DS1

Partie I

1. *a)* Déterminer, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de la quantité $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ sans le symbole $\prod$.

En déduire l'existence et la valeur de $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

- **1 pt :** $\forall n \geqslant 1$, $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$ **(télescopage)**
- **1 pt : ainsi, le produit** $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ **existe et :** $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

b) En procédant de façon similaire à la question précédente, démontrer l'existence et calculer les valeurs des quantités suivantes :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right)$$

- **1 pt :** $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\,(k+1)}{k^2}=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\times\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)$
- **1 pt :** $=\frac{1}{n}\times\left(\frac{\cancel{3}}{2}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\times\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)=\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}$
- **0 pt : ainsi le produit** $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ **existe. De plus :** $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2\,n}=\frac{1}{2}$
- **1 pt :** $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k\,(k+1)-2}{k\,(k+1)}=\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\times\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+2}{k+1}\right)$
- **1 pt :** $=\frac{1}{n}\times\left(\frac{\cancel{4}}{3}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n}}\times\frac{n+2}{\cancel{n+1}}\right)=\frac{n+2}{3\,n}$
- **0 pt : ainsi le produit** $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right)$ **existe et vaut** $\frac{1}{3}$

2. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0<u_n<1$.

a) Montrer que la quantité $\prod_{n=0}^{+\infty}u_n$ existe. Puis démontrer que le réel $\prod_{n=0}^{+\infty}u_n$ est non nul si, et seulement si, la série $\sum \ln(u_n)$ est convergente.

- **1 pt :** $\prod_{k=0}^{n}u_k>0$ **ainsi la suite** $\left(\prod_{k=0}^{n}u_k\right)$ **est minorée par** 0
- **1 pt :** $\prod_{k=0}^{n+1}u_k-\prod_{k=0}^{n}u_k=\left(\prod_{k=0}^{n}u_k\right)\times u_{n+1}-\prod_{k=0}^{n}u_k=\left(\prod_{k=0}^{n}u_k\right)(u_{n+1}-1)\leqslant 0$
- **0 pt : décroissante + minorée donc convergente vers un réel** $\geqslant 0$
- **1 pt : si** $\prod_{k=0}^{+\infty}u_k>0$**,** $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}u_k=\ell>0$ **et** $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\prod_{k=0}^{n}u_k\right)=\ln(\ell)$ **et** $\sum\ln(u_n)$ **CV**
- **1 pt : si** $\prod_{k=0}^{+\infty}u_k=0$**,** $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}u_k=0$ **et** $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\prod_{k=0}^{n}u_k\right)=-\infty$ **et** $\sum\ln(u_n)$ **DV**
- **0 pt : conclusion** $\Leftrightarrow$ **grâce à la contraposée du point précédent**

b) Démontrer que la quantité $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est convergente.

- **1 pt : (⇒) on suppose que $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe. Donc $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)=\ell$**
- **1 pt : comme $\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\geqslant 1$, $\ell\geqslant 1$ d'où $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)=\ln(\ell)$ et $\sum \ln(1+u_n)$ CV**
- **1 pt : $\ln(1+u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n$ car $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par CN de convergence de $\sum \ln(1+u_n)$**
- **1 pt : critère d'équivalence des SATP (rédaction correcte)**

c) Démontrer que la quantité $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe si, et seulement si, $\prod_{n=0}^{+\infty}(1-u_n)$ existe et est non nul.

- **3 pts : $\sum \ln(1-u_n)$ convergente $\Leftrightarrow$ $\sum u_n$ convergente**
  - × **1 pt : (⇒) comme $\sum \ln(1-u_n)$ CV, $\lim_{n\to+\infty}\ln(1-u_n)=0$ donc $\ln(1-u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-u_n$**
  - × **1 pt : (⇐) comme $\sum u_n$ CV, $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ donc $\ln(1-u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-u_n$**
  - × **1 pt : théorème d'équivalence des SATP**
- **1 pt : comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<1$, $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<1-u_n<1$ et on applique *2.a)*.**
  Ainsi $\prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$ existe et $\prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\sum \ln(1-u_n)$ convergente

Partie II

3. Démontrer l'existence et calculer les valeurs de : $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$, $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$.

- **3 pts : $\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\frac{1}{2}$**
  - × **1 pt : $\prod_{k=2}^{2p}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2p-1+(-1)^{2p}}{2p-1}\times\frac{2p+(-1)^{2p+1}}{2p}=\frac{1}{2}$**
  - × **1 pt : $\prod_{k=2}^{2p+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2p+1}{2p}$**
  - × **1 pt : par propriété de recouvrement, la suite $\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$**
- **6 pts : $\prod_{k=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=0$**
  - × **0 pt : $\ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=0$**
  - × **1 pt : $\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\left(-\frac{1}{2n}\right)+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$**
  - × **1 pt : la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge par CSSA (dont 1 pt par les hypothèses)**
  - × **1 pt : en notant $w_n=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, la série $\sum w_n$ CV par critère de domination**
  - × **1 pt : DV de la série car son tg est la somme des tg d'une série CV + DV**
  - × **1 pt : comme $\sum \frac{-1}{2n}$ est à termes $\leqslant 0$, la suite des somme partielles tend vers $-\infty$**
  - × **1 pt : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)=-\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\right)=0$**

4. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| < 1$ ET $\sum u_n$ CV

a) Montrer que les séries $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum {u_n}^2$ sont de même nature.

- **1 pt : comme $\sum u_n$ CV, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{{u_n}^2}{2}$**
- **1 pt : par critère d'équivalence des SATN, $\sum \big(\ln(1+u_n)-u_n\big)$ et $\sum {u_n}^2$ de même nature**
- **1 pt : $\ln(1+u_n) - u_n = \ln(1+u_n) + (-u_n)$ donc $\sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big)$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature**

b) En déduire que $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe. Puis démontrer que $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n) = 0$ si, et seulement si, la série $\sum {u_n}^2$ est divergente.

- **2 pts : cas $\sum {u_n}^2$ CV**
  - × **1 pt : alors la série $\sum \ln(1+u_n)$ de somme S**
  - × **1 pt : $\exp\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right) = \prod\limits_{k=0}^{n} \exp\big(\ln(1+u_k)\big) = \prod\limits_{k=0}^{n} (1+u_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^S > 0$**
- **3 pts : cas $\sum {u_n}^2$ DV**
  - × **1 pt : $\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{{u_n}^2}{2}$ $(\leqslant 0)$ (car $\sum \ln(1+u_n)$ CV et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$**
  - × **1 pt : $\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$**
  - × **1 pt : comme $\ln(1+u_k) = \big(\ln(1+u_k) - u_k\big) + u_k$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right) = 0$**

Partie III

5. Soit (a_n) la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{\begin{array}{lcl} a_{2n} & = & \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}, \\[2ex] a_{2n+1} & = & -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array}\right.$$

a) Étudier la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum {a_n}^2$.

- **0 pt : on note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite des sommes partielles de $\sum a_n$ et $\sum {a_n}^2$**
- **2 pts :**
  - × **1 pt : $A_{2m} = \sum\limits_{\ell=1}^{2m} a_\ell = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(-\cancel{\dfrac{1}{\sqrt{k}}} + \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{k}}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}} \right) = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k\sqrt{k}}$**
  - × **1 pt : $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $A_{2m} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$**
- **2 pts :**
  - × **1 pt : $B_{2m} = 2\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} + 2\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k\sqrt{k}} + 3\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^2} + 2\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^2\sqrt{k}} + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^3}$**
  - × **1 pt : $B_{2m} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ comme dans le point précédent**

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod_{n=3}^{+\infty} (1 + a_n)$.

- **1 pt :** $C_{2m} = \prod_{\substack{\ell \in [\![3, 2m]\!] \\ \ell \textbf{ impair}}} \big(1 + a_\ell\big) \times \prod_{\substack{\ell \in [\![3, 2m]\!] \\ \ell \textbf{ pair}}} \big(1 + a_\ell\big) = \prod_{k=2}^{m} \Big(\big(1 + a_{2k-1}\big) \big(1 + a_{2k}\big) \Big)$
- **1 pt :** $\big(1 + a_{2k-1}\big) \big(1 + a_{2k}\big) = 1 - \dfrac{1}{k^2}$ **donc** $C_{2m} = \prod_{\ell=3}^{2m} \big(1 + a_\ell\big) = \prod_{k=2}^{m} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $C_{2m+1} = \prod_{k=2}^{2m} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right) \times \left(1 + \dfrac{-1}{\sqrt{m+1}}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2} \times 1$

6. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant les deux conditions suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ \big|u_n\big| < 1 \\ \text{La série } \sum u_n \text{ est convergente} \end{array}\right.$$

a) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum {u_n}^2$ est convergente.

- **1 pt :** $(\Rightarrow)$ **on suppose** $\sum u_n$ **CV. Ainsi** (u_n) **vérifie les conditions de *4.***
  Comme $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) \neq 0$ **alors** $\sum {u_n}^2$ **CV**
- **3 pts :** $(\Leftarrow)$ **on suppose** $\sum {u_n}^2$ **CV**
  × **1 pt : comme** $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) \neq 0$**,** $\sum \ln(1 + u_n)$ **CV et** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  × **1 pt :** $\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{{u_n}^2}{2} (\leqslant 0)$ **donc** $\sum (\ln(1+u_n) - u_n)$ **et** $\sum {u_n}^2$ **de même nature (CV)**
  × **1 pt :** $u_n = \ln(1 + u_n) - \big(\ln(1 + u_n) - u_n\big)$ **donc** $\sum u_n$ **CV**

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ si, et seulement si, la série $\sum {u_n}^2$ est divergente.

- **1 pt :** $(\Rightarrow)$ **on suppose** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ **donc** $\sum u_n$ **DV et donc** $\sum {u_n}^2$ **DV (question précédente)**
- **3 pts :** $(\Leftarrow)$ **on suppose** $\sum {u_n}^2$ **DV**
  × **1 pt : comme** $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) \neq 0$**,** $\sum \ln(1 + u_n)$ **CV et** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  × **1 pt :** $\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{{u_n}^2}{2} (\leqslant 0)$ **donc** $\sum (\ln(1+u_n) - u_n)$ **et** $\sum {u_n}^2$ **de même nature (DV)**
  × **1 pt :** $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + u_k) - \sum_{k=0}^{n} \big(\ln(1 + u_k) - u_k\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Partie IV

On note $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{\begin{array}{lcl} s_{2m-1}(x) & = & \left(1 - \dfrac{x}{m\,\pi}\right) \exp\left(\dfrac{x}{m\,\pi}\right) \\ s_{2m}(x) & = & \left(1 + \dfrac{x}{m\,\pi}\right) \exp\left(-\dfrac{x}{m\,\pi}\right) \end{array}\right.$$

7. Montrer que $S(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} s_k(x)$ existe pour toute valeur de x et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$, $S(x) \neq 0$.

- **1 pt :** $V_{2m}(x) = \prod_{\ell=1}^{2m} s_\ell(x) = \prod_{\substack{\ell \in [\![1, 2m]\!] \\ \ell \textbf{ impair}}} s_\ell(x) \times \prod_{\substack{\ell \in [\![1, 2m]\!] \\ \ell \textbf{ pair}}} s_\ell(x) = \left(\prod_{k=1}^{m} s_{2k-1}(x) \right) \times \left(\prod_{k=1}^{m} s_{2k}(x) \right)$
- **1 pt :** $= \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right)$
- **1 pt : si** $x \in \pi\,\mathbb{Z}^*$**,** $V_m(x) = 0$
- **4 pts : si** $x \notin \pi\,\mathbb{Z}^*$**,**
  - × **1 pt :** $0 < 1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \leqslant 1$ **à partir d'un certain rang**
  - × **1 pt :** $V_{2m}(x) = \prod_{k=1}^{k_0-1} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \times \prod_{k=k_0}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right)$
  - × **1 pt :** $w_m(x) = \prod_{k=k_0}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^S$ **car la série** $\sum_{n \geqslant k_0} \ln \left(1 - \left(\frac{x}{n\,\pi} \right)^2 \right)$ **CV**
  - × **0 pt : ainsi** $\big(V_{2m}(x) \big)$ **CV, de limite notée** $V(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right)$
  - × **1 pt :** $V_{2m+1}(x) = V_{2m}(x) \times s_{2m+1}(x) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} V(x) \times 1$

8. On suppose : $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $T_n(x) = \prod_{k=1}^{2n} s_k(x)$.

Calculer : $\lim_{n \to +\infty} \frac{T_n(x + 2\pi)}{T_n(x)}$.

- **1 pt : comme** $x \notin \pi\,\mathbb{Z}$**, alors pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $T_n(x) = \prod_{k=1}^{2n} s_k(x) \neq 0$**.**
- **1 pt :** $T_n(y) = V_{2n}(y) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k\,\pi)^2} \times \prod_{k=1}^{n} (k\,\pi - y) \times \prod_{k=1}^{n} (k\,\pi + y)$
- **2 pts :** $\frac{T_n(x + 2\,\pi)}{T_n(x)} = \ldots = \frac{x\, \cancel{(\pi + x)}}{\cancel{(\pi + x)}\, (2\,\pi + x)} \times \frac{(\cancel{n\pi}) \times (\cancel{n\pi})}{(\cancel{n\pi}) \times (\cancel{n\pi})} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2\,\pi + x}$

9. En déduire que la fonction $x \mapsto x\,S(x)$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, est périodique de période 2π.

- **2 pts : cas** $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$
  - × **1 pt : comme** $\lim_{n \to +\infty} V_n(y) = \lim_{n \to +\infty} V_{2n}(y)$**, on en déduit :**
  $$\lim_{n \to +\infty} \frac{T_n(x + 2\,\pi)}{T_n(x)} = \frac{\lim_{n \to +\infty} T_n(x + 2\,\pi)}{\lim_{n \to +\infty} T_n(x)} = \frac{S(x + 2\,\pi)}{S(x)}$$
  - × **1 pt :** $\frac{T_n(x + 2\,\pi)}{T_n(x)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2\,\pi + x}$ **(q. précédente) donc** $(x + 2\,\pi)\ S(x + 2\,\pi) = x\ S(x)$
- **1 pt : si** $x \in \pi\,\mathbb{Z}$**,** $h(x + 2\,\pi) = (x + 2\,\pi)\ S(x + 2\,\pi) = (x + 2\,\pi) \times 0 = 0$

10. On admet la propriété suivante :

$$\forall x \in \,]-1, 0[\, \cup \,]0, 1[, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \cos(xt) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \cos(nt) \qquad (*)$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\cos(n\,\pi)$.

- **1 pt : pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** $\cos(n\,\pi) = (-1)^n$

b) En utilisant la propriété $(*)$, calculer pour tout $x \in \,]-1,1[$ la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$.

- **1 pt : si** $x \neq 0$**,** $(*)$ **en** $t=\pi$**,** $\cos(\pi\, x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{2x}{x^2-n^2} \, (-1)^n$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \left(\cos(\pi\, x) - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) = \pi \, \frac{\cos(\pi\, x)}{\sin(\pi\, x)} - \cancel{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}} \, \cancel{\frac{\sin(\pi x)}{\pi}} \, \frac{1}{x}$
- **1 pt : si** $x = 0$**, alors** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$

c) En déduire, pour tout $x \in \,]-\pi,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2\,\pi^2 - n^2} = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times \frac{x}{\pi}}{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - n^2} = \pi \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\pi}{x} \right)$ **d'après la relation précédente en** $\frac{x}{\pi}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times \frac{x}{\pi}}{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - n^2} = \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi\ n^2} \right)$
- **1 pt : si** $x = 0$**, alors** $\dfrac{2x}{x^2 - \pi\ n^2} = \dfrac{0}{-\pi\ n^2} = 0$

d) Montrer que, pour tout $x \in \,]-\pi,\pi[$, la série $\sum\ \phi_n(x)$ est convergente, où on note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi_n(x) \ = \ \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$$

On note alors : $\phi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(x)$.

- **1 pt : si** $x = 0$ **alors** $\phi_k(x) = \ln\left(1 - \dfrac{0}{n^2\,\pi^2}\right) = \ln(1) = 0$ **et** $\sum\ \ln\left(1 - \dfrac{0}{n^2\,\pi^2}\right)$ **CV, et est de somme nulle**
- **1 pt : si** $x \neq 0$ **alors** $\phi_n(x) \ = \ \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x^2}{n^2\,\pi^2} = -\dfrac{x^2}{\pi^2}\ \dfrac{1}{n^2}$
- **1 pt :** $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ **et théorème de domination des SATP**

e) Calculer $\phi(0)$.

- **1 pt : d'après la q précédente,** $\sum\ \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$ **CV pour** $x = 0$ **et de somme** 0

f) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`

Prouver que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et démontrer, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$, $\phi'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \phi'_n(x)$.

- **1 pt : ϕ_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et $\phi'_n(x) = \ldots = \dfrac{\cancel{n^2\,\pi^2}}{n^2\,\pi^2 - x^2} \times \dfrac{-2x}{\cancel{n^2\,\pi^2}}$**
- **1 pt : *(0)* $\sum\ \phi_n$ converge simplement sur $]-\pi,\pi[$**
- **4 pts : *(1)* convergence normale de $\sum\ \phi'_n$**
  - **1 pt : $\left|\,\phi'_n(x)\,\right| = \dfrac{2 \times |x|}{\left|\,n^2\,\pi^2 - x^2\,\right|}$**
  - **1 pt : comme $-\pi < x < \pi$, ..., $\dfrac{2\,|x|}{n^2\,\pi^2 - x} \leqslant \dfrac{2\,|x|}{n^2\,\pi^2 - \pi^2} \leqslant \dfrac{2\,\pi}{\left(n^2 - 1\right)\pi^2}$**
  - **1 pt : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \left\|\,\phi'_n\,\right\|_{\infty,]-\pi,\pi[} \leqslant \dfrac{2\,\pi}{\left(n^2-1\right)\pi^2}$**
  - **1 pt : théorème de comparaison par inégalité des SATP**

g) En déduire, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$, une expression de $\phi'(x)$ sans le symbole $\sum$.

- **1 pt : si $x \in\,]-\pi,\pi[$, $\phi'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-2x}{n^2\,\pi^2 - x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - n^2\,\pi^2} = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$**

h) Déduire de ce qui précède la valeur de $\phi(x)$ pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$.

- **1 pt : $\displaystyle\int_A^x \phi'(t)\ dt = \ln\left(\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\right) - \ln\left(\left|\frac{\sin(A)}{A}\right|\right)$**
- **1 pt : $\underset{A\to 0}{\longrightarrow} \ln\left(\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right|\right)$**
- **1 pt : enfin si $x \in\,]-\pi,\pi[\ \setminus\{0\}$, alors x et $\sin(x)$ ont même signe**
- **0 pt : finalement, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$: $\phi(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$**

i) En déduire le développement du sinus découvert par Léonhard Euler (1707-1783) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi x) = \pi\, x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

- **1 pt : $\phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \phi_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right)^2\right) = \lim\limits_{m\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \ln\left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right)^2\right)\right)$**
  $= \lim\limits_{m\to+\infty}\left(\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{2m} s_k(x)\right)\right) = \ln\left(\,V(x)\,\right) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right)^2\right)\right)$
- **1 pt : donc $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right)^2\right) = \dfrac{\sin(x)}{x}$**
- **1 pt : l'égalité précédente est aussi vérifiée en 0, en $-\pi$ et en π (par calcul)**
- **1 pt : enfin si $y \in \mathbb{R}$, alors il existe $j \in \mathbb{Z}$ et $x \in [-\pi,\pi]$ tels que : $y = x + j\,2\pi$**
  alors $h(y) = h(x + j\,2\pi) = h(x) = x\,S(x) = \sin(x) = \sin(x + j\,2\pi) = \sin(y)$

Partie V

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction de la variable réelle x, définie pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier strictement négatif, par :

$$\forall x \notin \mathbb{Z}_-^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ g_n(x) \ = \ \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1+\frac{x}{n}}$$

11. Montrer que, pour tout $x \notin \mathbb{Z}_-^*$, $G(x) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ existe et vérifie : $G(x) \neq 0$.

- **1 pt : pour** $n > \lceil -x_0 \rceil$**,** $G_n(x_0) = \prod\limits_{k=1}^{\lceil -x_0 \rceil} g_k(x_0) \times \sum\limits_{k=\lceil -x_0 \rceil+1}^{n} \left(\dfrac{x_0}{k} \ - \ \ln\left(1+\dfrac{x_0}{k}\right) \right)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k \geqslant \lceil -x_0 \rceil+1} \left(\dfrac{x_0}{n} \ - \ \ln\left(1+\dfrac{x_0}{n}\right) \right)$ **CV par théorème d'équivalence des SATP**
- **0 pt :** $G(x_0) = \prod\limits_{k=1}^{\lceil -x_0 \rceil} g_k(x_0) \times \exp\left(\sum\limits_{k=\lceil -x_0 \rceil+1}^{+\infty} \ln\big(g_k(x_0)\big) \right)$
- **1 pt :** $\prod\limits_{k=1}^{\lceil -x_0 \rceil} g_k(x_0) \neq 0$ **et** $\exp\left(\sum\limits_{k=\lceil -x_0 \rceil+1}^{+\infty} \ln\big(g_k(x_0)\big) \right) > 0$ **donc** $G(x_0) \neq 0$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $G_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$. Montrer que l'on a :

$$\ln\big(G_n(1)\big) \ = \ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$$

En déduire la suite $\left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)\right)$ tend vers une limite finie γ strictement positive lorsque $n \to +\infty$.

- **1 pt :** $\ln\big(G_n(1)\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$
- **1 pt :** $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\big(G(1)\big)$ **car** $1 \notin \mathbb{Z}_-$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\big(G(1)\big)$
- **1 pt :** $\ln\big(G(1)\big) \geqslant \ln\big(G_1(1)\big) > 0$

13. Pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier négatif ou nul, on pose :

$$\Gamma(x) \ = \ \frac{\mathrm{e}^{-\gamma x}}{x}\, G(x)$$

a) Calculer $\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

b) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **1 pt :**

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

14. Montrer que pour toute valeur de x qui n'est pas dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$G_n(x)\, G_n(-x) \;=\; \frac{1}{T_n(\pi\, x)}$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

15. En déduire la formule des compléments :

$$\forall x \notin \mathbb{Z}, \quad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi\, x)}$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

16. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbf{e}^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\mathbf{e}^{-x_0\, t}\right)$
- **1 pt : théorème de domination des intégrales g. de fonctions continues positives**

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt : pour tout** $t \in\,]0,+\infty[$**,** $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\ \mathbf{e}^{-t\,x}$ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $A = \,]0,+\infty[$ **et** $\underline{h}_t{}'(x) = \dfrac{-t}{\sqrt{t+1}}\ \mathbf{e}^{-t\,x}$
- **1 pt :** ***(0)*** **pour tout** $x \in A$**,** $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = h(x,t)$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$
- **1 pt :** ***(1)*** $\left|\,\underline{h}_t'(x)\,\right| = \left|\dfrac{-t}{\sqrt{t+1}}\ \mathbf{e}^{-t\,x}\right| = |-1|\ \left|\dfrac{t}{\sqrt{t+1}}\right|\ \left|\mathbf{e}^{-x\,t}\right| = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}\ \mathbf{e}^{-xt}$
- **1 pt :** $\left|\,\underline{h}_t'(x)\,\right| = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}\ \mathbf{e}^{-xt} \;\leqslant\; t\ \mathbf{e}^{-a\,t}$ **si** $x \in [a,b]$
- **0 pt :** $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t}{\sqrt{t+1}}\ \mathbf{e}^{-t\,x}\ dt$

3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est la solution (*on pourra réaliser une IPP*).

- **1 pt : sous réserve** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt = \left[\ 2\sqrt{1+t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ \right]_0^{+\infty} + 2x \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt$

- **1 pt : le crochet est convergent ainsi que l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt$
- **0 pt :** $2x \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt = f(x)+2$
- **1 pt :** $-f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\ \mathbf{e}^{-x\,t}\ dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \mathbf{e}^{-x\,t}$
  et $-2x\,f'(x) = \big(1-2x\big)\ f(x)+2$