

DS7

Exercice 1

Intégrale de Wallis et intégrale de Gauss

On définit : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

1. Étudier la monotonie de la suite (W_n) .

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(t) \geq 0$.
On en déduit, par produit de termes positifs : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], (\cos(t))^n \geq 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leq \cos(t) \leq 1$$

$$\text{donc : } \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leq (\cos(t))^{n+1} \leq (\cos(t))^n \quad (\text{en multipliant de part et d'autre par } (\cos(t))^n \geq 0)$$

Finalement, par croissance de l'intégrale sur un segment, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt = W_n$$

On a démontré : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi, la suite (W_n) est décroissante.

Commentaire

- Dans certains sujets, on trouve la définition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$$

En réalité, ces deux définitions sont les mêmes. Pour le démontrer, il suffit de poser le changement de variable affine $\boxed{u = \frac{\pi}{2} - t}$.

$$\left| \begin{array}{ll} u = \frac{\pi}{2} - t & \text{donc } t = \frac{\pi}{2} - u \quad (\text{on note alors } \psi : u \mapsto \frac{\pi}{2} - u) \\ & \hookrightarrow dt = -du \\ \\ \bullet \quad t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ \bullet \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0 \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \right)^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^n du$$

□

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$.

Démonstration.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times (\cos(t))^{n+1} dt$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = (\cos(t))^{n+1} \quad u'(t) = (n+1) (\cos(t))^n (-\sin(t)) \\ v'(t) = \cos(t) \quad v(t) = \sin(t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt \\ &= \left[\sin(t) (\cos(t))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (-\sin(t)) \sin(t) dt \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (\sin(t))^2 dt \quad (\text{car } \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } \sin(0) = 0) \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (1 - (\cos(t))^2) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt \\ &= (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2} \end{aligned}$$

On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$ ou encore : $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : (n+1) W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2}$.

► **Initialisation :**

Calculons :

$$\times W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\times W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^1 dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

On en conclut :

$$(0+1) W_{0+1} W_0 = W_1 W_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $(n+2) W_{n+2} W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$).

$$\begin{aligned} (n+2) W_{n+2} W_{n+1} &= ((n+2) W_{n+2}) \times W_{n+1} \\ &= ((n+1) W_n) \times W_{n+1} && (d'après la question précédente) \\ &= (n+1) W_n W_{n+1} \\ &= \frac{\pi}{2} && (par hypothèse de récurrence) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

□

4. En déduire : $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord : $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (W_n) étant décroissante :

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n \tag{1}$$

- Par ailleurs, la fonction $h_n : t \mapsto (\cos(t))^n$ étant :

× strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,

× continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$,

alors, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t) dt > 0$$

- On en déduit alors, en multipliant (1) par $\frac{1}{W_n} > 0$:

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq \frac{W_n}{W_n}$$

Or :

$$\times \text{ d'après la question 2, } \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\times \frac{W_n}{W_n} = 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, par théorème d'encadrement : $\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Cela démontre : $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$.

- On en déduit :

$$(n+1) \times W_n \times W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times W_n \times W_n$$

Ainsi :

$$n (W_n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \times W_n \times W_{n+1} = \frac{\pi}{2} \quad (d'après la question 2)$$

$$\text{Finalement : } (W_n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

Comme les termes de la suite (W_n) sont positifs, on obtient, en appliquant la fonction racine :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

□

On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

5. Justifier l'existence de I .

Démonstration.

- L'application $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est impropre seulement en $+\infty$.

- $\forall t \in [0, +\infty[, e^{-t^2} \geq 0$ et $e^{-t} \geq 0$

$$\times |e^{-t^2}| = e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t})$$

En effet : $\frac{e^{-t^2}}{e^{-t}} = e^{-t^2+t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (par composition de limites).

$\times$ L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $1 > 0$.

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est (absolument) convergente.

Le réel I est donc bien défini.

□

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$$

$$\text{Montrer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = I.$$

Démonstration.

- Il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite **de fonctions** (f_n) .

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

- Soit $t_0 \in [0, +\infty[$.

Pour n suffisamment grand :

$$f_n(t_0) = \left(1 - \frac{t_0^2}{n}\right)^n \quad (2)$$

Il suffit pour cela de choisir n vérifiant : $n \geq t_0^2$. En effet, dans ce cas : $t_0 \leq \sqrt{n}$.

Plus précisément, on peut noter : $n_0 = \lfloor t_0^2 \rfloor + 1$. L'égalité (2) est alors vérifiée pour tout $n \geq n_0$. Par ailleurs :

$$n \ln \left(1 - \frac{t_0^2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \textcolor{red}{n} \times \frac{-t_0^2}{\textcolor{red}{n}}$$

Finalement, par composition de limites :

$$f_n(t_0) = \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t_0^2}{n}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t_0^2}$$

Cela démontre que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $u : t \mapsto e^{-t^2}$.

- La fonction $u : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Remarquons tout d'abord que pour tout $t \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= \left| \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t) \times \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right| \\ &= \left| \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t) \right| \times \left| \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right| \\ &\leq \left| \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right| \quad (\text{car } \left| \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t) \right| = \mathbb{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t) \leq 1) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Or, par inégalité de convexité : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$. En appliquant ce résultat en $x = \frac{-t^2}{n} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 + \left(\frac{-t^2}{n}\right) \leq e^{-\frac{t^2}{n}} \\ \text{donc } 0^n &\leq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{t^2}{n}}\right)^n \quad (\text{car la fonction élévation à la puissance } n \text{ est croissante sur } [0, +\infty[) \\ \text{donc } 0 &\leq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq e^{-t^2}}$$

et la fonction $u : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (démontré en question 5).

Cette inégalité démontre au passage que la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction u est intégrable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} u(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = I$$

On en conclut finalement :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{[0, \sqrt{n}]}(t) \times \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

7. En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin(u)$, après avoir justifié qu'il est licite, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons le changement de variable $\psi : u \mapsto \sqrt{n} \sin(u)$. La fonction ψ est :
 × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\psi'(u) = \sqrt{n} \cos(u)$.
 × une bijection strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$.

Le changement de variable est donc licite. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{(\psi(u))^2}{n}\right)^n \times \psi'(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{(\sqrt{n} \sin(u))^2}{n}\right)^n \times \sqrt{n} \cos(u) du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{(\sin(u))^2}{1}\right)^n \cos(u) du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos(u))^2)^n \cos(u) du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u))^{2n+1} du \end{aligned}$$

$$\text{On a bien démontré : } \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

Commentaire

- La présentation de ce changement de variable est un peu déroutante : si on considère que l'intégrale initiale est celle en la variable x , un changement de variable s'écrit généralement sous la forme $u = \varphi(x)$. On peut alors envisager de considérer que l'intégrale initiale est celle en la variable u . La difficulté de cette approche est qu'il faut alors réussir à obtenir du en fonction de dx . Pour ce faire, on commence généralement par inverser ce changement de variable et comprendre qu'il établit la relation : $u = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$. Alors :

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{n}} dx$$

Commentaire

- Cette étape d'inversion du changement de variable explique pourquoi il est recommandé (mais non nécessaire) d'effectuer des changements de variables bijectifs. Cela permet à la fois de s'assurer du caractère licite de l'inversion et aussi d'obtenir une seule possibilité pour les bornes d'intégration.
- Cette discussion n'existe que parce que, dans les sujets, les changements de variable sont posés de manière pratique sous la forme : $u = \varphi(x)$ c'est-à-dire sous la forme d'une égalité qui lie la variable cible u et la variable initiale x . En réalité, un changement de variable est une fonction ψ (si on reprend la présentation précédente, c'est celle qui apparaît lorsqu'on « inverse » d'exprimer x en fonction de u). Sous les hypothèses :

× $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur l'intervalle I ,

× ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J = [\alpha, \beta]$ telle que $\psi([\alpha, \beta]) \subseteq I$,

on peut alors écrire :

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \psi)(t) \psi'(t) dt$$

Ce résultat, valable dans le cas des intégrales de fonctions continues sur un segment, n'exige pas le caractère bijectif de la fonction ψ considérée. Les bornes de l'intégrale initiale sont des éléments de l'image de ψ . Celle de l'intégrale résultat sont des antécédents (s'il y en a plusieurs, on peut choisir n'importe lequel) de ces images.

- En conclusion, l'hypothèse de bijectivité, parfois présentée, provient essentiellement de la manière dont on présente les changements de variables. En exprimant la variable cible en fonction de la variable d'intégration actuelle, on ne fait pas apparaître la fonction ψ mais plutôt sa réciproque (pour peu que ψ soit bijective).
- Dans l'énoncé, on fait un choix intermédiaire puisque, même si l'on ne prétend pas présenter le changement de variable sous forme d'une fonction, on écrit la variable initiale en fonction de la variable cible, faisant dès lors apparaître la fonction ψ .
- On peut enfin noter que l'aspect bijectif joue aussi un rôle pratique lorsque l'on travaille sur des intégrales généralisées. Dans ce cas, les bornes de l'intégrale initiale ne sont pas nécessairement finies et elles ne peuvent donc pas forcément s'écrire sous la forme $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$. Pour se prémunir d'une telle écriture et d'une discussion sur le fait que les bornes initiales puissent être atteinte par ψ , le programme officiel préfère considérer le cas d'une fonction :

$$\psi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$$

où a et b sont les bornes de l'intégrale de départ et α et β celles d'arrivée. Le caractère bijectif et strictement croissant (on obtient des bornes dans l'autre sens dans le cas strictement décroissant) assure que $a = \lim_{t \rightarrow \alpha} \psi(t)$ et $b = \lim_{t \rightarrow \beta} \psi(t)$. C'est essentiellement à cela que sert cette hypothèse : faire le lien entre a et α ainsi qu'entre b et β . On obtient alors un théorème qui s'écrit simplement mais dont l'utilisation est un peu pénible.

- Pour clore cette discussion, notons que le programme officiel stipule que l'on peut utiliser la technique du changement de variable sur les intégrales généralisées sans aucune justification dès lors que le changement de variable est usuel (ce dernier terme n'est pas précisé). Globalement, le programme officiel semble considérer que les changements de variable sont des techniques calculatoires et qu'il convient de ne pas trop s'appesantir sur les hypothèses. Dans cette question, signaler le caractère $\mathcal{C}^1$ devait certainement permettre d'obtenir les points de justification. $\square$

8. En déduire la valeur de I puis de J .

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx &= \sqrt{n} W_{2n+1} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \quad (\text{d'après la question 4}) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cancel{\sqrt{n}} \sqrt{\pi}}{2 \cancel{\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

- Cela permet de conclure, par la question 6 :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- Par ailleurs, comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, les intégrales I et J sont de même nature. Elles sont donc convergentes puisque I l'est (d'après la question 5). On peut de plus en conclure :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I$$

Finalement : $J = 2I = \sqrt{\pi}$.

□

Autour d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{II.1}$$

9. Déterminer les solutions développables en série entière de (II.1) sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On procède par analyse-synthèse.

• Analyse

Soit f une fonction développable en série entière solution de (II.1). On note $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière associée à f .

Il existe donc une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- × La fonction f est la somme d'une série entière. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et en particulier de classe $\mathcal{C}^2$) sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

- × Par théorème de dérivation sous le symbole somme pour les séries entières, les fonctions f' et f'' sont développables en série entière sur $] - R, R[$.

De plus, ces fonctions vérifient :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\text{et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

- × Pour tout $x \in] - R, R[$:

$$\begin{aligned} & x f''(x) + f'(x) + x f(x) \\ &= x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(n) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \quad (\text{par décalages d'indice}) \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n(n+1) + (n+1)) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

- × Ainsi, comme f est solution de (II.1) :

$$\forall x \in] - R, R[, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n = 0$$

On en déduit, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2} a_{n-1} \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+2} = \frac{-1}{(2n+2)^2} a_{2n} \quad \text{et} \quad a_{2n+3} = \frac{-1}{(2n+3)^2} a_{2n+1} \end{cases}$$

× En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 a_{2n+2} &= \frac{-1}{(2n+2)^2} a_{2n} \\
 &= \frac{-1}{(2n+2)^2} \frac{-1}{(2n)^2} a_{2n-2} \\
 &= \frac{-1}{(2n+2)^2} \frac{-1}{(2n)^2} \frac{-1}{(2n-2)^2} a_{2n-4} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{-1}{(2n+2)^2} \frac{-1}{(2n)^2} \frac{-1}{(2n-2)^2} \dots \frac{-1}{2^2} a_0 \\
 &= \frac{-1}{(2 \times (n+1))^2} \frac{-1}{(2 \times n)^2} \frac{-1}{(2 \times (n-1))^2} \dots \frac{-1}{(2 \times 1)^2} a_0 \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} a_0
 \end{aligned}$$

et de manière similaire :

$$a_{2n+3} = \frac{-1}{(2n+3)^2} \frac{-1}{(2n+1)^2} \frac{-1}{(2n-1)^2} \dots \frac{-1}{3^2} a_1 = 0$$

Finalement, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2^n \times n!)^2} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.

× On en conclut, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$$

• Synthèse

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$. On note $f : x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$.

× Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(u_n(x_0))$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x_0) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x_0^{2n}$.

× Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| &= \frac{|u_{n+1}(x_0)|}{|u_n(x_0)|} \\
 &= \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)} ((n+1)!)^2} a_0 x_0^{2(n+1)} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0 x_0^{2n} \right|} \\
 &= \frac{|(-1)^{n+1}|}{2^{2(n+1)} ((n+1)!)^2} \frac{2^{2n} (n!)^2}{|(-1)^n|} \frac{|a_0|}{|a_0|} \frac{|x_0|^{2n+2}}{|x_0|^{2n}} \\
 &= \frac{1}{2^2 (n+1)^2} |x_0|^2
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\left| \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$

On en déduit, par règle de d'Alembert, que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, la série numérique $\sum u_n(x_0)$ est convergente.

Enfinement : $R_{cv} \left(\sum \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} \right) = +\infty.$

La fonction f est bien solution de (II.1) (d'après les calculs précédents) et est la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

On en conclut finalement que l'ensemble des solutions de (II.1) développables en série entière est $\text{Vect}(g)$ où $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$

□

10. Démontrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée S , telle que $S(0) = 1$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, si S est une solution de (II.1) développable en série entière, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \lambda g(x)$$

- En particulier : $S(0) = \lambda g(0)$. Or :

$$\begin{aligned} g(0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} 0^{2n} \\ &= \frac{(-1)^0}{2^0 (0!)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} 0^{2n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Comme $S(0) = 1$, on en conclut : $\lambda = 1$.

Enfinement, l'unique solution S de (II.1) développable en série entière vérifiant $S(0) = 1$ est la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$

□

On définit : $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$

11. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathcal{C}^2$ - étude « en x »

- Pour tout $t_0 \in [0, \pi]$, la fonction $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto \cos(\sin(t_0) x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\underline{h}_{t_0}'(x) = -\sin(\sin(t_0) x) \times \sin(t_0) = -\sin(t_0) \sin(\sin(t_0) x)$$

$$\underline{h}_{t_0}''(x) = -\sin(t_0) \cos(\sin(t_0) x) \times \sin(t_0) = -(\sin(t_0))^2 \cos(\sin(t_0) x)$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

(0) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t(x) = \cos(x \sin(t))$ est intégrable sur $[0, \pi]$ car elle est continue sur le SEGMENT $[0, \pi]$.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t'(x) = -\sin(t) \sin(x \sin(t))$ est intégrable sur $[0, \pi]$ car elle est continue sur le SEGMENT $[0, \pi]$.

- Intégrabilité par domination

(2) ► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t''(x) = -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t))$ est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, \pi]$.

► Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} \left| -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)) \right| &= | -1 | \left| (\sin(t))^2 \right| \left| \cos(x \sin(t)) \right| \\ &= |\sin(t)|^2 \left| \cos(x \sin(t)) \right| \\ &\leq 1 \times 1 \end{aligned} \quad (*)$$

Et la fonction $\psi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, \pi]$ car elle est continue sur le SEGMENT $[0, \pi]$.

(l'inégalité $(*)$ démontre au passage que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto -(\sin(t))^2 \cos(x \sin(t))$ est intégrable sur $[0, \pi]$)

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, G''(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underline{h}_t''(x) dt \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)) dt \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'''(x) = \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)) dt$$

□

12. Montrer que G est solution de (II.1) sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &x G''(x) + G'(x) + x G(x) \\ &= \frac{-x}{\pi} \int_0^\pi (\sin(t))^2 \cos(x \sin(t)) dt + \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt + \frac{x}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x \cos(x \sin(t)) \right) \left(1 - (\sin(t))^2 \right) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x \cos(x \sin(t)) \right) (\cos(t))^2 dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t) \times (x \cos(t)) \cos(x \sin(t)) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \end{aligned}$$

- On étudie la première intégrale en procédant par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = \cos(t) & u'(t) = -\sin(t) \\ v'(t) = \cos(x \sin(t)) & v(t) = \sin(x \sin(t)) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(t) \times (x \cos(t)) \cos(x \sin(t)) dt &= \left[\cos(t) \sin(x \sin(t)) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \\ &= \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \quad (\text{car } \sin(0) = \sin(\pi) = 0) \end{aligned}$$

Finalement :

$$x G''(x) + G'(x) + x G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt = 0$$

La fonction G est bien solution de (II.1).

□

13. Montrer : $G = S$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$G(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(0 \times \sin(t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 dt = \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

La fonction G :

× solution de (II.1),

× vérifie $G(0) = 1$.

Pour démontrer que G coïncide avec S , il suffit donc, d'après la question 10, de démontrer que G est développable en série entière. Rappelons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$$

- La fonction $\cos$ est développable en série entière. Plus précisément :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} u^{2n}$$

On obtient donc, pour tout $t \in [0, \pi]$, en évaluant l'égalité en $u = x \sin(t) \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(x \sin(t)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x \sin(t))^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} x^{2n} \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} x^{2n} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n} \end{aligned}$$

En intervertissant les symboles $\int_0^\pi$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$, on pourra alors conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$ s'écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^{2n}$, ce qui démontre que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

L'étude portant sur une intégrale sur un segment, on peut opter pour l'interversion par convergence normale.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : t \mapsto \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n}$$

(i) Intégrabilité sur un segment

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le SEGMENT $[0, \pi]$.

(ii) Convergence uniforme (par convergence normale)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} \right| \\ &= |(-1)^n| \frac{1}{(2n)!} |(\sin(t))^{2n}| \\ &= \frac{1}{(2n)!} |\sin(t)|^{2n} \\ &\leq \frac{1}{(2n)!} \quad (\text{car } |\sin(t)| \leq 1) \\ &\leq \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur $[0, \pi]$.

► De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|f_n\|_{\infty, [0, \pi]} \leq \frac{1}{n!}$.

► La série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle de paramètre 1.

On en déduit, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty, [0, \pi]}$ est convergente. Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On en déduit, par théorème d'interversion :

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^\pi f_n(t) dt \right)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, G(x) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^\pi \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\pi (2n)!} \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt \right) x^{2n} \end{aligned}$$

La fonction F est donc bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et coïncide donc avec S . □

Exercice 2

Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On note $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par $M^\top$ la transposée d'une matrice M .

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désignera par $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$, en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ qui est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ où par définition, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(M)$ le réel défini par : $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda|$.

On note par ailleurs $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que l'application N donnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N : A \mapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'en étudier quelques propriétés.

I - Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

14. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|$, montrer :

$$\|AX\| \leq M\sqrt{n}$$

On pourra au préalable s'intéresser à la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

- Notons $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\begin{aligned} \|AX\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n ((AX)_i)^2} && (\text{par définition de } \|\cdot\|) \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \times x_j \right)^2} && (\text{par définition du produit de matrices}) \end{aligned}$$

- Comme suggéré dans l'énoncé, rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée par tout produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\begin{aligned} \forall (U, V) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \left(\langle U, V \rangle \right)^2 &\leq \langle U, U \rangle \times \langle V, V \rangle \\ \text{ce qui s'écrit} \quad \left(\sum_{j=1}^n u_j \times v_j \right)^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^n (u_j)^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^n (v_j)^2 \right) && (\text{en notant } U = (u_1, \dots, u_n) \\ &&& \text{et } V = (v_1, \dots, v_n)) \end{aligned}$$

- On applique cette inégalité à la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX .
Plus précisément, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on applique cette inégalité aux vecteurs $U = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ et $V = (x_1, \dots, x_n)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \times x_j \right)^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^n (a_{i,j})^2 \right) \times \left(\sum_{j=1}^n (x_j)^2 \right) \\ &= \|L_i\|^2 \times \|X\|^2 \\ &= \|L_i\|^2 && (\text{puisque } \|X\| = 1) \\ &\leq M^2 && (\text{par croissance de la fonction élévation au carré sur } [0, +\infty[\text{ et comme } \|L_i\| \leq M) \end{aligned}$$

- On en déduit, par sommation de ces n inégalités :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \times x_j \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^n M^2 = n \times M^2 \\ \text{donc } \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \times x_j \right)^2} &\leq \sqrt{n \times M^2} && (\text{par croissance de la fonction racine sur } [0, +\infty[) \\ &= \sqrt{n} \times \sqrt{M^2} \end{aligned}$$

On en conclut : $\|AX\| \leq \sqrt{n} \times M$.

□

15. En déduire que l'application N est bien définie, puis : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

Démonstration.

- L'ensemble $\{\|AX\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$ est :
× un ensemble de réels (par définition de $\|\cdot\|$).
× non vide. En effet, comme $\|(1, 0, \dots, 0)\| = 1$, cet ensemble contient notamment :

$$\|A \times (1, 0, \dots, 0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{i,1})^2} \quad (= \|C_1\|)$$

× majoré (par $\sqrt{n} \times M$).

Cet ensemble admet donc une borne supérieure.

L'application N est donc bien définie.

- Rappelons que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^n : X_0 \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \|X_0\| \neq 0$.
Il s'agit de démontrer :

$$\sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$$

On procède par double inégalité.

($\leq$) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On suppose $\|X\| = 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \|AX\| &= \frac{\|AX\|}{\|X\|} && (\text{car } \|X\| = 1) \\ &\leq \sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} && (\text{par définition de borne supérieure}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$ est un majorant de l'ensemble $\{\|AX\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$.

Ce réel est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble. Autrement dit :

$$\sup_{\|X\|=1} \|AX\| \leq \sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$$

($\geq$) Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose $\|X_0\| \neq 0$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{X_0}{\|X_0\|} \right\| &= \left\| \frac{1}{\|X_0\|} X_0 \right\| && \text{(par homogénéité de l'application } \|\cdot\| \text{)} \\ &= \frac{1}{\|X_0\|} \|X_0\| && \text{(car } \|X_0\| \geq 0 \text{)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} &= \frac{1}{\|X_0\|} \|AX_0\| \\ &= \left\| \frac{1}{\|X_0\|} \cdot AX_0 \right\| && \text{(par homogénéité de l'application } \|\cdot\| \text{)} \\ &= \left\| A \frac{X_0}{\|X_0\|} \right\| \\ &\leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\| && \text{(d'après la remarque au dessus)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\sup_{\|X\|=1} \|AX\|$ est un majorant de l'ensemble $\left\{ \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} \mid X_0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X_0\| \neq 0 \right\}$.

Ce réel est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble. Autrement dit :

$$\sup_{\|X_0\| \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

On a bien démontré : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

□

16. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Démontrons que l'application N vérifie les propriétés d'une norme.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} N(\lambda \cdot A) &= \sup \left\{ \|(\lambda \cdot A) X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|\lambda \cdot (AX)\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ |\lambda| \times \|AX\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \right\} && \text{(par homogénéité de l'application } \|\cdot\| \text{)} \\ &= |\lambda| \times \sup \left\{ \|AX\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \right\} && \text{(par propriété du cours)} \\ &= |\lambda| \times N(A) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application N vérifie la propriété d'homogénéité.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $N(A) = 0$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons $Y_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (n -uplet dont le $j^{\text{ème}}$ coefficient vaut 1 et les autres valent 0). Comme $\|Y_j\| = 1$, alors :

$$0 \leq \|AY_j\| \leq \sup_{\|X\|=1} \|AX\| = N(A) = 0$$

Ainsi, $\|AY_j\| = 0$. Par propriété de séparation (puisque l'application $\|\cdot\|$ est une norme), on en conclut $C_j = AY_j = 0_{\mathbb{R}^n}$. On vient donc de démontrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi : $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi, l'application N vérifie la propriété de séparation.

(3) Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On suppose $\|X\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|(A+B)X\| &= \|AX + BX\| \\ &\leq \|AX\| + \|BX\| && \text{(par inégalité triangulaire car l'application } \|\cdot\| \text{ est une norme)} \\ &\leq \|AX\| + \sup_{\|V\|=1} \|BV\| \\ &\leq \sup_{\|U\|=1} \|AU\| + \sup_{\|V\|=1} \|BV\| \\ &\leq N(A) + N(B) \end{aligned}$$

Ainsi, $N(A) + N(B)$ est un majorant de l'ensemble $\{\|(A+B)X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$. Ce réel est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble. Autrement dit :

$$\|A+B\| = \sup \{ \|(A+B)X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \} \leq N(A) + N(B)$$

Ainsi, l'application N vérifie la propriété d'inégalité triangulaire.

On en conclut que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

17. En est-il de même pour l'application $S : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$?
 $M \mapsto \rho(M)$

Démonstration.

• On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M est une matrice carrée d'ordre n triangulaire

supérieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

On en conclut : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$.

• Ainsi : $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda| = \max \{0\} = 0$. Or $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

L'application ρ ne vérifie pas la propriété de séparation. Ce n'est donc pas une norme. □

18. Soit $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$ dont on note $\delta_1, \dots, \delta_n$ les termes diagonaux.

Vérifier : $N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$.

Démonstration.

On procède par double inégalité.

($\leq$) Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose $\|X\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|\Delta X\|^2 &= \langle \Delta X, \Delta X \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \delta_1 x_1 \\ \vdots \\ \delta_n x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1 x_1 \\ \vdots \\ \delta_n x_n \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\delta_i x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_i^2 x_i^2 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\delta_i| &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \\ \text{donc} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\delta_i|^2 &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 && \text{(par croissance de l'application} \\ &&& \text{élévation au carré sur } [0, +\infty[) \\ \text{donc} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\delta_i|^2 x_i^2 &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 x_i^2 && \text{(en multipliant par } x_i^2 \geq 0) \\ \text{donc} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \delta_i^2 x_i^2 &\leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 x_i^2 && \text{(car } |\delta_i|^2 = \delta_i^2 \text{ puisque } \delta_i \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ainsi, par sommation :

$$\begin{aligned} \|\Delta X\|^2 &= \sum_{i=1}^n \delta_i^2 x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 x_i^2 \right) \\ &= \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 \times \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2 && \text{(puisque } \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|X\|^2 = 1) \end{aligned}$$

Finalement, par croissance de la fonction racine sur $[0, +\infty[$:

$$\|\Delta X\| = \sqrt{\|\Delta X\|^2} \leq \sqrt{\left(\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j| \right)^2} = \max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j|$$

Ainsi, $\max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j|$ est un majorant de l'ensemble $\{ \|\Delta X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \}$.

Ce réel est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble. Autrement dit :

$$\|\Delta\| = \sup \{ \|\Delta X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \} \leq \max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j|$$

($\geq$) Notons i_0 l'entier tel que : $|\delta_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} |\delta_j|$.

Notons $Y_{i_0} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (n -uplet dont le $i_0^{\text{ème}}$ coefficient vaut 1 et les autres valent 0).
Comme $\|Y_{i_0}\| = 1$, alors :

$$\|\Delta Y_{i_0}\| \leq \sup_{\|X\|=1} \|\Delta X\| = N(\Delta)$$

On conclut en remarquant :

$$\|\Delta Y_{i_0}\| = \|(0, \dots, 0, \delta_{i_0}, 0, \dots, 0)\| = \sqrt{\delta_{i_0}^2} = |\delta_{i_0}|$$

Finalement : $N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$.

□

19. À l'aide de l'application $X \mapsto \|AX\|$, démontrer : $N(A) = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$.

Démonstration.

- La fonction $f_A : X \mapsto \|AX\|$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car elle est la composée $f_A = \|\cdot\| \circ h$ où :
 - × $h : X \mapsto AX$ est :
 - continue en tant qu'application linéaire sur l'espace vectoriel **de dimension finie** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - telle que : $h(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - × $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (car 1-lipschitzienne).

La fonction f_A est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Par ailleurs, l'ensemble $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\| = 1\}$ est :
 - × un ensemble fermé puisque $S = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$ où :
 - $\|\cdot\|$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
 - × borné puisque $S \subset B_f(0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}, 1)$.

L'ensemble S est un fermé borné.

- Comme la fonction f_A est continue sur le fermé borné **non vide** S , alors la fonction f_A est bornée sur S et atteint ses bornes.

On en déduit : $N(A) = \sup_{X \in S} \|AX\| = \max_{X \in S} \|AX\|$.

□

20. Établir : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| \leq N(A) \times \|X\|$.

Démonstration.

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Deux cas se présentent.

- Si $X = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors :
 - × $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $\|AX\| = 0$.
 - × $\|X\| = 0$.

Dans ce cas, on a bien : $\|AX\| = 0 \leq 0 = N(A) \times \|X\|$.

- Si $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\|X\| \neq 0$. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|X\|} \|AX\| &= \left\| \frac{1}{\|X\|} AX \right\| && (\text{par homogénéité de } \|\cdot\|) \\ &= \left\| A \frac{X}{\|X\|} \right\| \\ &\leq \sup_{U \in S} \|AU\| && (\text{puisque } \frac{X}{\|X\|} \in S) \\ &= N(A) \end{aligned}$$

En multipliant de part et d'autre par $\|X\|$, on obtient aussi dans ce cas : $\|AX\| \leq N(A) \|X\|$.

21. Soit B une autre matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$N(AB) \leq N(A) \times N(B)$$

Démonstration.

Soit $X \in S$.

$$\begin{aligned} \|(AB)X\| &= \|A(BX)\| \\ &\leq N(A) \times \|BX\| && (\text{d'après la question précédente}) \\ &\leq N(A) \times (N(B) \times \|X\|) && (\text{d'après la question précédente}) \\ &= N(A) \times N(B) \end{aligned}$$

Ainsi, $N(A) \times N(B)$ est un majorant de l'ensemble $\{\|(AB)X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1\}$.
Ce réel est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble. Autrement dit :

$$\|AB\| = \sup \{ \|(AB)X\| \mid X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\| = 1 \} \leq N(A) \times N(B)$$

$$\|AB\| \leq N(A) \times N(B)$$

□

22. Montrer : $\max_{1 \leq i \leq n} \|C_i\| \leq N(A)$.

23. Déterminer $N(A)$ dans le cas où toutes les colonnes de A sont nulles, sauf la dernière.

En déduire $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II - Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie, A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

24. Déterminer $N(U)$.

25. Démontrer que $N(UA)$ et $N(A)$ sont égales.

26. En considérant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ où $\|X_0\| = 1$ tel que $\|AX_0\| = N(A)$, démontrer : $N(AU) = N(A)$.

27. On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $N(A) = \rho(A)$.

28. Déterminer $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Approximation de $\sqrt{2}$ via la méthode de Héron d'Alexandrie

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left(c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) \end{cases}$$

29. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.
30. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2 - a)^2$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $c_n(a) \geq \sqrt{a}$.
31. Montrer que $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.
32. Calculer $c_1(2)$. À l'aide de la question 30, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$$

En déduire :

$$\sqrt{2} = c_n(2) + O_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$$

Racine carrée d'une matrice symétrique positive

On note $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{O}(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^T P = I_q$.

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $X^T M X \geq 0$ pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

A - Racines carrées de la matrice I_2

33. Rappeler sans démonstration la description des matrices de $\mathcal{O}(2)$.
On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.
34. Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $\mathcal{O}(2)$.
Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?

B - Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive

35. Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.
36. Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.
37. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.
On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M .

Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leq i, j \leq q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de M .

Pour $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{K}$, on note $\text{diag}(a_1, \dots, a_q)$ la matrice A de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $1 \leq i, j \leq q$:

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$.

On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants : pour toute suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$,

- la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous $1 \leq i, j \leq q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$;
- si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M , alors les suites $(AM_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n A)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA .

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité.

On rappelle que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O(q)$ telle que :

$$M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) P^T$$

On rappelle de plus que, pour tout réel $a \geq 0$, la suite $(c_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ définie en début d'exercice, est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{1}{2} (M_n + M M_n^{-1}) \end{cases}$$

38. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est bien définie et :

$$M_n = P \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T$$

39. En déduire que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.