

DS6

EXERCICE 1 (/12)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note : $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}$.

Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

- 1 pt : A est symétrique RÉELLE donc est diagonalisable
- 1 pt : $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)(X-2) - (-1)(-1) = (X-2)^2 - 1^2 = (X-3)(X-1)$
- 0 pt : ainsi $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$

2. Montrer que 0 est valeur propre de B et donner la dimension de l'espace propre associé.

- 1 pt : $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. B est non inversible car a deux colonnes égales. Ainsi $0 \in \text{Sp}(B)$
- 1 pt : $\text{rg}(B) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}(A) = 2$
- 1 pt : $\dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = \dim(\text{Im}(B)) + \dim(\text{Ker}(B))$ ainsi $\dim(\text{Ker}(B)) = \dim(E_0(B)) = 4 - 2 = 2$

3. Soit λ une valeur propre de A et soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à λ .

Exhiber un vecteur propre de B .

- 1 pt : notons $Y = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ alors : $BY = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + 2AX \\ AX + 2AX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(\lambda \cdot X) \\ 3(\lambda \cdot X) \end{pmatrix} = 3\lambda \cdot Y$

4. Démontrer que la matrice B est diagonalisable.

- 1 pt : d'après ce qui précède, $\text{Sp}(B) \supset \{0, 3, 9\}$
- 1 pt : $\sum_{\mu \in \text{Sp}(B)} \dim(E_\mu(B)) \leq 4$, comme $\dim(E_\mu(B)) \geq 1$ et $\dim(E_0(B)) = 2$, $\dim(E_3(B)) = 1$ et $\dim(E_9(B)) = 1$
- 1 pt : $\dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = \dim(E_0(B)) + \dim(E_3(B)) + \dim(E_9(B))$ donc B est diagonalisable

Cas où A est diagonalisable

On suppose dans cette partie que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable qui possède n valeurs propres distinctes.

5. En s'inspirant de l'étude précédente, démontrer que la matrice B est diagonalisable.

- 1 pt : $\text{Sp}(B) \supset \{3\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\} \cup \{0\}$
- 0 pt : $\dim(E_0(B)) = 2n - \text{rg}(A)$
- 1 pt : si $0 \notin \text{Sp}(A)$ alors $\text{rg}(A) = n$ et $\dim(E_0(B)) = 0$ et toutes les autres valeurs propres de B sont d'espace propre de dimension 1. On obtient : $\dim(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})) = \sum_{\mu \in \text{Sp}(B)} \dim(E_\mu(B))$ et donc B est diagonalisable
- 1 pt : si $0 \in \text{Sp}(A)$ alors $\text{rg}(A) = n - 1$ et $\dim(E_0(B)) = n + 1$. De même, les $n - 1$ valeurs propres de A restantes fournissent $n - 1$ valeurs propres distinctes de B qui sont toutes de sep de dimension 1

PROBLÈME 1 (/50)

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$.

6. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : l'application $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, en tant que composition de l'application polynomiale $t \mapsto -t(1-itx)$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, et de l'application exponentielle, continue sur $\mathbb{C}$
- 1 pt : $|e^{-t(1-itx)}| = |e^{-t}| |e^{-it^2x}| = e^{-t}$
- 0 pt : $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $1 > 0$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

7. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p .

- 1 pt : $|t^p e^{-t}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ou $|t^p e^{-t}| = o\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)$
- 1 pt : mise en place correcte du théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives
- 1 pt : $\int_0^{+\infty} t^{p+1} e^{-t} dt = [-t^{p+1} e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-t})(p+1)t^p dt$
- 0 pt : $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^{p+1} e^{-a} = 0$ et $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p$.

8. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p .

- 1 pt : $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p = \dots = (p+1) \times \dots \times 1 \Gamma_0$ (récurrence plus propre mais pas obligatoire vu que le résultat n'est pas donné dans l'énoncé)
- 1 pt : $\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1$

9. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $(x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.

- 2 pts :

Caractère $\mathcal{C}^k$ - étude « en x »

 - × 1 pt : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $u_t : x \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$
 - × 1 pt : $u_t^{(k)}(x) = (it^2)^k e^{-t} e^{it^2x}$
- 3 pts :

Intégrabilité - étude « en t »

 - × 1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $t \mapsto (it^2)^j e^{-t} e^{it^2x}$ intégrable sur $[0, +\infty[$.
En effet : $|(it^2)^j e^{-t} e^{it^2x}| = |(it^2)^j| |e^{-t} e^{it^2x}| = t^{2j} e^{-t}$
 - × 1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto (it^2)^k e^{-t} e^{it^2x}$ est c. p. m. sur $[0, +\infty[$
 - × 1 pt : $|(it^2)^k e^{-t} e^{it^2x}| = t^{2k} e^{-t} \leq t^{2k} e^{-t}$ et $\psi : t \mapsto t^{2k} e^{-t}$ intégrable sur $[0, +\infty[$

10. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

- 1 pt : $\forall p \in \mathbb{N}, \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!} \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t} dt = \frac{i^p}{p!} \Gamma_{2p} = i^p \frac{(2p)!}{p!}$

• 1 pt :
$$\frac{\left| \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} \right|}{\left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right|} = \frac{(2(p+1))!}{(p+1)!} \times \frac{p!}{(2p)!} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 4p \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- 1 pt : on en déduit $R = 0$ et f n'est donc pas développable en série entière en 0 (sinon, au voisinage de 0, f serait égale à la somme de cette série entière qui diverge)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$.

11. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $(x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.
pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $g_k : x \mapsto e^{-k(1-ikx)}$

- 2 pts : Caractère $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$:

× 1 pt : pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$

× 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2 x}$

- 2 pts : Convergences successives

× 1 pt : pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\sum g_k^{(j)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

En effet, pour tout x , la série numérique $\sum |g_k^{(j)}(x)|$ est convergente

× 1 pt : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|g_k^{(p)}\|_{\infty} = k^{2p} e^{-k}$ et la série $\sum \|g_k^{(p)}\|_{\infty}$ converge par comparaison à la série de Riemann d'exposant 2

× 0 pt : $g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2 x}$

12. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}, |g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p}$.

• 1 pt : $|g^{(p)}(0)| = \left| i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = |i|^p \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right|$

• 1 pt : $|g^{(p)}(0)| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} = p^{2p} e^{-p} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{+\infty} k^{2p} e^{-k}}_{\geq 0} \geq p^{2p} e^{-p}$

13. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière en 0 ?

- 1 pt : $a_p = |g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p} = b_p$ ainsi $R_a \leq R_b$

• 1 pt :
$$\frac{\left| \frac{(p+1)^{2(p+1)} e^{-(p+1)}}{(p+1)!} \right|}{\left| \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} \right|} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{2p} (p+1) e^{-1} \geq p e^{-1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ donc } R_a \leq R_b = 0$$

- 1 pt : g n'est donc pas développable en série entière en 0 (sinon, au voisinage de 0, g serait égale à la somme de cette série entière qui diverge)

Partie II – Le théorème de Borel

14. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}$.

- 1 pt : identification menée correctement

- **1 pt** : $a = \frac{1}{2i}$ et $b = -\frac{1}{2i}$

15. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \frac{1}{x-i}$.

Montrer par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$.

- **1 pt** : ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en tant qu'inverse d'une application polynomiale qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
- **1 pt** : initialisation
- **1 pt** : **H** : $\psi^{(p+1)}(x) = (\psi^{(p)})'(x) = (-1)^p p! \times \left(-\frac{p+1}{(x-i)^{p+2}} \right) = (-1)^{p+1} (p+1)! \times \frac{1}{(x-i)^{p+1+1}}$

16. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée $p^{\text{ème}}$ de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- **1 pt** : de même, $\forall p \in \mathbb{N}$, la dérivée p -ième de $x \mapsto \frac{1}{x+i}$ est $x \mapsto \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}$
- **1 pt** : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}$

17. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.

En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$.

- **1 pt** : $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| = |2i \operatorname{Im}((x+i)^{p+1})| \leq 2|(x+i)^{p+1}| = 2|x+i|^{p+1} = 2(\sqrt{x^2+1})^{p+1}$
- **1 pt** : $\left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| = \frac{p!}{2} \times \frac{|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}|}{(x^2+1)^{p+1}} = p! \times \frac{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}$
- **1 pt** : $\frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} \leq \frac{p!}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}$

18. Pour tout réel α , notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$.

Montrer : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, |\alpha| \times \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$.

- **1 pt** : cas $\alpha = 0$
- **1 pt** : $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$ donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| = \left| \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x) \right|$
- **1 pt** : $\forall p \in \mathbb{N}, |\alpha| \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq |\alpha|^{p+1} \times \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^2}$$

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!} a_n$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout entier $n \geq p$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

- **1 pt** : $u_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f_n^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$
- **0 pt** : $a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$

20. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

- 1 pt : cas $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ alors $u_n^{(p)}(0) = 0$
- 1 pt : si $p = n$, le terme de la somme correspondant à $k = p = n$ est $n! \varphi_{\alpha_n}(0) = n!$ quand $x = 0$. De plus, les autres termes sont nuls

21. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout réel x :

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n$$

- 1 pt : $\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} |a_n| \cdot \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right|$
- 1 pt : $|a_n| \times \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| = \frac{1}{\sqrt{n!}} |\alpha_n| \times \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}}$
- 1 pt : $\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (p-k)! = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}$

22. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : $\forall n \geq p+1, 0 \leq \|u_n^{(p)}\|_{\infty, [a,b]} \leq \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$
- 1 pt : $\frac{\frac{p! 2^{n+1} |a|^{n-p}}{((n+1)!)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2|a|}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$ donc par d'Alembert, $\sum \|u_n^{(p)}\|_{\infty, [a,b]}$ converge
- 1 pt : la somme $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même de $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (on ajoute une somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$)

23. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geq 1 : U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

- 1 pt : $U(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0) = u_0(0) = a_0$
- 1 pt : $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^p u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$

24. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

- 1 pt : on cherche (a_n) telle que
$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = u'_0(0) + 1!a_1, \\ b_2 = u''_0(0) + u'_1(0) + 2!a_2, \\ \vdots \\ \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b_p = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p \end{cases}$$
- 1 pt : $\begin{cases} a_0 = b_0, \\ \alpha_0 = a_0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = a_0 \varphi_{\alpha_0}(x), \end{cases} \quad \text{puis : } \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \begin{cases} a_p = \frac{1}{p!} \left(b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) \right), \\ \alpha_p = \sqrt[p]{p!} a_p, \\ \forall x \in \mathbb{R}, u_p(x) = a_p x^p \varphi_{\alpha_p}(x). \end{cases}$

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX^e siècle.

PROBLÈME 2 (/54)

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé à pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X = j\}) t^j$$

Partie I - Temps d'arrivée du $n^{\text{ème}}$ client

25. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.

Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{T_1 = k\}) = (1-p)^{k-1} p$.

$T_1 \sim \mathcal{G}(p)$ car :

- 1 pt : l'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p
- 1 pt : T_1 prend pour valeur le rang d'obtention du premier succès

26. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».

Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{P}(A)$. Interpréter.

• 1 pt : $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{T_1 = k\}} = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{T_1 = k\}}$

• 1 pt : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{T_1 = k\}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} \{T_1 = k\}\right) = 1 - 1$

- 1 pt : le client d'indice 1 arrive dans la file en un temps fini de manière presque sûre (c'est-à-dire avec probabilité 1)

On met aussi 3 points si on raisonne à l'aide de : $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \{X_k = 0\}$

27. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1 puis calculer sa somme.

• 1 pt : $\left| \frac{\mathbb{P}(\{T_1 = j+1\})}{\mathbb{P}(\{T_1 = j\})} \right| = \frac{p(1-p)^j}{p(1-p)^{j-1}} = 1-p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1-p$ donc $R_{cv} \left(\sum \mathbb{P}(\{T_1 = j\}) t^j \right) = \frac{1}{1-p}$

• 1 pt : $G_{T_1}(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{T_1 = j\}) t^j = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{T_1 = j\}) t^j p t = \sum_{j=0}^{+\infty} ((1-p)t)^j = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

28. En déduire l'espérance et la variance de T_1 .

- 1 pt : $\mathbb{E}(T_1) = G'_{T_1}(1)$ et $\mathbb{V}(T_1) = G''_{T_1}(1) + G'_{T_1}(1) - (G'_{T_1}(1))^2$
- 1 pt : $G'_{T_1}(t) = \frac{p}{(1 - (1-p)t)^2}$
- 1 pt : $G''_{T_1}(t) = -2p(1 - (1-p)t)^{-3}(- (1-p)) = \frac{2p(1-p)}{(1 - (1-p)t)^3}$
- 1 pt : $\mathbb{E}(T_1) = \frac{p}{(1 - (1-p) \times 1)^2} = \frac{1}{p}$; $\mathbb{V}(T_1) = \frac{2p(1-p)}{(1 - (1-p) \times 1)^3} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

29. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n . On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.

On note $D_n = T_1 + \dots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n . Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n .

- 0 pt : D_n est de variance finie en tant que somme de v.a. de variances finies
- 1 pt : $\mathbb{E}(D_n) = \mathbb{E}(T_1 + \dots + T_n) = \mathbb{E}(T_1) + \dots + \mathbb{E}(T_n) = \frac{n}{p}$
- 1 pt : $\mathbb{V}(D_n) = \mathbb{V}(T_1 + \dots + T_n) = \mathbb{V}(T_1) + \dots + \mathbb{V}(T_n) = n \times \mathbb{V}(T_1) = \frac{n(1-p)}{p^2}$ (indépendance !)
- 1 pt : $G_{D_n}(t) = G_{T_1+\dots+T_n}(t) = \mathbb{E}(t^{T_1+\dots+T_n}) = \mathbb{E}(t^{T_1} \times \dots \times t^{T_n}) = \mathbb{E}(t^{T_1}) \times \dots \times \mathbb{E}(t^{T_n}) = (G_{T_1}(t))^n$

30. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de $x=0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}(\{D_n = k\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1 pt : $\forall x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-(k-1))}{k!} x^k$
- 1 pt : $G_{D_n}(t) = (pt)^n (1-(1-p)t)^{-n} = \left((pt)^n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(n+(k-1)) \dots (n+2)(n+1)n}{k!} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} p^n (1-p)^k t^{k+n} \right)$
- 1 pt : $= (pt)^n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\cancel{n} + ((k-\cancel{n})-1))!}{(n-1)!(k-n)!} p^n (1-p)^{k-n} t^{(k-\cancel{n})+\cancel{n}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} t^k$
- 1 pt : par unicité du DSE : $\mathbb{P}(\{D_n = k\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon} \end{cases}$

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in]0, 1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = f(z_n)$$

31. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0, 1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

- 1 pt : par réc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: $z_n \in]0, 1[$ et $z_{n+1} - z_n$ du même signe que $z_2 - z_1$
- 3 pts :
 - × 1 pt : $0 < z_n < 1$ donc $e^{-a} < z_{n+1} < 1$
 - × 1 pt : si $z_2 - z_1 < 0$ alors $z_{n+1} - z_n < 0$ donc $\exp(a(z_{n+1} - 1)) < \exp(a(z_n - 1))$
 - × 1 pt : si $z_2 - z_1 \geq 0$ alors $z_{n+1} \geq z_n$ et $z_{n+2} \geq z_{n+1}$

32. En déduire que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

- 1 pt : si $z_2 - z_1 < 0$ alors la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente
- 1 pt : comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \in]0, 1[$ alors $\ell \in [0, 1]$
- 0 pt : de même pour $z_2 - z_1 \geq 0$
- 1 pt : comme f continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n)$

33. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) - a(x - 1) \end{cases}$.

Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leq \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leq x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

- 1 pt : $0 \leq \psi(x) \Leftrightarrow 0 \leq \ln(x) - a(x - 1) \Leftrightarrow a(x - 1) \leq \ln(x) \Leftrightarrow e^{a(x-1)} \leq e^{\ln(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq x$
- 1 pt : $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - a(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = a(x - 1)e^{\ln(x)} = e^{a(x-1)} \Leftrightarrow x = f(x)$
- Ainsi : $\forall x \in]0, 1[, \psi(x) < 0$

34. On suppose dans cette question que $a \leq 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire : $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

- 1 pt : $\forall x \in]0, 1[, \ln(x) < x - 1$
- 0 pt : si $x \in]0, 1[, \text{comme } 0 < a \leq 1, a(x - 1) < x - 1 \text{ donc } \ln(x) < x - 1 < a(x - 1)$
- 1 pt : $\forall x > 0, \psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ et comme (z_n) converge vers ℓ , point fixe de f , elle converge vers 1, unique point d'annulation de ψ

35. On suppose dans cette question que $a > 1$.

Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0, 1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.

En distinguant les cas $z_1 \in]0, \alpha]$ et $z_1 \in [\alpha, 1[$, montrer que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

- 1 pt :

x	0	$\frac{1}{a}$	1
Signe de $\psi'(x)$		+	-
Variations de ψ		$-\ln(a) + a - 1$ 	0

- 1 pt : ψ est continue et strict. croissante sur $]0, \frac{1}{a}]$ donc réalise une bijection de $]0, \frac{1}{a}]$ sur $f(]0, \frac{1}{a}]) =]-\infty, -\ln(a) + a - 1]$
- 1 pt : en raisonnant de manière similaire, ψ réalise une bijection de $[\frac{1}{a}, 1]$ sur $[\psi(a), \psi(1)] = [-\ln(a) + a - 1, 0]$

- 0 pt : f admet deux points fixes sur $]0, 1]$: $\alpha \in]0, \frac{1}{a}]$ et 1
- 1 pt : si $z_1 \in]0, \alpha]$ alors $]0, \alpha]$ est stable par f donc $\ell \in [0, \alpha]$ et (z_n) converge vers α , unique point fixe de cet intervalle
- 1 pt : si $z_1 \in [\alpha, 1[$, l'intervalle $[\alpha, 1[$ est stable par f donc $\ell \in [\alpha, 1]$. Comme (z_n) décroissante, $z_n \leq z_1$ donc $\ell \leq z_1 < 1$ donc $\ell = \alpha$, unique point fixe de $[\alpha, z_1]$

II.2 - Groupe de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client. Comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi. Par récurrence, pour tout $k \geq 2$, on définit les clients du $k^{\text{ème}}$ groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)^{\text{ème}}$ groupe étaient servis.

Pour tout $k \geq 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du $k^{\text{ème}}$ groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le $n^{\text{ème}}$ groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geq n$.

36. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$.

- 1 pt : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$ est réalisé SSI l'un (au moins) des groupes de clients est vide
- 1 pt : l'év. Z est réalisé si et seulement si il existe un instant où la file est vide

37. Quelle est la loi du nombre N_n du clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[1, n]$?

- 1 pt : l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre de succès p
- 1 pt : N_n prend pour valeur le nombre de succès de cette expérience
- 0 pt : donc $N_n \sim \mathcal{B}(n, p)$

38. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(\{V_1 = k\} \mid \{S = n\})$.

En déduire que V_1 suite une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

- 1 pt : Si ..., c'est que Dans ce cas ...
- 1 pt : la loi conditionnelle de la variable V_1 sachant l'événement $\{S = n\}$ est la loi de la variable N_n c'est-à-dire la loi binomiale de paramètre (n, p)
- 1 pt : $\mathbb{P}(\{V_1 = k\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{V_1 = k\} \cap \{S = n\}) = \dots = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\{V_1 = k\} \mid \{S = n\}) \times \mathbb{P}(\{S = n\})$
- 2 pts : $\mathbb{P}(\{V_1 = k\}) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \cancel{e^{-\lambda}} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \times \cancel{e^{-\lambda p}} e^{-\lambda p}$

39. On note $z_n = \mathbb{P}(\{V_n = 0\})$. Montrer que (z_n) converge et que $\mathbb{P}(Z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$.

- 1 pt : $\{V_n = 0\} \subset \{V_{n+1} = 0\}$ comme précisé dans présentation Partie II.2

- 1 pt : ainsi, (z_n) est croissante et majorée par 1 donc convergente

- 1 pt : $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{V_n = 0\}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N \{V_n = 0\}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{V_N = 0\}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} z_N$

40. Justifier que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(\{V_{n+1} = 0\} \mid \{V_1 = j\}) = \left(\mathbb{P}(\{V_n = 0\})\right)^j$.

On distinguera le cas $j = 0$.

- 1 pt : si $j = 0$, $\mathbb{P}(\{V_{n+1} = 0\} \mid \{V_1 = 0\}) = 1$
En effet, si $\{V_1 = 0\}$ est réalisé c'est que le premier groupe ne contient pas de clients. Dans ce cas, tous les groupes (et donc le $n + 1$) suivants sont vides
- 2 pts : si $j \neq 0$, on attend essentiellement que le candidat mette en avant l'idée d'un traitement en parallèle des clients par les j files créées successivement lors de l'arrivée de chacun des clients du groupe 1

Lors du traitement du client d'indice 0, on ouvre un guichet à chaque fois qu'un nouveau client se présente. Ce client devient alors un « client d'indice 0 » d'une nouvelle file. Comme il y a j clients dans le groupe 1, on crée ainsi j nouvelles files en plus de la file qui ne contient que le client d'indice 0 (on ferme cette file dès la fin de traitement de ce client). On est alors confronté à j files (et seulement j files car on n'en crée plus d'autres par la suite) qui agissent chacune comme la file décrite dans l'énoncé. Chacune possède un réservoir infini de clients et pour chaque file, il y a une probabilité p qu'un nouveau client s'insère.

Les clients du groupe 2 de la modélisation initiale sont les clients qui s'insèrent dans la file lors du temps de service d'un des j clients du groupe 1. Dans la nouvelle modélisation, ce sont donc les clients qui s'insèrent dans l'une des j nouvelles files pendant le temps de traitement du client qui a ouvert la file

41. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

- 1 pt : $\mathbb{P}(\{V_{n+1} = 0\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{V_{n+1} = 0\} \cap \{V_1 = k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{V_{n+1} = 0\} \mid \{V_1 = k\}) \times \mathbb{P}(\{V_1 = k\})$
- 1 pt : $= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(\{V_n = 0\})\right)^k \times \mathbb{P}(\{V_1 = k\})$
- 1 pt : $= \sum_{k=0}^{+\infty} z_n^k \times \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} = e^{-\lambda p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p z_n)^k}{k!} = e^{-\lambda p} e^{\lambda p z_n} = e^{\lambda p(z_n - 1)}$

42. Déterminer, suivant les valeurs de λp , la limite de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Interpréter.

- 1 pt : $z_1 = \mathbb{P}(\{V_1 = 0\}) = \frac{(\lambda p)^0}{0!} e^{-\lambda p} = e^{-\lambda p} \in]0, 1[$
- 1 pt : n est dans le cadre d'utilisation des questions 34 et 35. Plus précisément :
 - × si $\lambda p \leq 1$ alors on peut en conclure $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
 - × si $\lambda p > 1$ alors on peut en conclure $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \in]0, 1[$.