

DS7

Exercice 1

Intégrale de Wallis et intégrale de Gauss

On définit : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

1. Étudier la monotonie de la suite (W_n) .

- 1 pt : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(t) \geq 0$ donc $0 \leq (\cos(t))^{n+1} \leq (\cos(t))^n$ car $(\cos(t))^n \geq 0$.
- 1 pt : par croissance de l'intégrale $W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt = W_n$

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$.

- 1 pt : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt = \left[\sin(t) (\cos(t))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (-\sin(t)) \sin(t) dt$
- 1 pt : $(\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

- 1 pt : $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^0 dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^1 dt = \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ d'où $\mathcal{P}(0)$
- 1 pt : $(n+2) W_{n+2} W_{n+1} = ((n+2) W_{n+2}) \times W_{n+1} = ((n+1) W_n) \times W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

4. En déduire : $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

- 1 pt : (W_n) étant décroissante : $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$
- 1 pt : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt > 0$ car $h_n : t \mapsto (\cos(t))^n$ strict. positive et $\mathcal{C}^0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$
- 0 pt : $\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{W_n}{W_n}$
- 1 pt : d'après la question 2, $\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\frac{W_n}{W_n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$
- 1 pt : $n (W_n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \times W_n \times W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

5. Justifier l'existence de I .

- 1 pt : $t \mapsto e^{-t^2}$ continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ impropre en $+\infty$.
- 1 pt : $|e^{-t^2}| = e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$ et théorème de comparaison correct

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$$

Montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I.$

Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) .

• 2 pts : Existence d'une limite finie - étude « en n »

× 1 pt : pour n suffisamment grand ($t_0 \leq \sqrt{n}$ cad $n \geq \lfloor t_0^2 \rfloor + 1$) : $f_n(t_0) = \left(1 - \frac{t_0^2}{n}\right)^n$

× 1 pt : $n \ln \left(1 - \frac{t_0^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cancel{\text{r}} \times \frac{-t_0^2}{\cancel{\text{r}}} \text{ donc } \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t_0^2}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-t_0^2}$

• 0 pt : $u : t \mapsto e^{-t_0^2}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$

• 2 pts : Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

× 1 pt : $|f_n(t)| = \left| \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t) \times \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right| \leq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$

× 1 pt : par inégalité de convexité : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ donc $0 \leq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$

• 0 pt : par TCD, u intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

7. En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin(u)$, après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

• 1 pt : $\psi : u \mapsto \sqrt{n} \sin(u)$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et strict. croissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$

• 1 pt : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{(\sqrt{n} \sin(u))^2}{n}\right)^n \times \sqrt{n} \cos(u) du$

• 0 pt : $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cancel{\text{r}}(\sin(u))^2}{\cancel{\text{r}}}\right)^n \cos(u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos(u))^2)^n \cos(u) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2n+1} du$

8. En déduire la valeur de I puis de J .

• 1 pt : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cancel{\text{r}}\sqrt{n}}{2\cancel{\text{r}}\sqrt{n}} \sqrt{\pi}$

• 1 pt : $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

• 1 pt : comme $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, I et J sont de même nature et $J = 2I = \sqrt{\pi}$

Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par : $xy'' + y' + xy = 0$.

9. Déterminer les solutions développables en série entière de (II.1) sur $\mathbb{R}$.

• 4 pts : analyse

- × 1 pt : f DSE donc il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $R > 0$ telle que $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
 f est la somme d'une série entière donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et par th de dérivation sous le symbole somme pour les séries entières, f' et f'' DSE sur $]-R, R[$
- × 1 pt : pour tout $x \in]-R, R[, xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(n)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+1)a_{n+1} + a_{n-1})x^n$
- × 1 pt : par unicité du DSE $\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases}$
- × 1 pt : par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2^n \times n!)^2} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$

• 2 pts : synthèse

- × 1 pt : notons $f : x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x_0) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x_0^{2n}$
- × 1 pt : $\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| = \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)} ((n+1)!)^2} a_0 x_0^{2(n+1)} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0 x_0^{2n} \right|} = \frac{|(-1)^{n+1}|}{2^{2(n+1)} ((n+1)!)^2} \frac{2^{2n} (n!)^2}{|(-1)^n|} \frac{|a_0|}{|a_0|} \frac{|x_0|^{2n+2}}{|x_0|^{2n}} = \frac{1}{2^2 (n+1)^2} |x_0|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$ donc pour tout x_0 , la série numérique $\sum u_n(x_0)$ CV
- × 0 pt : ainsi l'ensemble des solutions DSE est $\text{Vect}(g)$ où $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$

10. Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée S , telle que $S(0) = 1$.

- 1 pt : si S est une solution DSE, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \lambda g(x)$
- 0 pt : $S(0) = \lambda g(0)$ et $g(0) = \frac{(-1)^0}{2^0 (0!)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} 0^{2n} = 1$ donc $\lambda = 1$

On définit : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$.

11. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

• 2 pts : Caractère $\mathcal{C}^2$ - étude « en x »

- × 1 pt : pour tout $t_0 \in [0, \pi], h_{t_0} : x \mapsto \cos(\sin(t_0) x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
- × 1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_{t_0}'(x) = -\sin(\sin(t_0) x) \times \sin(t_0) = -\sin(t_0) \sin(\sin(t_0) x)$$

$$h_{t_0}''(x) = -\sin(t_0) \cos(\sin(t_0) x) \times \sin(t_0) = -(\sin(t_0))^2 \cos(\sin(t_0) x)$$

- 3 pts : Intégrabilité (par domination) - étude « en t »
 - × 1 pt : **Intégrabilité (sans forcément dominer)**
 $t \mapsto \underline{h}_t(x) = \cos(x \sin(t))$ et $t \mapsto \underline{h}_t'(x) = -\sin(t) \sin(x \sin(t))$ intégrables sur $[0, \pi]$ car continues sur le SEGMENT $[0, \pi]$
 - × 2 pts : **Intégrabilité par domination**
 - ▶ 1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t'(x) = -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t))$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, \pi]$
 - ▶ 1 pt : $\left| -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)) \right| = |\sin(t)|^2 |\cos(x \sin(t))| \leq 1 \times 1$

12. Montrer que G est solution de (II.1) sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : en regroupant $x G''(x)$ et $x G(x)$, on obtient : $x G''(x) + G'(x) + x G(x)$
 $= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t) \times (x \cos(t)) \cos(x \sin(t)) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$
- 1 pt : $\int_0^\pi \cos(t) \times (x \cos(t)) \cos(x \sin(t)) dt = [\cos(t) \sin(x \sin(t))]_0^\pi + \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$
 $= \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$ (car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$)

13. Montrer : $G = S$.

- 1 pt : G est solution de (II.1) et vérifie $G(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(0 \times \sin(t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 dt = 1$
- 1 pt : $\cos$ DSE et $\forall u \in \mathbb{R}, \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$
donc $G(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n}$
- 1 pt : Intégrabilité sur un segment
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le SEGMENT $[0, \pi]$.
- 2 pts : Convergence uniforme (par convergence normale)
 - × 1 pt : $|f_n(t)| = \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} \right| = \frac{1}{(2n)!} |\sin(t)|^{2n} \leq \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}$
 - × 1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|f_n\|_{\infty, [0, \pi]} \leq \frac{1}{n!}$ et théorème de comparaison des SATP

Exercice 2

Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I - Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

14. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|$, montrer :

$$\|AX\| \leq M\sqrt{n}$$

On pourra au préalable s'intéresser à la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- **1 pt** : $\|AX\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((AX)_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \times x_j \right)^2}$
- **1 pt** : si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \times x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n (x_j)^2 \right) = \|L_i\|^2 \times \|X\|^2 = \|L_i\|^2 \leq M^2$
- **1 pt** : $\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \times x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n M^2 = n \times M^2$

15. En déduire que l'application N est bien définie, puis : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

- **1 pt** : $\{\|AX\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$ est un ensemble de réels non vide et majoré

- **1 pt** : si $\|X\| = 1$

$$\|AX\| = \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$$

Ainsi, $\sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$ est un majorant de l'ensemble $\{\|AX\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$.

Il est donc plus grand que le plus petit des majorants : $\sup_{\|X\|=1} \|AX\| \leq \sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$

- **2 pts** : si $\|X_0\| \neq 0$

$$\times \text{ 1 pt : } \left\| \frac{X_0}{\|X_0\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|X_0\|} \right| \|X_0\| = \frac{1}{\|X_0\|} \|X_0\| = 1$$

$$\times \text{ 1 pt : } \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} = \frac{1}{\|X_0\|} \|AX_0\| = \left\| \frac{1}{\|X_0\|} \cdot AX_0 \right\| = \left\| A \frac{X_0}{\|X_0\|} \right\| \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

16. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- **1 pt** : $N(\lambda \cdot A) = \sup \left\{ |\lambda| \times \|AX\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \right\} = |\lambda| \times \sup \{ \cdot \} = |\lambda| \times N(A)$

- **1 pt** : si $Y_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : 0 \leq \|AY_j\| \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = N(A) = 0$

pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi : $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

- **1 pt** : $\|(A+B)X\| = \|AX + BX\| \leq \|AX\| + \|BX\| \leq N(A) + N(B)$

17. En est-il de même pour l'application $S : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $M \mapsto \rho(M)$?

- **1 pt** : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ et donc $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda| = \max \{0\} = 0$.

Or $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Donc ρ n'est pas une norme.

18. Soit $\Delta \in \text{D}_n(\mathbb{R})$ dont on note $\delta_1, \dots, \delta_n$ les termes diagonaux.

Vérifier : $N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$.

- **2 pts** : démontrons $N(\Delta) \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$. On suppose $\|X\| = 1$.

$$\times \text{ 1 pt : } \|\Delta X\|^2 = \langle \Delta X, \Delta X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \delta_1 x_1 \\ \vdots \\ \delta_n x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1 x_1 \\ \vdots \\ \delta_n x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n (\delta_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 x_i^2$$

$$\times \text{ 1 pt : } \|\Delta X\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 x_i^2 \right) = \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 \times \sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2$$

$$\times \text{ 0 pt : } \|\Delta\| = \sup \{ \|\Delta X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \} \leq \max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j|$$

$$\bullet \text{ 2 pts : démontrons } N(\Delta) \geq \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$$

$$\times \text{ 1 pt : notons } i_0 \text{ l'entier tel que : } |\delta_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j|$$

$$\times \text{ 1 pt : comme } \|Y_{i_0}\| = 1, \text{ alors } |\delta_{i_0}| = \|\Delta Y_{i_0}\| \leq \sup_{\|X\|=1} \|\Delta X\| = N(\Delta)$$

19. À l'aide de l'application $X \mapsto \|AX\|$, démontrer : $N(A) = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$.

• 1 pt : $f_A : X \mapsto \|AX\|$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ comme composée de fonctions continues (norme + application linéaire)

• 1 pt : l'ensemble $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\| = 1\}$ est fermé ($S = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$) et borné ($S \subset B_f(0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}, 1)$)

20. Établir : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| \leq N(A) \times \|X\|$.

• 1 pt : si $X = 0_{\mathbb{R}^n}$, $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $\|AX\| = 0$ donc $\|AX\| = 0 \leq 0 = N(A) \times \|X\|$

• 1 pt : si $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\frac{1}{\|X\|} \|AX\| = \left\| \frac{1}{\|X\|} AX \right\| = \left\| A \frac{X}{\|X\|} \right\| \leq \sup_{U \in S} \|AU\| = N(A)$

21. Soit B une autre matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$N(AB) \leq N(A) \times N(B)$$

• 1 pt : $\|(AB)X\| = \|A(BX)\| \leq N(A) \times \|BX\| \leq N(A) \times (N(B) \times \|X\|) = N(A) \times N(B)$

• 1 pt : en prenant $X \in S$, $N(A) \times N(B)$ est un majorant de l'ensemble $\{\|(AB)X\| \mid \|X\| = 1\}$

22. Montrer : $\max_{1 \leq i \leq n} \|C_i\| \leq N(A)$.

• 1 pt : $A Y_j = C_j$ et comme $\|Y_j\| = 1$ alors $\|C_j\| = \|A Y_j\| \leq N(A)$

23. Déterminer $N(A)$ dans le cas où toutes les colonnes de A sont nulles, sauf la dernière.

$$\text{En déduire } N(A) \text{ dans le cas où } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• 1 pt : $\|C_n\| \leq N(A)$ d'après la question précédente

• 1 pt : si $\|X\| \neq 0$, $AX = (a_{1,n}x_n, \dots, a_{n,n}x_n)$ et donc $\|AX\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{i,n}x_n)^2} = \sqrt{x_n^2 \sum_{i=1}^n a_{i,n}^2}$
donc $\|AX\| = |x_n| \times \|C_n\| \leq \|C_n\| \|X\|$ donc $N(A) \leq \|C_n\|$

• 1 pt : $N(A) = \|C_n\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

II - Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$.

24. Déterminer $N(U)$.

• 1 pt : comme $U \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\|UX\| = \|X\|$ donc $N(U) = 1$

25. Démontrer que $N(UA)$ et $N(A)$ sont égales.

• 1 pt : comme $U \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\|U(AX)\| = \|AX\|$ donc $N(UA) = N(A)$

26. En considérant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ où $\|X_0\| = 1$ tel que $\|AX_0\| = N(A)$, démontrer : $N(AU) = N(A)$.

- 1 pt : on note $Y_0 = U^{-1}X_0$ alors $\|Y_0\| = 1$ et $N(AU) \geq \|AU Y_0\| = \|AX_0\| = N(A)$
- 1 pt : $\|AUX\| \leq N(A) \times \|UX\| = N(A) \times \|X\| = N(A)$

27. On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $N(A) = \rho(A)$.

- 1 pt : par théorème spectral $A = U\Delta U^T$
- 1 pt : par 25-26, $N(A) = N(U\Delta U^T) = N(\Delta U^T) = N(\Delta)$
- 1 pt : par 18, $N(A) = \rho(A)$

28. Déterminer $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 0 pt : d'après la question précédente, A est symétrique réelle donc $N(A) = \rho(A)$
- 1 pt : $1 \in \text{Sp}(A)$ (car $A - I_3 = (1)_{1 \leq i, j \leq 3}$ non inversible)
- 1 pt : $E_1(A) = \dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 3 - \text{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1$
- 1 pt : comme A diagonalisable, A est semblable à une matrice dont les 2 premiers coefficients diagonaux sont 1 et le dernier noté λ . Comme tr est invariant par similitude : $\text{tr}(A) = 6 = 1 + 1 + \lambda$ donc $\lambda = 4$
- 0 pt : $\rho(A) = \max(|0|, |4|) = 4$

Exercice 3

Approximation de $\sqrt{2}$ via la méthode de Héron d'Alexandrie

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) \end{cases}$$

29. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.

- 1 pt : $\mathcal{P}(n)$: $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$
- 1 pt : initialisation
- 1 pt : hérédité

30. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2 - a)^2$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $c_n(a) \geq \sqrt{a}$.

- 1 pt : $c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{1}{4} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right)^2 - a = \frac{1}{4} \left(c_n(a)^2 + 2a + \frac{a^2}{c_n(a)^2} \right) - a = \frac{1}{4} \left(c_n(a)^2 - 2a + \frac{a^2}{c_n(a)^2} \right)$
- 1 pt : $c_{n+1}(a)^2 - a = \frac{1}{4} \left(c_n(a) - \frac{a}{c_n(a)} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c_n(a)} (c_n(a)^2 - a) \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{c_n(a)^2} (c_n(a)^2 - a)^2$
- 1 pt : donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $c_{m+1}(a)^2 - a \geq 0$

31. Montrer que $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

- 1 pt : $c_{n+1}(a) - c_n(a) = \frac{1}{2} \left(-c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a - c_n(a)^2}{c_n(a)} \right) \leq 0$

- 1 pt : la suite est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers $\ell \geq \sqrt{a}$
- 1 pt : par unicité de la limite $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right)$ et donc $\ell = \sqrt{a}$

32. Calculer $c_1(2)$. À l'aide de la question 30, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$$

En déduire :

$$\sqrt{2} = c_n(2) + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$$

- 1 pt : $c_1(2) = \frac{3}{2}$ (calcul)
- 2 pts : par récurrence
- × 1 pt : initialisation

$$\times 1 \text{ pt : } c_{n+1}(2)^2 - 2 = \frac{1}{4 c_n(2)^2} (c_n(2)^2 - 2)^2 \leq \frac{1}{4 c_n(2)^2} \left(8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)^2 \leq \frac{1}{4 (\sqrt{2})^2} \left(8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^n} \right)$$

- 1 pt : $0 \leq c_n(2)^2 - 2 = (c_n(2) - \sqrt{2})(c_n(2) + \sqrt{2}) \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$ puis $\times \frac{1}{c_n(2) + \sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq 1$

Racine carrée d'une matrice symétrique positive

A - Racines carrées de la matrice I_2

33. Rappeler sans démonstration la description des matrices de $O(2)$.

On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.

- 1 pt : $O(2)$ contient les matrices de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- et de symétrie $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

34. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $O(2)$.

Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?

- 2 pts :
- × 1 pt : $R(\theta) R(\theta) = R(2\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$
- × 1 pt : $R(\theta)^2 = I_2 \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 1 \text{ et } \sin(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi] \text{ et } \theta \equiv 0[\frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \theta \equiv 0[\pi]$
donc $R(\theta) = \pm I_2$
- 1 pt : $S(\theta)^2 = I_2$ donc toute matrice $S(\theta)$ est une racine carrée de I_2
- 1 pt : on en déduit qu'il y a une infinité de racines carrées de I_2

B - Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive

35. Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.

- 1 pt : si $A \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ alors $A \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

36. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

- 1 pt : si $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ alors, par théorème spectral, $M = P \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) P^{-1}$ avec $\delta_i \geq 0$

- **2 pts** : $B = P \operatorname{diag}(\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n}) P^{-1}$ est tel que :
 - × **1 pt** : $B^2 = P (\operatorname{diag}(\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n}))^2 P^{-1} = P \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) P^{-1} = M$
 - × **1 pt** : $P (\operatorname{diag}(\sqrt{\delta_1}, \dots, \sqrt{\delta_n})) P^{-1}$ est symétrique (puisque $P^T = P$) et $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ car $\operatorname{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$

37. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

- **1 pt** : ...

On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M .

Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$.

On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants : pour toute suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$,

- la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous $1 \leq i, j \leq q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$;
- si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M , alors les suites $(AM_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n A)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA .

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité.

On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O(q)$ telle que :

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^T$$

On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geq 0$, la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ définie en début d'exercice, est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2} (M_n + M M_n^{-1}) \end{cases}$$

38. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et :

$$M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T$$

- **3 pts** : par récurrence

- × **1 pt** : **initialisation** $\operatorname{diag}(c_0(\lambda_1), \dots, c_0(\lambda_q)) = I_q$ et $M_0 = P I_q P^T = I_q$
- × **2 pts** : **hérédité** : $c_n(\lambda_j) > 0$ donc $M_n = P \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T$ est inversible et M_{n+1} est bien définie

$$\begin{aligned} M M_n^{-1} &= P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^T \times P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T \\ &= P \operatorname{diag}\left(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T = P \operatorname{diag}(c_{n+1}(\lambda_1), \dots, c_{n+1}(\lambda_q)) P^T \end{aligned}$$

39. En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

- **1 pt** : $M_n = P D_n P^T \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P D P^T$ avec $D = \operatorname{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))$
- **1 pt** : car $N \mapsto P N P^{-1}$ est continue puisque linéaire en dimension finie