
DS8

Exercice 1

On considère dans cet exercice la fonction définie pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} e^{-xu} du$$

Étude d'une fonction auxiliaire f

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(u) = \frac{1 - \cos(u)}{u^2}$$

1. Établir que f est continue sur $]0, +\infty[$, et vérifier : $\forall u > 0, 0 \leq f(u) \leq \frac{2}{u^2}$.

2. Établir que f admet une limite ℓ (dont on précisera la valeur) en 0.

On posera $f(0) = \ell$, et on notera encore f ce prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}_+$.

3. En déduire que l'intégrale $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$ est convergente.

4. En déduire que l'intégrale $L(x)$ est convergente pour tout réel positif x .

Propriétés de la fonction L

5. Démontrer que la fonction L est continue sur $\mathbb{R}_+$.

6. Vérifier l'inégalité : $\forall u \in \mathbb{R}, 1 - \cos(u) \leq \frac{u^2}{2}$, et en déduire : $\forall u \geq 0, 0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}$.

En déduire : $\forall x > 0, 0 \leq L(x) \leq \frac{1}{2x}$, et préciser la limite de L en $+\infty$.

7. Établir que la fonction L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser $L''(x)$ sous forme d'une intégrale.

Expression de $L(x)$ sans symbole intégral

8. a) Calculer pour $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u} du$, et en déduire $\int_0^{+\infty} \cos(u) e^{-xu} du$.

En déduire l'expression sans symbole intégral de $L''(x)$ pour $x > 0$.

b) En déduire qu'il existe des réels C et D tels que pour tout $x > 0$:

$$L(x) = -\frac{x}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \arctan(x) + Cx + D$$

c) Déterminer les constantes C et D .

En déduire enfin la valeur de l'intégrale $L(0)$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

9. Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge.

On note alors, pour tout $x \in D$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

10. Montrer, sans calculer sa dérivée, que la fonction f est décroissante sur D .

11. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

12. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

13. Soit $J = \int_1^{+\infty} f(t) dt$. Montrer que l'intégrale J converge et prouver : $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 3

On considère l'équation (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + x + 1)y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

14. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E). Calculer $y(0)$.

15. On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

16. a) Montrer que l'on a :
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, (n^2 - 1)a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

b) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence : $\forall n \geq 1, |a_n| \leq \frac{1}{(n-1)!}$.

c) Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

17. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On pose, pour tout x réel, $z(x) = xy(x)e^x$.

a) Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

b) Prouver que z' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xu'(x) - (2x + 1)u(x) = 0 \tag{F}$$

d'inconnue la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Une équation différentielle

18. a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)u = 0$$

b) Justifier que les solutions sont prolongeables par continuité en 0.

19. Démontrer que, pour tout réel c , la fonction $x \mapsto cxe^{2x}$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

On admet que ce sont les seules solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

20. Démontrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = a(2x - 1)e^{2x} + a$$

21. Déterminer alors une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 4

Notations / vocabulaire

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On utilisera les notations matricielles classiques :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à n lignes ;
- 0_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls ;
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé par les matrices symétriques ;
- $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A ;

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthodiagonalisable s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^\top$.

Les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont assimilés à des réels.

Avec ces notations, le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(U | V) = U^\top V$.

On note $\|U\|$ la norme euclidienne de $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I.A - Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

22. En observant la première et la dernière colonne de A_1 , déterminer un vecteur propre de A_1 et la valeur propre λ_1 associée.
23. Déterminer le sous-espace propre de A_1 associé à la valeur propre λ_1 et en déduire le spectre de A_1 .
24. Orthodiagonaliser A_1 .

I.B - Un exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

25. Montrer que l'application $\phi : (P, Q) \mapsto \phi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
26. Écrire la matrice H de ce produit scalaire dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire la matrice de terme général $h_{i,j} = \phi(X^i, X^j)$ où les indices i et j varient entre 0 et $n-1$.
27. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Exprimer le produit $U^\top H U$ à l'aide de ϕ et des coefficients de U .
28. Montrer que H appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont strictement positives.

I.C - Rayon spectral

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de spectre non vide, le rayon spectral de A , noté $\rho(A)$, est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

29. Montrer que, si A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$, alors le rayon spectral de A est nul.
30. On note $C = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid U^\top U = 1\}$. Démontrer que C est une partie fermée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
31. En déduire que l'application : $U \mapsto |U^\top A U|$ admet un maximum sur C .
32. Montrer que $\rho(A) \leq \max_{U \in C} |U^\top A U|$.

I.D - Rayon spectral d'une matrice symétrique

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

33. Démontrer que $\rho(A) = \max_{U \in C} |U^\top A U|$.

On suppose de plus que les valeurs propres de A sont toutes positives.

34. Montrer alors que $\rho(A) = \max_{U \in C} (U^\top A U)$.

35. Démontrer que l'application ρ définit une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Temps d'attente avant une collision

Présentation générale

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées par les entiers de 1 à n . On procède à une succession de tirages avec remise dans cette urne. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour tirer pour la seconde fois une boule déjà tirée auparavant.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère la variable aléatoire T_n définie de la façon suivante :

$$T_n = \min \{j \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket \mid \exists i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, X_i = X_j\}$$

Par exemple, si on suppose que $n = 4$ et que l'évènement :

$$\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 3\} \cap \{X_3 = 2\} \cap \{X_4 = 3\} \cap \{X_5 = 4\}$$

est réalisé, alors $T_n = 4$, car c'est au quatrième tirage que pour la première fois réapparaît un résultat déjà obtenu.

L'objectif de cet exercice est de déterminer un équivalent de l'espérance de la variable aléatoire T_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Partie I- Une expression de l'espérance de T_n

36. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire T_n .

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et la variable aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_k)$.

37. Justifier que Z suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^k$.

38. Dans cette question, on considère l'évènement :

$$A = \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid \text{les éléments } a_1, \dots, a_k \text{ sont deux à deux distincts} \right\}$$

Exprimer le cardinal de A en fonction de n et de k , puis en déduire :

$$\mathbb{P}(\{T_n > k\}) = \mathbb{P}(\{Z \in A\}) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

On remarque que le résultat de la question précédente est encore valable pour $k = 0$.

39. Justifier que la variable aléatoire T_n est d'espérance finie et :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Dans cette partie, on détermine une expression de l'espérance de T_n sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

40. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale I_k est convergente.

41. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

42. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$ converge, puis :

$$\mathbb{E}(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Partie III - Un équivalent de l'espérance

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question 42 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

III. 1 - Étude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

43. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un changement de variable, établir :

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv$$

44. Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, K_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} dv$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité $1 + x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

45. En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.