie II - Étude d'un premier exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

- 8. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

- **1 pt :** $A P_0 = X^2 + 2X = (X^3 + X^2 - X - 1) \times 0 + (X^2 + 2X)$
- **1 pt :** $A P_1 = X^3 + 2X^2 = (X^3 + X^2 - X - 1) \times 1 + (X^2 + X + 1)$
- **1 pt :** $A P_2 = X^4 + 2X^3 = (X^3 + X^2 - X - 1) \times (X - 1) + (2X + 1)$

9. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M .

• 1 pt : $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X \\ -2 & X-1 & -2 \\ X & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & X \\ 0 & X+1 & -2(X+1) \\ 0 & -(X+1) & (X-1)(X+1) \end{vmatrix}$

• 1 pt : $= (-1)(-1) \begin{vmatrix} X+1 & -2(X+1) \\ -(X+1) & (X-1)(X+1) \end{vmatrix} = (X+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & (X-1) \end{vmatrix} = (X+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & (X-3) \end{vmatrix}$

• 0 pt : ainsi $\text{Sp}(M) = \{-1, 3\}$

• 2 pts :

× 1 pt : $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subset \text{Ker}(M + I_3)$

× 1 pt : $\text{rg}(M + I_3) = 1$ donc, par théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(M + I_3)) = 2$

et $E_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = E_{-1}(M)$

• 2 pts :

× 1 pt : $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ donc $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \text{Ker}(M - 3I_3)$

× 1 pt : $1 \dim(E_3(M)) \leq m_3(M) = 1$ donc $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = E_3(M)$

10. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

• 1 pt : $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

OU χ_M est scindé ET pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\dim(E_\lambda(M)) = m_\lambda(M)$

• 1 pt : $\text{Vect}(1 - X, 1 - X^2, 1 + 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ

Partie III - Étude d'un second exemple

• Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

11. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

• 1 pt : $A P_0 = \alpha + \beta X + \gamma X^2 = X^3 \times 0 + (\alpha + \beta X + \gamma X^2)$

• 1 pt : $A P_1 = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = X^3 \times \gamma + (\alpha X + \beta X^2)$

• 1 pt : $A P_2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = X^3 \times (\gamma X + \beta) + (\alpha X^2)$

12. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

• 1 pt : $\text{Sp}(T) = \{\alpha\}$ car T triangulaire

• 1 pt : T diagonalisable $\Leftrightarrow T = \alpha I_3 \Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$

• 1 pt : ainsi, φ diagonalisable $\Leftrightarrow A$ est constant
(point accordé pour la bonne gestion des objets)

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

- Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
- On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

- En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

IV. 1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

13. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

- **1 pt :** si $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^n P(x_i) \delta_{i,j} = P(x_j) - P(x_j) = 0$

14. Dédurre de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

- **1 pt :** le polynôme D est de degré au plus n (comme somme de tels polynômes)
- **1 pt :** d'après la question précédente, D admet $n+1 > n$ racines distinctes et est donc le polynôme nul

15. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

- **1 pt :** d'après **14**, la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$
- **1 pt :** de plus, $\text{Card}(L_0, \dots, L_n) = n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$

IV. 2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

16. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

- **1 pt :** $AL_k = BQ_k + R_k$ ainsi $A(x_j)L_k(x_j) = (BQ_k + R_k)(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$
- **1 pt :** $A(x_j)L_k(x_j) = A(x_j)\delta_{k,j} = \begin{cases} A(x_k) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

17. En utilisant **14** en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

- **1 pt :** par **14**, $\varphi(L_k) = \sum_{i=0}^n (\varphi(L_k))(x_i) L_i$
- **1 pt :** $\dots = \sum_{i=0}^n R_k(x_i) L_i = \sum_{i=0}^n A(x_i) \delta_{k,i} L_i = A(x_k) L_k$

18. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

- **1 pt :** comme $L_k \neq 0$ alors L_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $A(x_k)$
- **1 pt :** la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ . On en déduit que φ est diagonalisable

EXERCICE 3 : Étude de séries de pile ou de face / 36

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'événement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série

19. Rappeler (sans le démontrer) les conditions sur x de convergence de la série géométrique $\sum_{k \geq 0} x^k$ et de la série géométrique dérivée deuxième $\sum_{k \geq 1} k x^{k-1}$. On donnera la valeur des sommes de ces séries.

• 1 pt : $\sum_{k \geq 0} x^k$ et $\sum_{k \geq 1} k x^{k-1}$ sont convergentes ssi $x \in]-1, 1[$

• 2 pts : $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k \geq 1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

20. Exprimer l'événement $\{L_1 = k\}$ en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.

• 2 pts : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \{L_1 = k\} = (F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}) \cup (P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1})$

21. Montrer que $\mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 2^{-k}$.

• 1 pt : $\mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = \mathbb{P}(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}) + \mathbb{P}(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1})$

• 1 pt : $= \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) + \mathbb{P}(P_1) \times \dots \times \mathbb{P}(P_k) \times \mathbb{P}(F_{k+1})$ par indépendance

• 1 pt : $= 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

22. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\})$.

• 1 pt : la famille $(\{L_1 = k\})_{k \in \mathbb{N}}$ est un sce donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 1$

• 1 pt : $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\}) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right) = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 1 = 0$

23. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

• 1 pt : L_1 admet une espérance ssi $\sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}(\{L_1 = n\})$ est ACV ce qui revient à démontrer qu'elle CV

• 1 pt : $\sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 0 \times \mathbb{P}(\{L_1 = 0\}) + \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 0 \times 0 + \sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^k$
 $= 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$

• 1 pt : la première série dure en moyenne 2 lancers

Partie II - Étude du nombre de séries

II.1 - Généralités

24. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .

- 1 pt : $N_1(\Omega) = \{1\}$, $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- 1 pt : $\{N_2 = 1\} = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$
- 1 pt : $\mathbb{P}(\{N_2 = 1\}) = \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{2}$
- 1 pt : $\mathbb{P}(\{N_2 = 2\}) = 1 - \mathbb{P}(\{N_2 = 1\}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ car $(\{N_2 = 1\}, \{N_2 = 2\})$ est un sce

25. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

- 2 pts : $N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$
(dont 1 pt pour la qualité des explications)

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

26. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'événements :

$$\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

puis en déduire :

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n)$$

- 2 pts : $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$
Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues et la dernière série débute lors d'un lancer de rang inférieur ou égal à n
- 1 pt : $\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1})$
 $= \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n \mid P_{n+1}) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_{n+1}) \times \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n)$

27. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\})$$

- 1 pt : $\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) = \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1})$
 $+ \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1})$ par FPT
- 1 pt : $\dots = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap F_n)$
 $+ \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap F_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap P_n)$
- 1 pt : $= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) + \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap F_n)) + \frac{1}{2} (\mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap P_n) + \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap F_n))$
 $= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\})$ par FPT

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(\{N_m = k\}) x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_1(x) = x.$$

28. Dédurre de 27 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x)$$

- 1 pt : $G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\}) \right) x^k$
- 0 pt : $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\}) x^k$
 $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\}) x^k$
- 1 pt : $= \frac{1}{2} G_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^{k+1} = \frac{1}{2} G_n(x) + \frac{1}{2} x \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^k$

29. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

- 1 pt : récurrence écrit correctement (dont initialisation)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-1} x$$

- 1 pt : hérédité $G_{n+1}(x) = \frac{x+1}{2} G_n(x) = \frac{x+1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-1} x$

30. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de G'_n , dérivée de la fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

- 1 pt : $G'_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) \times k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^{k-1}$
- 1 pt : $G'_n(1) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(\{N_n = k\}) 1^{k-1} = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(\{N_n = k\}) = \mathbb{E}(N_n)$
- 1 pt : $G'_n(x) = (n-1) \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-2} \frac{1}{2} \times x + \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-1} \times 1$ donc $G'_n(1) = \frac{n+1}{2}$

31. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .

- 1 pt : $G_n(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^{n-1} x = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x (x+1)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)^k (1)^{n-1-k}$
- 1 pt : $= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x^k$
- 1 pt : les polynômes $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} X^k$ et $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X_n = k\}) X^k$ sont égaux et ont donc même coefficients

- 1 pt : finalement, la loi de N_n est donnée par : $\begin{cases} N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{cases}$