DS1

Pour toute suite réelle ou complexe (u_n), pour tout $q \in \mathbb{N}$, le symbole $\prod\limits_{k=q}^{+\infty} u_k$ désigne la limite, si elle existe, de la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \geqslant q, \quad p_n \ = \ \prod_{k=q}^{n} u_k \ = \ u_q \times u_{q+1} \times \cdots \times u_n$$

Les parties IV et V sont associées et indépendantes des parties I, II et III.

Par ailleurs, on définit les ensembles suivants :

× l'ensemble $\pi\,\mathbb{Z}$ est défini par : $\pi\,\mathbb{Z} \ = \ \{k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

On obtient alors, par exemple : $\mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z} \ = \ \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \,]k\,\pi, (k+1)\,\pi[$.

× l'ensemble $\mathbb{Z}_-^*$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs.

Partie I

1. ***a)*** Déterminer, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de la quantité $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ sans le symbole $\prod$.

En déduire l'existence et la valeur de $\prod\limits_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

b) En procédant de façon similaire à la question précédente, démontrer l'existence et calculer les valeurs des quantités suivantes :

$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{k\,(k+1)}\right)$$

2. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

a) Montrer que la quantité $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe. Puis démontrer que le réel $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est non nul si, et seulement si, la série $\sum \ \ln(u_n)$ est convergente.

b) Démontrer que la quantité $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe si, et seulement si, la série $\sum \ u_n$ est convergente.

c) Démontrer que la quantité $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe si, et seulement si, $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1 - u_n)$ existe et est non nul.

Partie II

3. Démontrer l'existence et calculer les valeurs des quantités suivantes.

$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$$

4. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \ \left|u_n\right| < 1 \\ \text{La série } \sum \ u_n \text{ est convergente} \end{cases}$$

a) Montrer que les séries $\sum \ \ln(1 + u_n)$ et $\sum \ {u_n}^2$ sont de même nature.

b) En déduire que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe. Puis démontrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)=0$ si, et seulement si, la série $\sum u_n{}^2$ est divergente.

Partie III

5. Soit (a_n) la suite réelle définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases} a_{2n} \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}, \\[2ex] a_{2n+1} \;=\; -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

a) Étudier la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum a_n{}^2$.

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{n=3}^{+\infty}(1+a_n)$.

6. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant les deux conditions suivantes.

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ \left|u_n\right|<1 \\[2ex] \prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) \text{ existe et est non nul} \end{cases}$$

a) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum u_n{}^2$ est convergente.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=+\infty$ si, et seulement si, la série $\sum u_n{}^2$ est divergente.

Partie IV

On note $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall m\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases} s_{2m-1}(x) \;=\; \left(1-\dfrac{x}{m\,\pi}\right)\exp\left(\dfrac{x}{m\,\pi}\right) \\[2ex] s_{2m}(x) \;=\; \left(1+\dfrac{x}{m\,\pi}\right)\exp\left(-\dfrac{x}{m\,\pi}\right) \end{cases}$$

7. Montrer que $S(x)=\prod\limits_{k=1}^{+\infty}s_k(x)$ existe pour toute valeur de x et vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\pi\,\mathbb{Z},\ S(x)\neq 0$.

8. On suppose : $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\,\mathbb{Z}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n(x) \;=\; \prod_{k=1}^{2n}s_k(x)$$

Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{T_n(x+2\pi)}{T_n(x)}$$

9. En déduire que la fonction $x\mapsto x\,S(x)$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, est périodique de période 2π.

10. On admet la propriété suivante :

$$\forall x \in\,]-1,0[\, \cup\,]0,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \cos(xt) \ = \ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{2x}{x^2 - n^2} \, \cos(nt) \qquad (*)$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\cos(n\,\pi)$.

b) En utilisant la propriété $(*)$, calculer pour tout $x \in\,]-1,1[$ la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - n^2}$.

c) En déduire, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2\,\pi^2 - n^2} = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

d) Montrer que, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$, la série $\sum\ \phi_n(x)$ est convergente, où on note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi_n(x) \ = \ \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$$

On note alors : $\phi(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x)$.

e) Calculer $\phi(0)$.

f) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Prouver que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et démontrer, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$, $\phi'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \phi'_n(x)$.

g) En déduire, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$, une expression de $\phi'(x)$ sans le symbole $\sum$.

h) Déduire de ce qui précède la valeur de $\phi(x)$ pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$.

i) En déduire le développement du sinus découvert par Léonhard Euler (1707-1783) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) \ = \ \pi\, x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Partie V

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction de la variable réelle x, définie pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier strictement négatif, par :

$$\forall x \notin \mathbb{Z}_-^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_n(x) \ = \ \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + \frac{x}{n}}$$

11. Montrer que, pour tout $x \notin \mathbb{Z}_-^*$, $G(x) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ existe et vérifie : $G(x) \neq 0$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $G_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$. Montrer :

$$\ln\big(G_n(1)\big) \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$$

En déduire la suite $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)\right)$ tend vers une limite finie γ strictement positive lorsque $n \to +\infty$.

13. Pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier négatif ou nul, on pose :

$$\Gamma(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x}\, G(x)$$

a) Calculer $\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$.

b) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14. Montrer que pour toute valeur de x qui n'est pas dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$G_n(x)\, G_n(-x) \;=\; \frac{1}{T_n(\pi\, x)}$$

15. En déduire la formule des compléments :

$$\forall x \notin \mathbb{Z}, \quad \Gamma(x)\, \Gamma(1-x) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi\, x)}$$

16. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est la solution (*on pourra réaliser une IPP*).