DS1

Exercice 1

Partie A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

1. ***a)*** Montrer : $\forall t \in\,]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{t+1} \ \leqslant\ \ln(t+1)-\ln(t) \ \leqslant\ \dfrac{1}{t}$.

b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ.

2. Montrer alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. ***a)*** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{u_n+v_n}{2} - \gamma\right| \ \leqslant\ \dfrac{1}{2}\,(v_n-u_n)$.

b) En déduire une fonction **Python** (que l'on nommera `approx`) qui prend pour argument une précision `eps` et qui renvoie une approximation du réel γ à `eps` près.

Partie B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ converge.

On pose alors, pour tout $x \in [0,+\infty[$: $\displaystyle S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$.

5. ***a)*** Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1) = 1$.

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}}$.

En déduire la valeur de $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

6. ***a)*** Montrer : $\displaystyle\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ S(y)-S(x) = (y-x)\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)\,(k+y)}$.

b) En déduire que S est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$.

c) Montrer :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \forall h \in \mathbb{R},\ x+h \geqslant 0 \ \Rightarrow\ \left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \ - \ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\right| \ \leqslant\ |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

En déduire que S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et : $\displaystyle\forall x \in [0,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$.

On admet que S' est également continue sur $[0,+\infty[$.

7. ***a)*** Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, \;\; S(x+1) = S(x) + \dfrac{1}{x+1}$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

c) En utilisant la croissance de la fonction S sur $[0, +\infty[$, montrer : $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$.

8. ***a)*** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \, dx$, le réel u_n étant défini dans la **Partie A**.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 S(x) \, dx - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

c) Conclure : $\displaystyle\int_0^1 S(x) \, dx = \gamma$.

Exercice 2

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0, 1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leqslant K \times \mid x - y \mid \qquad (*)$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.
On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mid u_{n+1} - u_n \mid \leqslant K^n \times \mid u_1 - u_0 \mid$$

b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a) Justifier que l'on a : $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} \mid u_{i+1} - u_i \mid \leqslant \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i \times \mid u_1 - u_0 \mid$.

b) En déduire l'inégalité :

$$\mid u_{n+p} - u_n \mid \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times \mid u_1 - u_0 \mid$$

c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$\mid a - u_n \mid \leqslant \frac{K^n}{1 - K} \times \mid u_1 - u_0 \mid$$

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel t.

b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left| f'(t) \right| \leqslant \frac{1}{4}$$

c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

e) Écrire une fonction **Python** (on la nommera `suite`) qui, pour une valeur donnée de n, renvoie la valeur de u_n.

f) En s'appuyant sur le résultat de la question ***5.c)***, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.

g) En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Exercice 3

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2. ***a)*** Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

b) (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0$$

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

b) (i) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

(ii) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie II : Approximation de σ

5. a) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \sigma - \left(-\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

7. Écrire une fonction **Python** (que l'on nommera `approx`) qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.