# DS1

## Exercice 1

### Partie A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

*1.* *a)* Montrer : $\forall t \in \,]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1) - \ln(t) \leqslant \dfrac{1}{t}$.

- **1 pt : pour tout** $t \in \,]0,+\infty[$**, si** $x \in [t, t+1]$**,** $\dfrac{1}{t} \geqslant \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{t+1}$ **(par décroissance de la fonction inverse sur** $]0,+\infty[$**)**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale** $\displaystyle\int_t^{t+1} \frac{1}{t}\,dx \geqslant \int_t^{t+1} \frac{1}{x}\,dx \geqslant \int_t^{t+1} \frac{1}{t+1}\,dx$

*b)* En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée $\gamma$.

- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \big(\ln\big(n+2\big) - \ln\big(n+1\big)\big)$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{n+1} - \big(\ln\big(n+2\big) - \ln\big(n+1\big)\big) \geqslant 0$ **en appliquant l'inégalité (de droite) précédente en** $t = n+1 > 0$
- **1 pt : de même** $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$
- **1 pt :** $v_n - u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$

*2.* Montrer alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

- **1 pt : par sommation** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
- **1 pt : en réordonnant** $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$
- **1 pt :** $\ln\big(n+1\big) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln\big(n+1\big) - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$
  **et théorème d'encadrement**

*3.* *a)* Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \dfrac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leqslant \dfrac{1}{2}\,(v_n - u_n)$.

- **1 pt :** $u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty}\, u_n = \liminf\limits_{n\to+\infty}\, v_n \leqslant v_n$
- **1 pt :** $|\,v_n - u_n\,| = \big|\ (v_n - \gamma) - (u_n - \gamma)\ \big| \geqslant \big|\ |v_n - \gamma| - |u_n - \gamma|\ \big|$ **par inégalité triangulaire**
- **1 pt :** $= \big|\ u_n + v_n - 2\,\gamma\ \big|$ **car** $u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$

*b)* En déduire une fonction **Python** (que l'on nommera `approx`) qui prend pour argument une précision `eps` et qui renvoie une approximation du réel $\gamma$ à `eps` près.

- **1 pt :** $\left|\dfrac{u_n+v_n}{2}-\gamma\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
- **3 pts :**

```python
import numpy as np
def approx(eps) :
  k = 1
  S = 1
  while 1 / (2 * np.log(1 + 1/k)) > eps :
    k = k + 1
    S = S + 1/k
  N = k
  g = S - np.log(N+1)/2 - np.log(N)/2
  return g
```

## Partie B : Étude d'une fonction définie par une série

*4.* Montrer que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+x}\right)$ converge.

- **1 pt : cas** $x=0$
- **2 pts : si** $x \neq 0$ **:** $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k^2} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{x}{k\,(k+x)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{k^2}$ **et** $\sum \dfrac{x}{k^2}$ **convergente . . .**

On pose alors, pour tout $x \in [0,+\infty[$ : $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+x}\right)$.

*5.* *a)* Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1)=1$.

- **1 pt :** $S(0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+0}\right)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

*b)* Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum\limits_{k=n+1}^{2n+1}\dfrac{1}{k}=2-\dfrac{2}{2n+1}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{1+\frac{k}{n}}$.

- **2 pts :** $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+\frac{1}{2}}\right)=2-2\sum\limits_{k=n+1}^{2n+1}\dfrac{1}{k}$
- **2 pts :** $2-2\sum\limits_{k=n+1}^{2n+1}\dfrac{1}{k}=2-\dfrac{2}{2n+1}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{1+\frac{k}{n}}$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt$ **où** $f : t \mapsto \dfrac{2}{1+t}$ **est continue sur** $[0,1]$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{2}{1+t}\ dt = 2\ \left(\ln(2)-\cancel{\ln(1)}\right)$
- **0 pt :** $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=2-2\ \ln(2)$

**soit par calcul direct, soit par récurrences (conseillées)**

***6. a)*** Montrer : $\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ S(y) - S(x) = (y-x) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)\,(k+y)}$.

- **1 pt :** $S_n(x) - S_n(y) = (x-y) \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+x)\,(k+y)}$
- **1 pt :** $S(x) - S(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Big(S_n(x) - S_n(y)\Big) = (y-x) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)\,(k+y)}$

***b)*** En déduire que $S$ est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$.

- **1 pt :** $S(y) - S(x) = (y-x) \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)\,(k+y)} \geqslant 0$ **si** $y \geqslant x$

***c)*** Montrer :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \forall h \in \mathbb{R},\ x+h \geqslant 0\ \Rightarrow\ \left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\right| \leqslant |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

En déduire que $S$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et : $\forall x \in [0,+\infty[,\ S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2}$.

- **1 pt :** $\left| \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2} \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{-h}{(k+x)^2\,(k+x+h)} \right|$
- **1 pt :** $\leqslant |h| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2\,(k+x+h)}$ **par inégalité triangulaire**
- **1 pt :** $\leqslant |h| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2 \times k}$ **(car** $(k+x)^2 \geqslant k^2$ **et** $k+x+h \geqslant k$**)**
- **1 pt :** $0 \leqslant \left|\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2}\right| \leqslant |h| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$

  $0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ **et** $|h| \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$**, puis par encadrement**
- **0 pt : ainsi** $S$ **est dérivable sur** $[0,+\infty[$ **et** $S'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2}$

On admet que $S'$ est également continue sur $[0,+\infty[$.

***7. a)*** Montrer : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ S(x+1) = S(x) + \dfrac{1}{x+1}$.

- **1 pt : si** $x \geqslant 0$**,** $S(x+1) - S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left( \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+(x+1)}\right) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}\right) \right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{n+x+1} = \dfrac{1}{1+x}$

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

- **2 pts : par récurrence ou** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \Big(S(k+1) - S(k)\Big) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k+1}$

***c)*** En utilisant la croissance de la fonction $S$ sur $[0, +\infty[$, montrer : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

- **1 pt :** $S(\lfloor x \rfloor) \leqslant S(x) \leqslant S(\lfloor x \rfloor + 1)$ **par croissance de** $S$
- **1 pt :** $1 = \dfrac{S(\lfloor x \rfloor)}{S(\lfloor x \rfloor)} \leqslant \dfrac{S(x)}{S(\lfloor x \rfloor)} \leqslant \dfrac{S(\lfloor x \rfloor + 1)}{S(\lfloor x \rfloor)}$
- **1 pt :** $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} S(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\lfloor x \rfloor)$
- **1 pt :** $\dfrac{\ln(\lfloor x \rfloor + 1)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} = \dfrac{\ln\left(\lfloor x \rfloor \, (1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor})\right)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} = \dfrac{\ln(\lfloor x \rfloor) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} = 1 + \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)}{\ln(\lfloor x \rfloor)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

***8. a)*** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx$, le réel $u_n$ étant défini dans la **Partie A**.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{1}{k}\ dx - \int_0^1 \frac{1}{k+x}\ dx\right)$
- **1 pt :** $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \left(\ln(n+1) - \cancel{\ln(1)}\right)$

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 S(x)\ dx - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 S(x)\ dx - u_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) dx$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x} \leqslant \dfrac{x}{k^2}$
- **1 pt :** $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) dx \leqslant \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2}\right) dx$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2}\right) dx = \int_0^1 x \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) dx = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) \int_0^1 x\ dx = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) \frac{x^2}{2}$

***c)*** Conclure : $\displaystyle\int_0^1 S(x)\ dx = \gamma$.

- **1 pt : thorème d'encadrement avec** $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

## Exercice 2

*1.* Donner un exemple, d'une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel $K$ élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple $(x,y)$ de réels, on ait :

$$\mid f(x)-f(y) \mid \leqslant K \times \mid x-y \mid \qquad (*)$$

- **1 pt :** $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\, x$ **convient**

*2.* Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $0 \leqslant \left|f(x)-f(x_0)\right| \leqslant K\ \left|x-x_0\right|$ **donc par théorème d'encadrement :** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

*3.* À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x)=x$ admet au plus une solution.

- **1 pt :** $\left|a-b\right| = \left|f(a)-f(b)\right| \leqslant K \times \left|a-b\right|$
- **1 pt : donc** $1 \leqslant K$**, absurde !**

*4.* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel $n$.

*a)* Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$|u_{n+1}-u_n| \leqslant K^n \times |u_1-u_0|$$

- **2 pts : par récurrence (1 pt initialisation / 1 pt hérédité)**

*b)* Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1}-u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $a$ sa limite.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $0 \leqslant \left|u_{n+1}-u_n\right| \leqslant K^n \left|u_1-u_0\right|$ **et théorème de comparaison**
- **1 pt : par télescopage** $u_n = u_0 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}-u_k\right)$ **admet une limite finie**

*c)* Conclure que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution.

- **1 pt :** $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$ **et** $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ **donc** $a = f(a)$
- **1 pt : et l'équation** $f(x)=x$ **admet au plus une solution**

*5.* On désigne par $n$ et $p$ des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

*a)* Justifier que l'on a : $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1}-u_i| \leqslant \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1-u_0|$.

- **1 pt :** $\left|u_{i+1}-u_i\right| \leqslant K^i \left|u_1-u_0\right|$ **+ sommation**

*b)* En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p}-u_n| \leqslant K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} \times |u_1-u_0|$$

- **1 pt :** $\left|u_{n+p}-u_n\right| = \left|\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} \left(u_{i+1}-u_i\right)\right|$ **par télescopage**
- **1 pt :** $\leqslant \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} \mid u_{i+1}-u_i \mid$ **par inégalité triangulaire**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i = \dfrac{K^n - K^{n+p}}{1-K}$

***c)*** Établir enfin l'inégalité suivante :

$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|$$

- **1 pt : comme $K \in ]0,1[$, $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{1-K^p}{1-K} = 0$ et passage à la limite (inégalité précédente)**

***6.*** Étude d'un exemple : on considère la fonction $f$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

***a)*** Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel $t$.

- **1 pt : $f$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $f'(t) = -\dfrac{\mathbf{e}^t}{(1+\mathbf{e}^t)^2}$**
- **1 pt : $f''(t) = \mathbf{e}^t \dfrac{\mathbf{e}^t - 1}{(1+\mathbf{e}^t)^3}$**

***b)*** Déterminer les variations de $f'$ sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}$$

- **1 pt : $f''(t) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^t - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$**
- **1 pt : $\mathbf{e}^t \dfrac{\mathbf{e}^t - 1}{(1+\mathbf{e}^t)^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathbf{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathbf{e}^t \dfrac{\mathbf{e}^t - 1}{(1+\mathbf{e}^t)^3} \underset{t\to-\infty}{\sim} \mathbf{e}^t \dfrac{-1}{(1)^3} = -\mathbf{e}^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$**
- **1 pt : pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $-\dfrac{1}{4} \leqslant f'(t) \leqslant 0 \leqslant \dfrac{1}{4}$ et donc $\mid f'(t) \mid \leqslant \dfrac{1}{4}$**

***c)*** En déduire que $f$ est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

- **1 pt : $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|f'(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc, par inégalité des accroissements finis : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left| f(x) - f(y) \right| \leqslant \dfrac{1}{4} \mid x - y \mid$**

***d)*** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel $n$. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours $a$ sa limite.

- **1 pt : $f$ est $\dfrac{1}{4}$-contractante donc $(u_n)$ est convergente d'après *4.b)***

***e)*** Écrire une fonction **Python** (on la nommera `suite`) qui, pour une valeur donnée de $n$, renvoie la valeur de $u_n$.

- **3 pts :**

```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u
```

***f)*** En s'appuyant sur le résultat de la question ***5.c)***, établir que $u_n$ est une valeur approchée de $a$ à moins de $10^{-3}$ près dès que $n$ vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.

- **1 pt :** $\mid u_n - a \mid \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times \mid u_1 - u_0 \mid = \dfrac{2}{3}\ \dfrac{1}{4^n}$
- **1 pt : on cherche $N$ tel que** $\mid u_N - a \mid \ \leqslant\ \dfrac{2}{3}\ \dfrac{1}{4^N}\ \leqslant\ 10^{-3}$

***g)*** En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de $a$ qui en résulte.

- **2 pts :**

```
import numpy as np
x = np.log(2000 / 3) / np.log(4)
N = int(np.ceil(x))
print('Une valeur approchée à 10**(-3) près de a est :', suite(N))
```

# Exercice 3 /40

## Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \ =\ \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

***1.*** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

- **3 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $u_n > 0$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité**
- **0 pt :** $(v_n)$ **bien définie**

***2. a)*** Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **2 pts : critère de négligeabilité**
  - × **0 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
  - × **1 pt :** $\dfrac{\ln(n)}{2^n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
  - × **1 pt : La série** $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ **est une série de Riemann d'exposant** $2$ $(2 > 1)$**. Elle est donc convergente.**

***b) (i)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de $n$.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_n - v_{n-1})$.

- **1 pt :** $v_k - v_{k-1} = -\dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt : d'après la question précédente,** $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ **convergente, donc** $\sum\limits_{k\geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$ **convergente.**

***(ii)*** En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\ell \;=\; \sigma + v_0$$

- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_0$
- **1 pt :** $(v_n)$ **converge d'après la question précédente**
- **1 pt : par passage à la limite** $\ell = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0$

***3.*** On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

***a)*** Déterminer le signe de $\ell$.
*On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.*

- **2 pts :** $\ell > 0 \;\Leftrightarrow\; u_0 > \mathbf{e}^{-\sigma}$ **(dont 1 pt pour la stricte croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$**)**
- **0 pt :** $\ell < 0 \;\Leftrightarrow\; u_0 < \mathbf{e}^{-\sigma}$

***b)*** En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : si** $u_0 > \mathbf{e}^{-\sigma}$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- **1 pt : si** $u_0 < \mathbf{e}^{-\sigma}$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

***4.*** On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

***a) (i)*** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

- **1 pt :** $v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $v_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$

***(ii)*** Retrouver dans ce cas la valeur de la limite $\ell$ de la suite $(v_n)$.

- **1 pt : comme** $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ **convergente d'après *2.a)* :** $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

***b) (i)*** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$.

- **1 pt :** $\ln(u_n) = 2^n\, v_n = 2^n \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} = \dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\dfrac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant \dfrac{\ln(n+1)}{2}$ **car** $\sum\limits_{k=n+2}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0$ **(en tant que somme de réels positifs)**

***(ii)*** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- **1 pt : par croissance de** $\exp$ **sur** $\mathbb{R}$ **:** $u_n \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

## Partie II : Approximation de $\sigma$

***5.*** ***a)*** Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \; \ln(x) \leqslant x - 1$.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : la fonction** $g : x \mapsto \ln(x)$ **est concave sur** $]0, +\infty[$
  - × **1 pt : sa courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ **se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse** $1$
  - × **1 pt : équation de la tangente :** $y = g(1) + g'(1)\,(x - 1) = x - 1$

***b)*** En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

- **1 pt :** $\dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \dfrac{k-1}{2^k}$ **d'après la question précédente et car** $2^k > 0$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} \dfrac{k-1}{2^k}$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=n+1}^{m} (k-1) \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{m-n} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1) \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sum\limits_{k=1}^{m-n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k \geqslant 1} k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ **et** $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ **série géométrique dérivée première et série géométrique de raison** $\dfrac{1}{2} \in \,]-1, 1[$**. Elles sont donc convergentes.**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=n+1}^{m} (k-1) \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1) \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n+1}{2^n}$

***6.*** Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \left| \sigma - \left( -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$.

- **1 pt :** $\left| \sigma - \left( -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$
- **1 pt :** $\left| \sigma - \left( -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \dfrac{n+1}{2^n}$ **d'après la question précédente**

***7.*** Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function sigma = approx(eps)` qui, prenant en argument un réel $\varepsilon$ strictement positif, renvoie une valeur approchée de $\sigma$ à $\varepsilon$ près.

- **3 pts :**

```
import numpy as np
def approx(eps) :
    k = 0
    S = 0
    while (k+1) / 2**k > eps :
      k = k + 1
      S = S + np.log(k) / 2**k
    sigma = -S
    return sigma
```