

DS4

EXERCICE 1

On considère la fonction $f : t \mapsto 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n , définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n : t \mapsto \frac{e^{-t} t^n}{n!}$$

1. On rappelle qu'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
 - a) Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire son maximum.
 - b) Démontrer : $f_n(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.
 - c) Établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.
2. a) Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est convergente, et vérifier : $\mathbb{R}_+ \subset D$.
 - b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^x dt$ est convergente.
 - c) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
 - d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.
 - e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \frac{1}{n!} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.
 - a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = 1 - \int_0^x f_n(t) dt$.
 - b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de H'_n .
 - c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les limites $\lim_{x \rightarrow 0} (H_n(x))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.
 - d) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n(x))$.
4. Dans la figure 1 (page suivante), on peut visualiser certaines représentations graphiques des fonctions de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dont celle de f_1 et f_5 .
 - a) Lesquelles des courbes $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c, \mathcal{C}_d$ ou $\mathcal{C}_e$ de la figure 1 correspondent respectivement aux représentations graphiques de f_1 et de f_5 ?
 - b) Pouvez-vous faire le lien entre cette figure et certaines propriétés analysées dans les questions précédentes ?
5. a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
 - b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.
 - c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

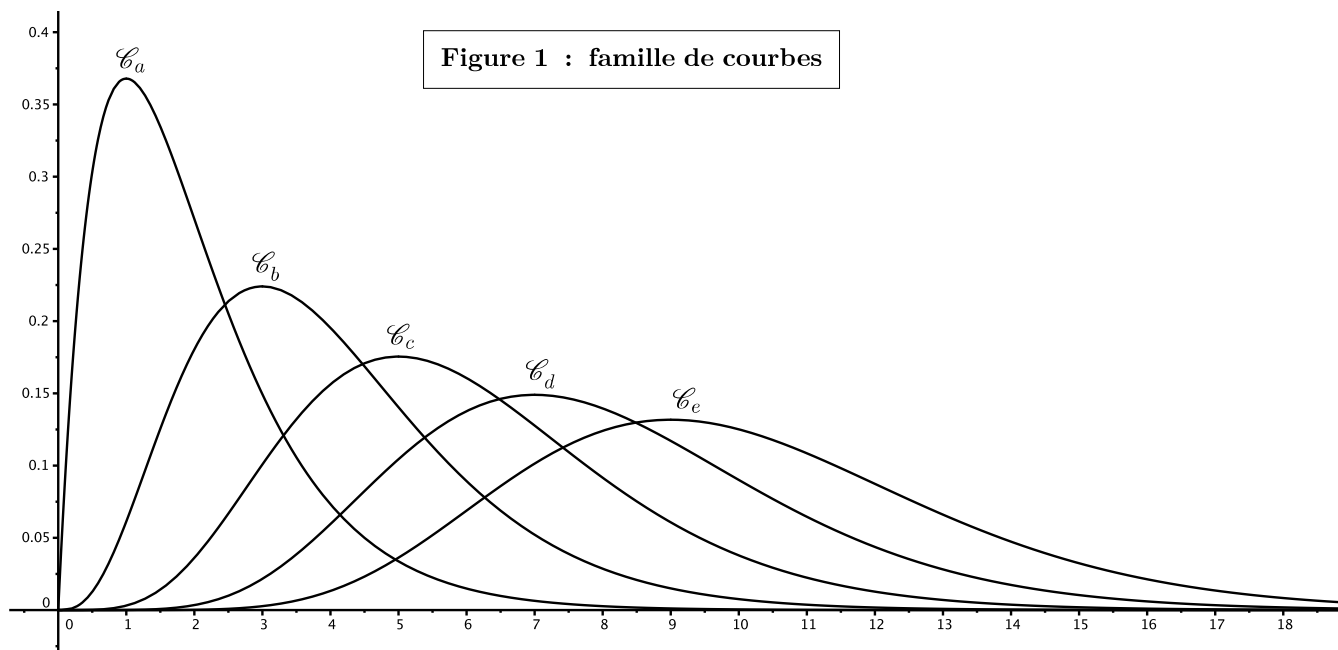


Figure 1 : famille de courbes

EXERCICE 2

Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

- On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V))$$

- Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V .
- Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. **On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B .**
- Par exemple, si l'on suppose :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B , on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

et donc : $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I- Généralités sur l'application φ

- Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
- 6. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

- On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2$$

7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse.
En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1$$

8. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

9. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M .
10. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ .

Partie III - Étude d'un second exemple

- Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
11. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

12. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

- Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
- On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

- En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

IV. 1 - Décomposition avec les polynômes de Lagrange

13. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.
14. Dédurre de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.
15. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV. 2 - Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B .

16. Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.
17. En utilisant 14 en déduire pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.
18. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

EXERCICE 3 : Étude de séries de pile ou de face

Présentation générale

- On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et face avec la probabilité $\frac{1}{2}$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne pile » et par F_k l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer de la pièce donne face ».
- On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
- Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

$$\textbf{Exemple 1 : } \underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$$

$$\textbf{Exemple 2 : } \underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k}_{\text{Série n° 3}}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'événement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'événement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série

19. Rappeler (sans le démontrer) les valeurs x pour lesquelles la série $\sum_{k \geq 0} x^k$ converge et rappeler alors la valeur de la somme de cette série.

Démonstration.

La série $\sum_{k \geq 0} x^k$ est convergente pour tout $x \in]-1, 1[$. De plus :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Commentaire

- La démonstration de cette égalité est élémentaire. Il suffit de remarquer que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{k=0}^N x^k &= \sum_{k=0}^N x^k - \sum_{k=0}^N x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^N x^k - \sum_{k=1}^{N+1} x^k \\ &= \left(x^0 + \cancel{\sum_{k=1}^N x^k} \right) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^N x^k} + x^{N+1} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

- L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ peut être vue comme une généralisation de la notion de polynômes : c'est un polynôme de degré $+\infty$. En déroulant cette idée, on est amené à étudier les séries de fonctions dont la somme est un tel polynôme de degré $+\infty$. Autrement dit les séries de fonctions $\sum f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de la forme $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Une telle série de fonctions possède-t-elle des propriétés particulières ? C'est tout l'enjeu du chapitre sur les **séries entières**. En particulier, on dit d'une fonction f qu'elle est développable en série entière si son expression est de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. Dans cette première question, on rappelle que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière (DSE) sur l'intervalle $] -1, 1[$. Toutes les fonctions ne sont pas développables en séries entières. L'intérêt de ce type de développement est la relative simplicité de l'objet $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et notamment son bon comportement vis-à-vis de certaines opérations telles que la dérivation. □

20. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} k x^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Démonstration.

Soit $x \in]-1, 1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

- L'application $g_N : x \mapsto \sum_{k=0}^N x^k$ est polynomiale (de degré N). Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'_N(x) = \sum_{k=1}^N k x^{k-1}$$

- Par ailleurs : $\forall x \in]-1, 1[, g_N(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$ (l'égalité est en réalité vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

On en déduit, en dérivant cette expression :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=1}^N k x^{k-1} &= \frac{-(N+1) x^N (1-x) - (1-x^{N+1}) (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(N+1) x^N + (N+1) x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

En effet, comme $x \in]-1, 1[$:

- × $\lim_{N \rightarrow +\infty} x^{N+1} = 0$,
- × $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) x^N$ par croissances comparées,
- × $\lim_{N \rightarrow +\infty} (N+1) x^{N+1}$ par croissances comparées.

Ainsi : $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Enfin :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = x \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ainsi : $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Commentaire

On a ici fait une démonstration élémentaire de la convergence de la série $\sum k x^k$. Comme annoncé dans la remarque précédente, ce type d'objets donne lieu à une étude et des résultats spécifiques notamment pour ce qui est de la dérivation (et de l'interversion des symboles $\sum_{k=0}^{+\infty}$ et dérivation). □

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

21. Exprimer l'événement $\{L_1 = k\}$ en fonction des événements P_i et F_i pour $i \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$.

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

L'événement $\{L_1 = k\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ La première série est de longueur k

$\Leftrightarrow$ La première série est de longueur k et constituée uniquement de Face

OU la première série est de longueur k et constituée uniquement de Pile

$\Leftrightarrow$ On a obtenu initialement k Face suivi d'un Pile

OU on a obtenu initialement k Pile suivi d'un Face

$\Leftrightarrow$ L'événement $F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$ est réalisé

OU l'événement $P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $\left(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}\right) \cup \left(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}\right)$ est réalisé

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \{L_1 = k\} = \left(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}\right) \cup \left(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}\right)$$

□

22. Montrer que $\mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 2^{-k}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) \\ = & \mathbb{P}\left(\left(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}\right) \cup \left(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}\right)\right) \\ = & \mathbb{P}\left(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}\right) + \mathbb{P}\left(P_1 \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}\right) && \text{(car les 2 événements considérés sont incompatibles)} \\ = & \mathbb{P}(F_1) \times \dots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) + \mathbb{P}(P_1) \times \dots \times \mathbb{P}(P_k) \times \mathbb{P}(F_{k+1}) && \text{(car les lancers sont indépendants)} \\ = & \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = & \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ = & 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

□

23. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\})$.

Démonstration.

- La famille $(\{L_1 = k\})_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) = 1$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{L_1 = 0\}) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 1 - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0\right) \\ &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 1 \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Finalement : $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\}) = 2 - 2 = 0$.

Commentaire

On démontre ici que la probabilité que la première chaîne soit de longueur infinie est nulle. Pour ce faire, on se sert du système complet d'événements $(\{L_1 = k\})_{k \in \mathbb{N}}$. Il est aussi possible de faire une démonstration directe en remarquant :

$$\{L_1 = 0\} = \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right)$$

Par incompatibilité, on en déduit alors :

$$\mathbb{P}(\{L_1 = 0\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right)$$

Or, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N F_k\right)$$

Et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N F_k\right) &= \prod_{k=1}^N \mathbb{P}(F_k) && \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 && \text{(car } \frac{1}{2} \in]-1, 1[) \end{aligned}$$

De la même manière : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} P_k\right) = 0$ ce qui permet bien de conclure : $\mathbb{P}(\{L_1 = 0\}) = 0$.

□

24. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Démonstration.

- La variable aléatoire L_1 admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} n \mathbb{P}(\{L_1 = n\})$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) &= 0 \times \mathbb{P}(\{L_1 = 0\}) + \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(\{L_1 = k\}) \\
 &= 0 \times 0 + \sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^k && (d'après la question ??) \\
 &= 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^k && (car 0 \times 0 = 0 \times 1) \\
 &= \sum_{k=0}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} && (en appliquant la question ?? à x = \frac{1}{2}) \\
 &= \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\cancel{2}}} = 2
 \end{aligned}$$

On en conclut que L_1 admet une espérance et $\mathbb{E}(L_1) = 2$.

Ainsi, la première série dure en moyenne 2 lancers.

Commentaire

L'existence de l'espérance ou de la variance d'une variable aléatoire discrète est une question classique des sujets de concours d'écoles de commerce. En CPGE scientifiques, le programme contient des outils spécifiques comme la sommabilité (chapitre à venir) qui amènent souvent à des présentations différentes. □

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'événement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

25. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .

Démonstration.

- La variable aléatoire N_1 prend pour valeur le nombre de séries apparues en 1 lancer. En 1 lancer, il apparaît exactement 1 série.

Ainsi $N_1(\Omega) = \{1\}$ et N_1 est donc la variable aléatoire certaine égale à 1.

- La variable aléatoire N_2 prend pour valeur le nombre de séries apparues en 2 lancers.
En 2 lancers, il peut apparaître :
 - × exactement 1 série. C'est le cas par exemple du 2-lancer (P, P) .
 - × exactement 2 séries. C'est le cas par exemple du 2-lancer (P, F) .

$$\text{Ainsi } N_2(\Omega) = \{1, 2\}.$$

De plus :

L'événement $\{N_2 = 1\}$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ Lors des 2 premiers lancers, 1 seule série apparaît

$\Leftrightarrow$ Lors des 2 premiers lancers, on obtient une série de Pile

OU lors des 2 premiers lancers, on obtient une série de Face

$\Leftrightarrow$ Lors des 2 premiers lancers, on obtient deux Pile

OU lors des 2 premiers lancers, on obtient deux Face

$\Leftrightarrow$ L'événement $P_1 \cap P_2$ est réalisé

OU l'événement $F_1 \cap F_2$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'événement $(P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$ est réalisé

$$\{N_2 = 1\} = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{N_2 = 1\}) &= \mathbb{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{P}(\{N_2 = 1\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

De plus comme la famille $(\{N_2 = 1\}, \{N_2 = 2\})$ est un système complet d'événements, alors :

$$\mathbb{P}(\{N_2 = 1\}) + \mathbb{P}(\{N_2 = 2\}) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Finalement : } \mathbb{P}(\{N_2 = 2\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{N_2 = 1\}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \\ \text{Autrement dit : } N_2 &\sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket). \end{aligned}$$

□

26. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

Démonstration.

Lors des n premiers lancers, il peut apparaître :

- × 1 seule série. C'est notamment réalisé par le n -lancer (Pile, ..., Pile).
- × exactement 2 séries. C'est notamment réalisé par le n -lancer (Face, Pile, ..., Pile).
- × exactement 3 séries. C'est notamment réalisé par le n -lancer (Pile, Face, Pile, ..., Pile).
- × ...
- × exactement n séries. C'est le cas si le n -lancer est une alternance de Pile et de Face.

Ainsi : $N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

□

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

27. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Justifier que l'on a l'égalité d'événements :

$$\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$$

puis en déduire :

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n)$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

L'événement $\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé

⇔ Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues

ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

⇔ Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues et la dernière série n'apparaît pas lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer (sinon les lancers n et $n+1$ seraient différents)

ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

⇔ Lors des $n+1$ premiers lancers, exactement k séries sont apparues et la dernière série débute lors d'un lancer de rang inférieur ou égal à n

ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

⇔ Lors des n premiers lancers, exactement k séries sont apparues

ET lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

ET lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer, on obtient Pile

⇔ L'événement $\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé

Ainsi : $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1} = \{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}$.

• Ensuite :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\
 = & \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\
 = & \mathbb{P}(P_{n+1} \mid \{N_n = k\} \cap P_n) \times \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) \quad (\text{par définition de la probabilité conditionnelle}) \\
 = & \mathbb{P}(P_{n+1}) \times \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) \quad (\text{car les événements } \{N_n = k\} \cap P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont} \\
 & \text{indépendants puisque le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ lancer est} \\
 & \text{indépendant de tous les précédents}) \\
 = & \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n)
 \end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n)$$

□

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ les relations :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1}) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap F_n) \\
 \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1}) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap P_n) \\
 \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap F_n)
 \end{aligned}$$

28. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ la relation :

$$\mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\})$$

Commentaire

Dans l'énoncé, il est signalé que la famille $(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$ est un système complet d'événements. On peut le démontrer :

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & P_n \cap P_{n+1} \cup F_n \cap F_{n+1} \cup F_n \cap P_{n+1} \cup P_n \cap F_{n+1} \\
 = & P_n \cap P_{n+1} \cup F_n \cap P_{n+1} \cup F_n \cap F_{n+1} \cup P_n \cap F_{n+1} \quad (\text{par commutativité de } \cup) \\
 = & (P_n \cap P_{n+1} \cup F_n \cap P_{n+1}) \cup (F_n \cap F_{n+1} \cup P_n \cap F_{n+1}) \quad (\text{par associativité}) \\
 = & ((P_n \cup F_n) \cap P_{n+1}) \cup ((F_n \cup P_n) \cap F_{n+1}) \quad (\text{par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup) \\
 = & (\Omega \cap P_{n+1}) \cup (\Omega \cap F_{n+1}) = P_{n+1} \cup F_{n+1} = \Omega
 \end{aligned}$$

(ii) Les événements de cette famille sont deux à deux incompatibles.

Traitons l'un des 6 cas (les autres se traitent de manière similaire) :

$$(P_n \cap P_{n+1}) \cap (F_n \cap P_{n+1}) = (P_n \cap F_n) \cap (P_{n+1} \cap P_{n+1}) = \emptyset \cap (P_{n+1} \cap P_{n+1}) = \emptyset$$

Démonstration.

Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

- La famille $(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) &= \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\
 &\quad + \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap F_{n+1}) \\
 &\quad + \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap F_n \cap P_{n+1}) \\
 &\quad + \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\} \cap P_n \cap F_{n+1}) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap F_n) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap F_n) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap P_n) \\
 &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) + \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap F_n)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap P_n) + \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap F_n)) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\})
 \end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en remarquant que la famille (F_n, P_n) est un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\{N_n = k\}) = \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap P_n) + \mathbb{P}(\{N_n = k\} \cap F_n)$$

$$\text{De même : } \mathbb{P}(\{N_n = k-1\}) = \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap P_n) + \mathbb{P}(\{N_n = k-1\} \cap F_n).$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\})$$

Commentaire

- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-questions. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives et plus le sujet est difficile. Ainsi, un même thème peut amener à un traitement différent s'il est abordé dans un sujet de type **CCINP** ou de type **Centrale**.
- Dans les sujets, on distingue grossièrement trois types de questions :
 - (1) des questions abordables qui sont traitées par un grand nombre de candidats. Il peut s'agir de questions de cours ou de questions classiques (qui reviennent fréquemment aux concours).
 - (2) des questions plus difficiles qui permettent de bien classer les candidats. Celles-ci ont un rôle fort pour le classement des candidats car sont abordées avec plus ou moins de succès.
 - (3) des questions très difficiles qui ne sont bien traitées par presque aucun candidat.

Dans les sujets les plus abordables, on trouve essentiellement des questions de type 1) et 2). Dans les sujets de plus haut niveau, on trouve les trois types de questions, avec un pourcentage élevé de questions de type 2). C'est d'ailleurs essentiellement sur ces questions que se font les différences et en aucun cas les questions de type 3).

Commentaire

- Un sujet actuel comporte environ 40 questions. Pour finir un sujet, un candidat ne dispose donc que d'environ 6 minutes pour traiter chaque question. Il ne faut pas s'inquiéter pour autant car les barèmes permettent de rebattre les cartes. En effet, pour obtenir 20, il n'est pas obligatoire d'obtenir tous les points du sujet. Un candidat qui obtient 50% des points d'un sujet est assuré d'obtenir une très bonne note (≥ 14). Évidemment, ce constat doit être modulé en fonction des années et des épreuves. Lorsqu'un sujet est bien réussi en moyenne, le barème sera plus sévère dans le sens où il faudra cumuler beaucoup plus de points pour obtenir la même note que dans un sujet mal réussi en moyenne.
Cette considération sur la taille des sujets et la distinction précédente permettent d'éclairer sur la stratégie à adopter lors des concours :
 - il est essentiel de savoir repérer la difficulté d'une question. Ce n'est pas chose aisée car cela requiert d'avoir du recul.
 - il est essentiel de savoir traiter la majorité des questions de type (1).
 - il est important de réussir à traiter correctement des questions de type (2). C'est sur le bon traitement de ces questions que se joue le classement.
 - pour les questions de type (3) (ou les questions de type (2) les plus difficiles), il faut garder en tête que plus une question est difficile, plus le correcteur est indulgent avec les candidats qui s'y aventurent. On peut donc aborder ces questions avec l'idée que tout ce qu'un candidat écrit de juste sera retenu en sa faveur (quelques points accordés). Mais tenter de traiter ces questions en entier est une perte de temps préjudiciable : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi.

En résumé, il faut aborder en priorité les questions de type (1) et (2) et les traiter en entier. Il ne faut surtout pas abandonner une question que l'on sait traiter. L'important est de maximiser le nombre de questions que l'on traite entièrement. En revanche, il ne faut pas hésiter à passer ou ne pas traiter en entier (on signalera alors au correcteur qu'on ne sait pas comment conclure) les questions les plus difficiles.

- Le début de question 28 ne présente pas de difficulté méthodologique puisque l'énoncé détaille avec précision la démarche à suivre : il s'agit d'appliquer la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements fourni. Il n'y a aucune compétence en mathématique requise pour savoir traiter ce début de question. Ne pas savoir le faire ne démontre pas un défaut de qualité dans la matière mais un défaut d'apprentissage du cours.

Profitons-en pour rappeler que si :

- × $A \in \mathcal{A}$ est un événement,
- × la famille $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements,

alors, par formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i)$

En particulier, si le système complet d'événements considéré est constitué :

- × de m événements, alors la FPT produit une somme de m termes.
- × de 2 événements, alors la FPT produit une somme de 2 termes.
- × d'une infinité d'événements ($I = \mathbb{N}$ par exemple), alors la FPT produit une somme d'une infinité de termes.
- Dans la question, on applique cette formule à $A = \{N_{n+1} = k\}$ avec $I = \{1, 2, 3, 4\}$ et enfin $B_1 = P_n \cap P_{n+1}$, $B_2 = F_n \cap F_{n+1}$, $B_3 = F_n \cap P_{n+1}$, $B_4 = P_n \cap F_{n+1}$. □

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(\{N_m = k\}) x^k$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_1(x) = x$$

29. Dédurre de 28 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_{n+1} = k\}) x^k && \text{(par définition)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\}) \right) x^k && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\}) x^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(\{N_n = k-1\}) x^k && \text{(car } \mathbb{P}(\{N_n = n+1\}) = 0 \text{ puisque } N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket) \\ &= \frac{1}{2} G_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^{k+1} && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= \frac{1}{2} G_n(x) + \frac{1}{2} x \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^k && \text{(car } \mathbb{P}(\{N_n = 0\}) = 0 \text{ puisque } N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket) \end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \frac{1}{2} G_n(x) + \frac{1}{2} x G_n(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x)$.

□

30. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-1} x$.

► **Initialisation :**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

× D'une part : $G_1(x) = x$.

× D'autre part : $\left(\frac{x+1}{2} \right)^{1-1} x = x$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, G_{n+1}(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^n x$).

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \frac{x+1}{2} G_n(x) && (d'après la question précédente) \\ &= \frac{x+1}{2} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1} x && (par hypothèse de récurrence) \\ &= \left(\frac{x+1}{2}\right)^n x \end{aligned}$$

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1} x$. □

31. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de G'_n , dérivée de la fonction génératrice G_n . En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .

Démonstration.

- La fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{N_n = k\}) \times k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(\{N_n = k\}) x^{k-1}$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$G'_n(1) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(\{N_n = k\}) 1^{k-1} = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(\{N_n = k\}) = \mathbb{E}(N_n)$$

$$\mathbb{E}(N_n) = G'_n(1)$$

- Déterminons alors G'_n à l'aide de l'expression obtenue dans la question précédente.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} G'_1(x) = 1 \\ \forall n \geq 2, G'_n(x) = (n-1) \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{2} \times x + \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-1} \times 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 2$:

$$G'_n(1) = (n-1) \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} \frac{1}{2} + \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

Cette formule est aussi vérifiée pour $n = 1$ (en effet : $G'_1(1) = 1$ et $\frac{1+1}{2} = 1$).

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(N_n) = G'_n(1) = \frac{n+1}{2}$. □

32. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question 30 :

$$\begin{aligned}
 G_n(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^{n-1} x \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x (x+1)^{n-1} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)^k (1)^{n-1-k} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} \quad (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x^k
 \end{aligned}$$

- Or, par définition : $G_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X_n = k\}) x^k$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x^k = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X_n = k\}) x^k$$

L'égalité en tout point des fonctions $x \mapsto \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X_n = k\}) x^k$ et $x \mapsto \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} x^k$ démontre que les polynômes $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} X^k$ et $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{X_n = k\}) X^k$ sont égaux. Ils ont donc même coefficients.

Finalement, la loi de N_n est donnée par : $\begin{cases} N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(\{X_n = k\}) = \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{cases}$

□