

## DS7

### Exercice 1

#### Intégrale de Wallis et intégrale de Gauss

On définit :  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ .

1. Étudier la monotonie de la suite  $(W_n)$ .
2. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ .
3. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ .
4. En déduire :  $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

On note  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  et  $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

5. Justifier l'existence de  $I$ .
6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la fonction :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$$

Montrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I$ .

7. En utilisant le changement de variable  $x = \sqrt{n} \sin(u)$ , après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

8. En déduire la valeur de  $I$  puis de  $J$ .

#### Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{II.1}$$

9. Déterminer les solutions développables en série entière de (II.1) sur  $\mathbb{R}[X]$ .
10. Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée  $S$ , telle que  $S(0) = 1$ .

On définit :  $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$ .

11. Montrer que  $G$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
12. Montrer que  $G$  est solution de (II.1) sur  $\mathbb{R}$ .
13. Montrer que  $G = S$ .

## Exercice 2

### Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes. On note  $D_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par  $M^\top$  la transposée d'une matrice  $M$ .

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  aux matrices colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On désignera par  $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|$ , en posant pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^n$  où par définition, pour tout  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ .

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on note  $\rho(M)$  le réel défini par :  $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$ .

On note par ailleurs  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et par  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On se propose de montrer que l'application  $N$  donnée sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$N : A \mapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et d'en étudier quelques propriétés.

### I - Étude de l'application $N$

Dans toute cette partie, on considère  $A$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont on note  $L_1, L_2, \dots, L_n$  les  $n$  lignes et  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les  $n$  colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de  $\mathbb{R}^n$ .

14. Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|X\| = 1$ . En notant  $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|$ , montrer :

$$\|AX\| \leq M\sqrt{n}$$

On pourra au préalable s'intéresser à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $AX$  et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

15. En déduire que l'application  $N$  est bien définie, puis :  $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$ .

16. Montrer que l'application  $N$  ainsi définie est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

17. En est-il de même pour l'application

$$\begin{array}{ccc} S & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ M & \mapsto & \rho(M) \end{array} \quad ?$$

18. Soit  $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$  dont on note  $\delta_1, \dots, \delta_n$  les termes diagonaux.

Vérifier :  $N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$ .

19. À l'aide de l'application  $X \mapsto \|AX\|$ , démontrer :  $N(A) = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$ .

20. Établir :  $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| \leq N(A) \times \|X\|$ .

21. Soit  $B$  une autre matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer :

$$N(AB) \leq N(A) \times N(B)$$

22. Montrer :  $\max_{1 \leq i \leq n} \|C_i\| \leq N(A)$ .

23. Déterminer  $N(A)$  dans le cas où toutes les colonnes de  $A$  sont nulles, sauf la dernière.

En déduire  $N(A)$  dans le cas où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## II - Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie,  $A$  désigne une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $U$  une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

24. Déterminer  $N(U)$ .

25. Démontrer que  $N(UA)$  et  $N(A)$  sont égales.

26. En considérant  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  où  $\|X_0\| = 1$  tel que  $\|AX_0\| = N(A)$ , démontrer :  $N(AU) = N(A)$ .

27. On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice  $A$  est une matrice symétrique réelle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer :  $N(A) = \rho(A)$ .

28. Déterminer  $N(A)$  dans le cas où  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 3

### Approximation de $\sqrt{2}$ via la méthode de Héron d'Alexandrie

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . On définit la suite  $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left( c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) \end{cases}$$

29. Montrer, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n(a)$  est bien défini et que  $c_n(a) > 0$ .

30. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donner une expression de  $c_{n+1}(a)^2 - a$  faisant intervenir  $(c_n(a)^2 - a)^2$ .

En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $c_n(a) \geq \sqrt{a}$ .

31. Montrer que  $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{a}$ .

32. Calculer  $c_1(2)$ . À l'aide de la question 30, montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$$

En déduire :

$$\sqrt{2} = c_n(2) + O_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$$

### Racine carrée d'une matrice symétrique positive

On note  $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques appartenant à  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{O}(q)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices  $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  vérifiant  $P^T P = I_q$ .

On note  $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire des matrices  $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$  vérifiant  $X^T M X \geq 0$  pour toute matrice colonne  $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ .

Étant donnée une matrice  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ , on appelle racine carrée de  $M$  toute matrice  $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = M$ .

## A - Racines carrées de la matrice $I_2$

33. Rappeler sans démonstration la description des matrices de  $O(2)$ .  
On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre  $\theta \in \mathbb{R}$ .
34. Déterminer les racines carrées de  $I_2$  appartenant à  $O(2)$ .  
Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de  $I_2$  ?

## B - Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive

35. Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.
36. Soit  $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ . Déterminer une matrice  $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = M$ .
37. Montrer que  $B$  est la seule racine carrée de  $M$  appartenant à  $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ .  
On note alors  $\sqrt{M}$  l'unique racine carrée symétrique positive de  $M$ .

## Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle

Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et pour tous  $1 \leq i, j \leq q$ , on note  $[M]_{i,j}$  le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $M$ .

Pour  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{K}$ , on note  $\text{diag}(a_1, \dots, a_q)$  la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  telle que, pour tous  $1 \leq i, j \leq q$  :

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On munit l'ensemble  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  d'une norme  $\|\cdot\|$ . On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  ne dépend pas du choix de la norme  $\|\cdot\|$ .

On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants :  
pour toute suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ,

- la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $M$  si et seulement si, pour tous  $1 \leq i, j \leq q$ , la suite  $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[M]_{i,j}$  ;
- si  $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  et si la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $M$ , alors les suites  $(AM_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(M_n A)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $AM$  et  $MA$ .

Soit  $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  les valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité.  
On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice  $P \in O(q)$  telle que :

$$M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^T$$

On rappelle de plus que, pour tout réel  $a \geq 0$ , la suite  $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  définie en début d'exercice, est à valeurs strictement positives et converge vers  $\sqrt{a}$ . On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2} (M_n + M M_n^{-1}) \end{cases}$$

38. Montrer, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n$  est bien définie et :

$$M_n = P \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T$$

39. En déduire que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\sqrt{M}$ .