DS1

Pour toute suite réelle ou complexe (u_n), pour tout $q \in \mathbb{N}$, le symbole $\prod\limits_{k=q}^{+\infty} u_k$ désigne la limite, si elle existe, de la suite (p_n) définie par :

$$\forall n \geqslant q, \quad p_n = \prod_{k=q}^{n} u_k = u_q \times u_{q+1} \times \cdots \times u_n$$

Commentaire

- Le produit infini $\prod\limits_{k=q}^{+\infty} u_k$ n'est pas un objet simple à appréhender. Cette notion n'est d'ailleurs pas au programme de PSI, c'est pourquoi l'énoncé fournit sa définition.
  Il faut à tout prix garder en tête que, comme le précise l'énoncé, la quantité $\prod\limits_{k=q}^{+\infty} u_k$ n'a de sens `QUE SI` la suite $\left(\prod\limits_{k=q}^{n} u_k\right)_{n \geqslant q}$ est convergente.
- On pourra rapprocher la notion de produit infini de celle de somme de série convergente. Comme pour le produit, la somme $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=q}^{n} u_k\right)_{n \geqslant q}$ est convergente (ou encore, lorsque la série $\sum u_n$ est convergente).

Les parties IV et V sont associées et indépendantes des parties I, II et III.

Par ailleurs, on définit les ensembles suivants :

× l'ensemble $\pi\,\mathbb{Z}$ est défini par : $\pi\,\mathbb{Z} = \{k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
  On obtient alors, par exemple : $\mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}}]k\,\pi, (k+1)\,\pi[$.

× l'ensemble $\mathbb{Z}_-^*$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs.

Partie I

1. a) Déterminer, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de la quantité $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ sans le symbole $\prod$. En déduire l'existence et la valeur de $\prod\limits_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

Démonstration.

- Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \frac{\cancel{n-1}}{n} \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \ \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}}$$

Commentaire

On aurait pu également proposer une rédaction qui fait appel aux propriétés du symbole $\prod$:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{\prod\limits_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod\limits_{k=2}^{n}k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}k}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

- D'après le point précédent :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La suite $\left(\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$ est donc convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, le produit } \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) \text{ existe et : } \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.}$$

Commentaire

- Rappelons que lorsqu'un énoncé demande de démontrer la convergence d'une série $\sum u_n$ `ET CALCULER SA SOMME`, alors il s'agit toujours de :
  1) calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$,
  2) en déduire que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge et calculer sa limite.
- On agit de la même manière concernant les produits infinis. Plus précisément, lorsque l'énoncé demande de démontrer l'existence `ET CALCULER LE PRODUIT` $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$, alors il s'agit toujours de :
  1) calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le « produit partiel » $\prod\limits_{k=0}^{n} u_k$,
  2) en déduire que la suite $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge et calculer sa limite.
- Remarquons par ailleurs :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 0$$

Ce point peut paraître étonnant au premier abord si on a en tête qu'un produit d'un nombre **fini** de termes est nul si et seulement si l'un des termes est nul. En ce qui concerne les produits infinis de termes, on ne retrouve pas ce résultat. Par exemple :

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et donc} \quad \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2} = 0$$

Multiplier par $\frac{1}{2}$ à chaque étape (c'est-à-dire diviser par 2) rend le produit de plus en plus proche de 0 et finalement égal à 0 asymptotiquement parlant.

□

b) En procédant de façon similaire à la question précédente, démontrer l'existence et calculer les valeurs des quantités suivantes.

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right)$$

Démonstration.

- Commençons par étudier la suite de terme général $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
  - × Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}\\ &= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)\,(k+1)}{k^2}\\ &= \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\times\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{n}\times\left(\frac{\cancel{3}}{2}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\times\frac{n+1}{\cancel{n}}\right) && \textit{(d'après la question précédente)}\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \geqslant 2,\ \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2\,n}.}$$

  - × De plus :

$$\frac{n+1}{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\cancel{n}}{2\,\cancel{n}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi le produit } \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \text{ existe. De plus : } \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2\,n}=\frac{1}{2}.}$$

- Étudions maintenant la suite de terme général $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right)$.
  - × Soit $n \geqslant 2$.

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k\,(k+1)-2}{k\,(k+1)}$$

Or, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}k^2+k-2 &= (k^2-1)+(k-1)\\ &= (k-1)\,(k+1)+(k-1)\\ &= (k-1)\,(k+2)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \frac{k\,(k+1)-2}{k\,(k+1)} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\,(k+2)}{k\,(k+1)} \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+2}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \times \left(\frac{\cancel{4}}{3} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n}} \times \frac{n+2}{\cancel{n+1}}\right) \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{n+2}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \geqslant 2,\ \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \frac{n+2}{3\,n}.}$$

× De plus :

$$\frac{n+2}{3\,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\cancel{n}}{3\,\cancel{n}} = \frac{1}{3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Ainsi le produit } \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{k\,(k+1)}\right) \text{ existe et : } \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{k\,(k+1)}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{3\,n} = \frac{1}{3}.}$$

□

2. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

a) Montrer que la quantité $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe. Puis démontrer que le réel $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ est non nul si, et seulement si, la série $\sum \ln(u_n)$ est convergente.

Démonstration.

- Démontrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe, consiste à démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right)$ est convergente.

  × Tout d'abord, on sait, d'après l'énoncé : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k > 0$.

  On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\prod_{k=0}^{n} u_k > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } \left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) \text{ est minorée par } 0.}$$

  × Il reste alors à démontrer que la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right)$ est décroissante.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\prod_{k=0}^{n+1} u_k - \prod_{k=0}^{n} u_k = \left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) \times u_{n+1} - \prod_{k=0}^{n} u_k = \left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) (u_{n+1} - 1)$$

Commentaire

- On dit qu'une suite (v_n) est croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \geqslant v_n$.
- Il arrive que l'on présente cette propriété à l'aide d'un quotient. Il faut le faire avec vigilance. Sous l'hypothèse que la suite (v_n) est à termes strictement positifs :

$$\text{La suite } (v_n) \text{ est croissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \quad (\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n)$$

  L'équivalence qui apparaît entre parenthèse est obtenue à l'aide de la précédente en multipliant de part et d'autre par $u_n \geqslant 0$. L'hypothèse de signe est donc essentielle et le point ne sera attribué que si elle est présente.

Or :

- d'une part, d'après le point précédent : $\prod\limits_{k=0}^{n} u_k \geqslant 0$,
- d'autre part : $u_{n+1} < 1$. Donc : $u_{n+1} - 1 \leqslant 0$

On en déduit :

$$\prod_{k=0}^{n+1} u_k - \prod_{k=0}^{n} u_k \ \leqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } \left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) \text{ est donc décroissante.}}$$

La suite $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} u_k\right)$ est :

× décroissante,

× minorée par 0.

Elle converge donc vers un réel ℓ vérifiant : $\ell \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la quantité } \prod_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ existe (et est positive ou nulle).}}$$

- D'après le point précédent : $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \geqslant 0$. Ainsi, deux cas se présentent.

× Si $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k > 0$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k \ = \ \ell \ > \ 0$$

Par continuité de la fonction ln en ℓ (car $\ell \in \,]0, +\infty[$), on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) \ = \ \ln(\ell)$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) \ = \ \ln(\ell)$$

On en déduit en particulier que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(u_k)\right)$ est convergente. En d'autres termes, on en conclut que la série $\sum \ln(u_n)$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi si } \prod_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ est non nul, alors la série } \sum \ln(u_n) \text{ est convergente.}}$$

× Si $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = 0$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k \ = \ 0$$

Par composition de limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) \ = \ -\infty$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) \ = \ -\infty$$

Ainsi la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(u_k)\right)$ est divergente. Et donc la série $\sum \ln(u_n)$ est divergente.

On a ainsi démontré que, si $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est nul, alors la série $\sum \ln(u_n)$ est divergente.

$$\boxed{\text{Par contraposée, si la } \sum \ln(u_n) \text{ est convergente alors : } \prod_{k=0}^{+\infty} u_k \neq 0.}$$

Finalement, on a bien démontré que $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est non nul si, et seulement si, la série $\sum \ln(u_n)$ est convergente.

Commentaire

- Soient p et q deux propositions.
  On prendra bien garde à ne pas confondre les propositions :
  - × $q \Rightarrow p$: la proposition **réciproque** de $p \Rightarrow q$,
  - × $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$: la proposition **contraposée** de $p \Rightarrow q$.
- En particulier, les propositions $p \Rightarrow q$ et $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ ont même valeur de vérité.
  Ce n'est pas le cas des propositions $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$. Par exemple, en notant :

  $$p : x \in \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad q : x \in \mathbb{R}$$

  - × $p \Rightarrow q$ est vraie (tout entier est un réel),
  - × $\texttt{NON}(q) \Rightarrow \texttt{NON}(p)$ est vraie (si un nombre n'est pas un réel, ce n'est pas non plus un entier),
  - × $q \Rightarrow p$ est fausse ($\sqrt{2}$ est un réel mais ce n'est pas un entier). □

b) Démontrer que la quantité $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est convergente.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que la quantité $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe.
En s'inspirant de la question précédente, on commencera par démontrer que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente, pour en déduire ensuite que la série $\sum u_n$ est convergente.

× Démontrons que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente.
Comme la quantité $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe, alors la suite $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} (1+u_k)\right)$ est convergente. Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+u_k) \ = \ \ell$$

On remarque de plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + u_n \geqslant 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{k=0}^{n} (1+u_k) & \geqslant & 1 \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} & & \\ \ell & \geqslant & 1 \end{array}$$

Ainsi, par continuité de la fonction ln en $\ell \geqslant 1 > 0$, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right) = \ln(\ell)$$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \ln(\ell)$. On en déduit que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente.

× Démontrons maintenant que la série $\sum u_n$ est convergente.
Puisque la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1+u_n) = 0$. Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. On en déduit :

$$\ln(1+u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

On obtient :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$
- $\ln(1+u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$
- la série numérique $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente.

Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k) \text{ existe, alors la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

($\Leftarrow$) Supposons que la série $\sum u_n$ est convergente.
Toujours en s'inspirant de la question précédente, on commencera par démontrer que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente, pour en déduire ensuite que le produit $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe.

× Démontrons donc que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente.
Tout d'abord, puisque la série $\sum u_n$ est convergente, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. On en déduit :

$$\ln(1+u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

On obtient :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$
- $\ln(1+u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$
- la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente.

× Démontrons maintenant que $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.
Comme la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente, alors il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \ell$$

Par continuité de la fonction exp en $\ell \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\Big(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\Big) \;=\; \mathrm{e}^{\ell}$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n}(1+u_k) = \mathrm{e}^{\ell}$. On en déduit que la quantité $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe.

$$\boxed{\text{Ainsi, si la série } \sum u_n \text{ est convergente, alors } \prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k) \text{ existe.}}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k) \text{ existe si, et seulement si la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

□

c) Démontrer que la quantité $\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe si, et seulement si, $\prod\limits_{n=0}^{+\infty}(1-u_n)$ existe et est non nul.

Démonstration.

- On sait : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < 1 - u_n < 1$$

  On peut donc appliquer le résultat de la question ***2.a)*** à la suite $\big(1-u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
  On obtient que le produit $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$ existe et :

$$\prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k) \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum \ln(1-u_n) \text{ convergente}$$

  De plus, d'après la question précédente :

$$\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k) \text{ existe} \quad\Leftrightarrow\quad \sum u_n \text{ convergente}$$

  Il s'agit alors de démontrer :

$$\sum \ln(1-u_n) \text{ convergente} \quad\Leftrightarrow\quad \sum u_n \text{ convergente} \qquad (*)$$

  En effet, on aura alors :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k) \text{ existe} \;&\Leftrightarrow\; \sum u_n \text{ convergente} \\
&\Leftrightarrow\; \sum \ln(1-u_n) \text{ convergente} \\
&\Leftrightarrow\; \prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k) \text{ existe et est non nul}
\end{aligned}$$

- Démontrons alors $(*)$ par double implication. On peut effectuer un raisonnement similaire à celui de la question précédente.
  ($\Rightarrow$) Supposons que la série $\sum \ln(1-u_n)$ est convergente.
  Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1-u_n) = 0$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi :

$$\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$$

On obtient :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ -u_n \leqslant 0$
- $\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$
- la série numérique $\sum \ln(1-u_n)$ est convergente.

Par théorème d'équivalence des séries à termes de signe constant, on en déduit que la série $\sum (-u_n)$ est convergente. C'est donc également le cas de la série $\sum u_n$.
(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par une constante non nulle)

$(\Leftarrow)$ Supposons que la série $\sum u_n$ est convergente.
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ Donc :

$$\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$$

On obtient :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ -u_n \leqslant 0$
- $\ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$
- la série numérique $\sum (-u_n)$ est convergente, car la série $\sum u_n$ l'est.

Par théorème d'équivalence des séries à termes de signe constant, on en déduit que la série $\sum \ln(1-u_n)$ est convergente.

On a donc bien démontré l'équivalence $(*)$.

> D'après le premier point, ceci permet de conclure que la quantité $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe si, et seulement si, $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$ existe et est non nul.

□

Partie II

3. Démontrer l'existence et calculer les valeurs des quantités suivantes.

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$$

Démonstration.

- On procède comme en question ***1.*** : on commence par déterminer, pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, l'expression de $\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$. Cela permettra d'en déduire l'existence et la valeur de $\prod\limits_{k=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

  × Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\\
=\ & \prod_{k=2}^{n}\frac{k+(-1)^{k+1}}{k}\\
=\ & \frac{2+(-1)^3}{2} \times \frac{3+(-1)^4}{3} \times \frac{4+(-1)^5}{4} \times \cdots \times \frac{(n-1)+(-1)^n}{n-1} \times \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}\\
=\ & \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1+(-1)^n}{n-1} \times \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

- si n est pair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) &= \prod_{k=2}^{2p}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2p-1+(-1)^{2p}}{2p-1} \times \frac{2p+(-1)^{2p+1}}{2p} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \cdots \times \frac{\cancel{2p}}{\cancel{2p-1}} \times \frac{\cancel{2p-1}}{\cancel{2p}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- si n est impair, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2p+1$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{2p+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2p-1+(-1)^{2p}}{2p-1} \times \frac{2p+(-1)^{2p+1}}{2p} \times \frac{2p+1+(-1)^{2p+2}}{2p+1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \cdots \times \frac{\cancel{2p}}{\cancel{2p-1}} \times \frac{\cancel{2p-1}}{\cancel{2p}} \times \frac{2p+2}{2p+1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2p+1}{2p} = \frac{n}{2(n-1)}
\end{aligned}$$

× En notant (v_n) la suite $\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\right)$, on a ainsi démontré :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{2n} = \frac{1}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{2n+1} = \frac{n}{2(n-1)}$

On remarque alors :

- d'une part : $v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$,
- d'autre part : $v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Par propriété de recouvrement, on en déduit que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

Le calcul de v_{2p+1} fait apparaître un calcul déjà réalisé dans le point précédent. Cela provient de la propriété de calcul des produits (dont on se servira directement par la suite) :

$$v_{2p+1} = \prod_{k=2}^{2p+1}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right) = \left(\prod_{k=2}^{2p}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)\right) \times \frac{2p+1+(-1)^{2p+2}}{2p+1} = v_{2p} \times \frac{2p+2}{2p+1}$$

- On commence par essayer de se ramener à l'étude d'une série.

  × Soit $n \geqslant 2$.

$$\ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)\right) \; = \; \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$$

  On étudie donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$.

  × On rappelle de plus le développement limité suivant :

$$\ln(1+x) \; = \; x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

  Or :

  - d'une part, la suite $\left((-1)^{n+1}\right)$ est bornée,
  - d'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

  On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 0$. On obtient alors le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}_{} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2n}\right)}_{} + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{} \\
&= u_n + v_n + w_n
\end{aligned}$$

  On doit alors déterminer la nature des trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ pour en déduire la nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

  × Tout d'abord : $\forall n \geqslant 2$, $|u_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or :

  - la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ est alternée,
  - la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante,
  - $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, par critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

  × La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($\not> 1$). Elle est donc divergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum v_n \text{ est divergente.}}$$

× De plus :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$
- $w_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$
- La série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2}$ (> 1). Elle est donc convergente.

Ainsi, par le théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum\ w_n$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum\ w_n \text{ est convergente.}}$$

× On rappelle, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) \ = \ (u_n + w_n) + v_n$$

Ainsi le terme général de la série $\sum\ \ln\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ s'écrit comme la somme :

- du terme général de la série convergente $\sum\ \big(u_n + w_n\big)$,
- du terme général de la série divergente $\sum\ v_n$.

C'est donc le terme général d'une série divergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum\ \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) \text{ est divergente.}}$$

× Plus précisément :

- comme la série $\sum (u_n + w_n)$ est convergente, alors la somme $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} (u_k + w_k)$ existe (elle est finie).

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} (u_k + w_k) \ = \ \sum_{k=2}^{+\infty} (u_k + w_k)$$

- la série $\sum\ v_n$ est une série à termes négatifs : $\forall n \geqslant 2,\ v_n = -\dfrac{1}{2n} \leqslant 0$. La suite de ses sommes partielles est donc décroissante. Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} v_k\right)$ est :
  - ▸ décroissante,
  - ▸ divergente (on a démontré que la série $\sum\ v_n$ est divergente).

  Elle diverge donc vers $-\infty$ par théorème de convergence monotone. Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} v_k \ = \ -\infty$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} (u_k + w_k + v_k) \ = \ -\infty$$

$$\boxed{\text{D'où : } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) = -\infty}$$

× Enfin, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)\right) = 0$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) = 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) \text{ existe et vaut } 0.}$$

Commentaire

Attention, on prendra garde à ne pas utiliser les résultats de la question *2.*. En effet, ces résultats sont valides pour une suite (u_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$$

Cette propriété n'est vérifiée ni par la suite $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$, ni par la suite $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$. □

4. Soit u une suite réelle vérifiant les deux conditions :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| < 1 \\ \text{La série } \sum u_n \text{ est convergente} \end{cases}$$

a) Montrer que les séries $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum {u_n}^2$ sont de même nature.

Démonstration.
Pour montrer que les séries en question sont de même nature, on cherche à appliquer le théorème d'équivalence des séries à termes positifs. Pour cela on doit trouver une relation d'équivalence reliant $\ln(1+u_n)$ et ${u_n}^2$.

- Puisque la série $\sum u_n$ est convergente, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. On en déduit :

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{{u_n}^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left({u_n}^2\right)$$

Ainsi :

$$\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{{u_n}^2}{2}$$

- On sait alors :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{{u_n}^2}{2} \leqslant 0$
  × $\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{{u_n}^2}{2}$

  Par théorème d'équivalence des séries à termes de signe constant, les séries $\sum \big(\ln(1+u_n)-u_n\big)$ et $\sum \left(-\frac{{u_n}^2}{2}\right)$ sont de même nature.

$$\boxed{\text{On en déduit que les séries } \sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big) \text{ et } \sum {u_n}^2 \text{ sont de même nature.}}$$

- Il reste à démontrer que les séries $\sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big)$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature.
  On remarque, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\ln(1+u_n) - u_n \;=\; \ln(1+u_n) + (-u_n)$$
  La série $\sum (-u_n)$ est convergente car la série $\sum u_n$ est convergente d'après l'énoncé.
  Or, on ne change pas la nature d'une série quand on ajoute à son terme général (ici $\ln(1+u_n)$) le terme général d'une série convergente (ici $-u_n$).

  $$\boxed{\text{On en déduit que les séries } \sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big) \text{ et } \sum \ln(1+u_n) \text{ sont de même nature.}}$$
- On a démontré que :
  × les séries $\sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big)$ et $\sum {u_n}^2$ sont de même nature,
  × les séries $\sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big)$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature.

  $$\boxed{\text{On en conclut que les série } \sum \ln(1+u_n) \text{ et } \sum {u_n}^2 \text{ sont de même nature.}}$$ □

b) En déduire que $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe. Puis démontrer que $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n) = 0$ si, et seulement si, la série $\sum {u_n}^2$ est divergente.

Démonstration.
Démontrons tout d'abord que $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe.
Pour ce faire, on procède par disjonction de cas. Plus précisément, on démontre que cette quantité existe indépendamment de la nature de la série $\sum {u_n}^2$.

- Si la série $\sum {u_n}^2$ est convergente
  Alors, d'après la question précédente, la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente. On note S sa somme.
  Ainsi :
  $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) \;=\; S$$
  Par composition de limite, la fonction exp étant continue en $S \in \mathbb{R}$:
  $$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right) \;=\; \exp(S)$$
  Or, par propriété de la fonction exp : $\exp\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right) \;=\; \prod\limits_{k=0}^{n} \exp\big(\ln(1+u_k)\big) \;=\; \prod\limits_{k=0}^{n} (1+u_k)$.
  On a ainsi démontré :
  $$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+u_k) \;=\; \mathrm{e}^S \;>\; 0$$
  $$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, si la série } \sum {u_n}^2 \text{ est convergente, alors } \prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k) \text{ existe.} \\ \textit{(et on a démontré dans ce cas : } \prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k) > 0\textit{)}\end{array}}$$

- Si la série $\sum {u_n}^2$ est divergente
  × Alors, d'après la question précédente, la série $\sum \ln(1+u_n)$ est divergente.
  × De plus :
  $$\ln(1+x) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{O}(x^3)$$
  D'où :
  $$\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Or, comme la série $\sum u_n$ est convergente, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. D'où :

$$\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{{u_n}^2}{2} \ (\leqslant 0)$$

× Deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang.
Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ \ln(1+u_n) - u_n \ \leqslant \ 0$$

On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k\big)\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang.

× On sait alors que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k\big)\right)$ est :

- décroissante à partir d'un certain rang,
- divergente. En effet, d'après la question précédente, la série $\sum \ln(1+u_n)$ et la série $\sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big)$ ont même nature. Et on a démontré plus haut que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est divergente.

On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k\big)\right)$ diverge vers $-\infty$ (par théorème de convergence monotone). Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

× Or la série $\sum u_n$ est convergente. Sa suite des sommes partielles admet donc une limite finie.
Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\big(\ln(1+u_k) - u_k\big) + u_k\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k\big) + \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{aligned}$$

D'où, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right) \ = \ 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+u_k) \ = \ 0$$

Finalement, si la série $\sum {u_n}^2$ est divergente, alors $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe.
(et on a démontré dans ce cas : $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k) = 0$*)*

Finalement, $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k)$ existe car existe quel que soit le cas étudié. L'étude réalisée permet en plus de démontrer que $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} (1+u_k) = 0$ uniquement dans le cas où si, la série $\sum {u_n}^2$ est divergente.

□

Partie III

5. Soit (a_n) la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{2n} & = & \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}, \\[2ex] a_{2n-1} & = & -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{array} \right.$.

a) Étudier la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum {a_n}^2$.

Démonstration.
Dans cette question, on note :

$\times$ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$.

$\times$ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum {a_n}^2$.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} A_{2m} & = & \sum\limits_{\ell=1}^{2m} a_\ell \\ & = & \left(\sum\limits_{\substack{\ell \in [\![1,2m]\!] \\ \ell \text{ impair}}} a_\ell \right) + \left(\sum\limits_{\substack{\ell \in [\![1,2m]\!] \\ \ell \text{ pair}}} a_\ell \right) \\ & = & \left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_{2k-1} \right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_{2k} \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{-1}{\sqrt{k}} + \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}} \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{m} \left(-\cancel{\dfrac{1}{\sqrt{k}}} + \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{k}}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}} \right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k\sqrt{k}} \end{array}$$

Or :

$\times$ la série $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2}$ (> 1).
On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k\sqrt{k}} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

$\times$ la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente en tant que série de Riemann d'exposant 1 $(\not> 1)$.
La suite des sommes partielles associée à cette série est :

- croissante car la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est à termes positifs.
- divergente (sinon la série $\sum \dfrac{1}{n}$ serait convergente).

On en déduit que cette suite est croissante et non majorée. Ainsi : $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Finalement : $A_{2m} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La suite (A_n) est donc divergente car elle possède une sous-suite divergente. On en déduit que la série $\sum a_n$ est divergente.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl}
B_{2m} & = & \sum\limits_{\ell=1}^{2m} {a_\ell}^2 \\
& = & \left(\sum\limits_{\substack{\ell \in [\![1,2m]\!] \\ \ell \text{ impair}}} {a_\ell}^2 \right) + \left(\sum\limits_{\substack{\ell \in [\![1,2m]\!] \\ \ell \text{ pair}}} {a_\ell}^2 \right) \\
& = & \left(\sum\limits_{k=1}^{m} {a_{2k-1}}^2 \right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} {a_{2k}}^2 \right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\dfrac{-1}{\sqrt{k}} \right)^2 + \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}} \right)^2 \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{m} \left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{2}{k\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{2}{k^2} + \dfrac{2}{k^2\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k^3} \right) \\
& = & 2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k} + 2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k\sqrt{k}} + 3 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^2} + 2 \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^2\sqrt{k}} + \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^3}
\end{array}$$

En procédant comme dans la question précédente, on démontre que toutes les sommes possèdent une limite finie lorsque m tend vers $+\infty$ (puisque sont les sommes partielles d'ordre m de série de Riemann convergente car d'exposants tous strictement supérieurs à 1) à part la première qui diverge vers $+\infty$. On en déduit :

$$B_{2m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\boxed{\text{Finalement : } B_{2m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty. \text{ La suite } (B_n) \text{ est donc divergente car elle possède une sous-suite divergente. On en déduit que la série } \sum {a_n}^2 \text{ est divergente.}}$$

□

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\prod\limits_{n=3}^{+\infty} (1 + a_n)$.

Démonstration.
Dans cette question, on note $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\prod\limits_{\ell=3}^{n} \big(1 + a_\ell\big)$.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl}
C_{2m} & = & \prod\limits_{\ell=3}^{2m} \big(1 + a_\ell\big) \\
& = & \left(\prod\limits_{\substack{\ell \in [\![3,2m]\!] \\ \ell \text{ impair}}} \big(1 + a_\ell\big) \right) \times \left(\prod\limits_{\substack{\ell \in [\![3,2m]\!] \\ \ell \text{ pair}}} \big(1 + a_\ell\big) \right) \\
& = & \left(\prod\limits_{k=2}^{m} \big(1 + a_{2k-1}\big) \right) \times \left(\prod\limits_{k=2}^{m} \big(1 + a_{2k}\big) \right) \\
& = & \prod\limits_{k=2}^{m} \Big(\big(1 + a_{2k-1}\big) \big(1 + a_{2k}\big) \Big)
\end{array}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\big(1 + a_{2k-1}\big)\ \big(1 + a_{2k}\big) &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}} + \frac{1}{k^2}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$C_{2m} = \prod_{\ell=3}^{2m} \big(1 + a_\ell\big) = \prod_{k=2}^{m} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)}$$

- Démontrons alors que la suite $\big(C_{2m+1}\big)$ converge aussi vers $\frac{1}{2}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
C_{2m+1} &= \left(\prod_{\ell=3}^{2m+1} \big(1 + a_\ell\big)\right) \\
&= \left(\prod_{\ell=3}^{2m} \big(1 + a_\ell\big)\right) \times \big(1 + a_{2\,m+1}\big) \\
&= \prod_{k=2}^{2m} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \big(1 + a_{2\,(m+1)-1}\big) \\
&= \prod_{k=2}^{2m} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 + \frac{-1}{\sqrt{m+1}}\right) \\
&\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \times 1
\end{aligned}$$

On a montré que :

× la suite $\big(C_{2m}\big)$ est convergente de limite $\frac{1}{2}$.

× la suite $\big(C_{2m+1}\big)$ est convergente de même limite $\frac{1}{2}$.

Ainsi, par théorème de recouvrement, que la suite $\big(C_m\big)$ est convergente de limite $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \prod_{n=3}^{+\infty} \big(1 + a_n\big) \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}.}$$

□

6. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant les deux conditions suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l}
\forall n \in \mathbb{N},\ \big|u_n\big| < 1 \\[2mm]
\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n) \text{ existe et est non nul}
\end{array}\right.$$

a) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum {u_n}^2$ est convergente.

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente. La suite (u_n) vérifie :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n\right| < 1 \\ \text{La série } \sum u_n \text{ est convergente} \end{cases}$$

On est donc dans les conditions énoncées de la question ***4***. Comme on suppose de plus que $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe et est non nul, la question ***4.b)*** permet de conclure que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente.

($\Leftarrow$) On suppose que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} (1+u_k)\right) \qquad \textit{(par propriété de la fonction } \ln\textit{)}$$

  Comme $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe et est non nul, la suite $\left(\prod\limits_{k=0}^{n} (1+u_k)\right)$ est convergente de limite $L \neq 0$. Par composition de limites, la fonction ln étant continue en L ($\in\,]0,+\infty[$), on en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k)\right)$ est convergente de limite $\ln(L)$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum \ln(1+u_n) \text{ est convergente.}}$$

- On en déduit : $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc : $1+u_n = \exp\big(\ln(1+u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.

  Finalement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le même raisonnement qu'en question ***4.a)***, on peut affirmer :

$$\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{{u_n}^2}{2} \ (\leqslant 0)$$

  Par théorème d'équivalence des séries à termes de signe constant, les séries $\sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big)$ et $\sum {u_n}^2$ sont alors de même nature.

  $$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum \big(\ln(1+u_n) - u_n\big) \text{ est convergente.}}$$

- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \ln(1+u_n) - \big(\ln(1+u_n) - u_n\big)$$

  Le terme général de la série $\sum u_n$ apparaît comme somme de deux termes généraux de séries convergente.

  $$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum u_n \text{ est convergente.}}$$

$\square$

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty$ si, et seulement si, la série $\sum u_n{}^2$ est divergente.

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty$. En particulier, la série $\sum u_n$ est divergente et donc, par la question précédente, la série $\sum u_n{}^2$ est divergente.

($\Leftarrow$) On suppose que la série $\sum u_n{}^2$ est divergente.
Rappelons que $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1+u_n)$ existe et est non nul. Cela permet d'affirmer (comme en question précédente) que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente et, en particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On est alors dans le cadre d'application de la méthodologie de la question ***4.b)***.

- Tout d'abord :
$$\ln(1+u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n{}^2}{2} \ (\leqslant 0)$$
  × Par théorème d'équivalence des séries à termes de signe constant, les séries $\sum \big(\ln(1+u_n) - u_n \big)$ et $\sum \frac{-u_n{}^2}{2}$ sont de même nature (et donc divergentes).
  × Les suites $\big(\ln(1+u_n) - u_n \big)$ et $\left(\frac{-u_n{}^2}{2} \right)$ sont équivalentes et donc de même signe (négatif) à partir d'un certain rang. On en déduit que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k \big) \right)$ est décroissante à partir d'un certain rang. Elle est de plus divergente (car la série correspondante l'est). On en déduit que cette suite des sommes partielles diverge vers $-\infty$.
  × On remarque enfin :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\ln(1+u_k) - \big(\ln(1+u_k) - u_k \big) \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) - \sum_{k=0}^{n} \big(\ln(1+u_k) - u_k \big) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{aligned}$$
(rappelons que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) \right)$ est de limite finie puisque la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge)

$$\boxed{\text{On a bien démontré que } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty \text{ si, et seulement si, la série } \sum u_n{}^2 \text{ est divergente.}}$$

Commentaire

- Rappelons que les théorèmes d'équivalence pour les séries à termes positifs peuvent être utilisés uniquement … si les séries sont à termes positifs (ou à tout le moins de signe constant) ! En particulier, écrire :
$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$
ne permet pas de conclure que les séries $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature puisqu'on n'a pas d'information sur le signe de la suite (u_n) dans cette question.

□

Partie IV

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\big(s_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} s_{2m-1}(x) & = & \left(1 - \dfrac{x}{m\,\pi}\right) \exp\left(\dfrac{x}{m\,\pi}\right) \\[2ex] s_{2m}(x) & = & \left(1 + \dfrac{x}{m\,\pi}\right) \exp\left(-\dfrac{x}{m\,\pi}\right) \end{array} \right.$$

7. Montrer que $S(x) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} s_k(x)$ existe pour toute valeur de x et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$, $S(x) \neq 0$.

Démonstration.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite $\big(V_n(x)\big)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n(x) \ = \ \prod_{\ell=1}^{n} s_\ell(x)$$

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} V_{2m}(x) & = & \displaystyle\prod_{\ell=1}^{2m} s_\ell(x) \\ & = & \left(\displaystyle\prod_{\substack{\ell \in [\![1, 2m]\!] \\ \ell \text{ impair}}} s_\ell(x) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{\substack{\ell \in [\![1, 2m]\!] \\ \ell \text{ pair}}} s_\ell(x) \right) \\ & = & \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{m} s_{2k-1}(x) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{m} s_{2k}(x) \right) \\ & = & \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \dfrac{x}{k\,\pi}\right) \exp\left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \dfrac{x}{k\,\pi}\right) \exp\left(-\dfrac{x}{k\,\pi}\right) \right) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(\left(1 - \dfrac{x}{k\,\pi}\right) \exp\left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right) \times \left(1 + \dfrac{x}{k\,\pi}\right) \exp\left(-\dfrac{x}{k\,\pi}\right) \right) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(\left(1 - \dfrac{x}{k\,\pi}\right) \left(1 + \dfrac{x}{k\,\pi}\right) \times \exp\left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right) \exp\left(-\dfrac{x}{k\,\pi}\right) \right) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(\left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right)^2\right) \times \exp\left(\dfrac{x}{k\,\pi} - \dfrac{x}{k\,\pi}\right) \right) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right)^2 \right) \qquad \textit{(car } \exp(0) = 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{N},\ V_{2m}(x) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi}\right)^2 \right)}$$

- Deux cas se présentent alors :
  × si $x \in \pi\,\mathbb{Z}^*$ alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = p\,\pi$.
  En particulier, pour tout $m > 2p$:

$$\begin{array}{rcll}
V_m(x) & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{m} s_k(x) & \\
& = & \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{2p} s_k(x) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{k=2p+1}^{m} s_k(x) \right) & \\
& = & \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) \times \left(\displaystyle\prod_{k=2p+1}^{m} s_k(x) \right) & \textit{(d'après le calcul précédent)} \\
& = & \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) \times \left(1 - \left(\dfrac{x}{p\,\pi} \right)^2 \right) \times \left(\displaystyle\prod_{k=2p+1}^{m} s_k(x) \right) & \\
& = & \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) \times 0 \times \left(\displaystyle\prod_{k=2p+1}^{m} s_k(x) \right) & \textit{(puisque } x = p\,\pi\textit{)} \\
& = & 0 &
\end{array}$$

  Ainsi, si $x \in \pi\,\mathbb{Z}^*$, $V_m(x) = 0$ dès que m est suffisamment grand. Autrement dit, la suite $\big(V_m(x)\big)$ est nulle à partir d'un certain rang.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que pour tout } x \in \pi\,\mathbb{Z}^*, \text{ la quantité } S(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} s_k(x) \\ \text{existe et vaut } S(x) = \displaystyle\lim_{m \to +\infty} V_m(x) = 0.\end{array}}$$

  × si $x \notin \pi\,\mathbb{Z}^*$
  Remarquons tout d'abord qu'il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geqslant k_0,\ x^2 < \big(k\,\pi\big)^2$$

Commentaire

On peut aisément trouver ce rang. Pour ce faire, il suffit de remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rll}
& x^2 < \big(k\,\pi\big)^2 & \\
\Leftrightarrow & \sqrt{x^2} < \sqrt{\big(k\,\pi\big)^2} & \textit{(par stricte croissance de la fonction racine sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
\Leftrightarrow & |\,x\,| < |\,k\,\pi\,| & \\
\Leftrightarrow & |\,x\,| < k\,\pi & \\
\Leftrightarrow & k > \dfrac{|\,x\,|}{\pi} &
\end{array}$$

L'entier $k_0 = \left\lceil \dfrac{|\,x\,|}{\pi} \right\rceil$ convient.

  On en déduit que pour tout $k \geqslant k_0$:

$$0 \ < \ 1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \ \leqslant \ 1 \qquad (*)$$

Ainsi, pour tout $m \geqslant k_0$:

$$\begin{aligned} V_{2m}(x) &= \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) && \textit{(d'après ce qui précède)} \\ &= \prod_{k=1}^{k_0-1} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \times \prod_{k=k_0}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Démontrons alors que la quantité $w_m(x) = \prod_{k=k_0}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right)$ admet une limite finie lorsque m tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} w_m(x) &= \exp\left(\ln\left(\prod_{k=k_0}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) \right) && \textit{(cette écriture est licite d'après } (*)\textit{)} \\ &= \exp\left(\sum_{k=k_0}^{m} \ln\left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) && \textit{(par propriété de la fonction } \ln\textit{)} \end{aligned}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- $\ln\left(1 - \left(\dfrac{x}{n\,\pi} \right)^2 \right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\left(\dfrac{x}{n\,\pi} \right)^2$ et donc $\ln\left(1 - \left(\dfrac{x}{n\,\pi} \right)^2 \right) = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2} \right)$
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant k_0} \ln\left(1 - \left(\dfrac{x}{n\,\pi} \right)^2 \right)$ est (absolument) convergente.

En notant $L(x)$ la somme de cette série, on obtient que la suite $\big(V_{2m}(x) \big)$ est convergente, de limite :

$$\begin{aligned} \lim_{m \to +\infty} V_{2m}(x) &= \lim_{m \to +\infty} \left(\prod_{k=1}^{k_0-1} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \times \prod_{k=k_0}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) \\ &= \prod_{k=1}^{k_0-1} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \times \lim_{m \to +\infty} \left(\prod_{k=k_0}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) \\ &= \prod_{k=1}^{k_0-1} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \times \exp\big(L(x) \big) \end{aligned}$$

On démontre ainsi que la suite $\big(V_{2m}(x) \big)$ est convergente de limite que l'on note $V(x)$. Cette limite est la limite, lorsque m tend vers $+\infty$, de la quantité $\prod\limits_{k=1}^{m} \left(1 - \left(\dfrac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right)$. Par définition de produit infini, cette limite est notée :

$$S(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right)$$

$$\boxed{\text{La suite } \big(V_{2m}(x) \big) \text{ est convergente, de limite notée } V(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right).}$$

Démontrons alors que la suite $\big(V_{2m+1}(x) \big)$ converge aussi vers $V(x)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} V_{2m+1}(x) &= \prod_{k=1}^{2m+1} s_k(x) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{2m} s_k(x) \right) \times s_{2m+1}(x) \\ &= V_{2m}(x) \times s_{2m+1}(x) \end{aligned}$$

Or, par composition de limites :

$$s_{2m+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{(m+1)\,\pi}\right) \times \exp\left(\frac{x}{(m+1)\,\pi}\right) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \times \exp(0) = 1$$

On en déduit que la suite $\big(V_{2m+1}(x)\big)$ est convergente, de limite égale à :
$$\lim_{m \to +\infty} V_{2m}(x) \times s_{2m+1}(x) = \lim_{m \to +\infty} V_{2m}(x) \times \lim_{m \to +\infty} s_{2m+1}(x) = V(x) \times 1 = V(x).$$

On a montré que :

× la suite $\big(V_{2m}(x)\big)$ est convergente de limite $V(x)$.

× la suite $\big(V_{2m+1}(x)\big)$ est convergente de même limite $V(x)$.

Ainsi, par théorème de recouvrement, que la suite $\big(V_m(x)\big)$ est convergente de limite $V(x)$.

Finalement, si $x \notin \pi\,\mathbb{Z}^*$, la quantité $S(x)$ existe bien et vaut :
$$S(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} s_k(x) = V(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi}\right)^2\right) \neq 0.$$

(en effet, comme $x \notin \pi\,\mathbb{Z}^*$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x}{k\,\pi} \neq 1$*)* □

8. On suppose : $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n(x) \ = \ \prod_{k=1}^{2n} s_k(x)$$

Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{T_n(x+2\pi)}{T_n(x)}$$

Démonstration.

- Comme $x \notin \pi\,\mathbb{Z}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $s_k(x) \neq 0$ (comme vu en question précédente).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{2n} s_k(x) \neq 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $y \notin \pi\,\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
T_n(y) &= \prod_{k=1}^{2n} s_k(y) \\
&= V_{2n}(y) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{y}{k\,\pi}\right)^2\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\big(k\,\pi\big)^2 - y^2}{\big(k\,\pi\big)^2}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\big(k\,\pi\big)^2} \ \Big(\big(k\,\pi - y\big)\ \big(k\,\pi + y\big)\Big) \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \big(k\,\pi\big)^2} \times \prod_{k=1}^{n} \big(k\,\pi - y\big) \times \prod_{k=1}^{n} \big(k\,\pi + y\big)
\end{aligned}$$

- On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
\frac{T_n(x+2\,\pi)}{T_n(x)} &= \frac{\cancel{\dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi)^2}} \times \prod\limits_{k=1}^{n} \big(k\,\pi - (x+2\,\pi)\big) \times \prod\limits_{k=1}^{n} \big(k\,\pi + (x+2\,\pi)\big)}{\cancel{\dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi)^2}} \times \prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi - x) \times \prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi + x)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \big((k-2)\,\pi - x\big) \times \prod\limits_{k=1}^{n} \big((k+2)\,\pi + x\big)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi - x) \times \prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi + x)} \\
&= \frac{\prod\limits_{k=-1}^{n-2} (k\,\pi - x) \times \prod\limits_{k=3}^{n+2} (k\,\pi + x)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi - x) \times \prod\limits_{k=1}^{n} (k\,\pi + x)} \\
&= \frac{\left(\prod\limits_{k=-1}^{0} (k\,\pi - x) \times \cancel{\prod\limits_{k=1}^{n-2} (k\,\pi - x)}\right) \times \left(\cancel{\prod\limits_{k=3}^{n} (k\,\pi + x)} \times \prod\limits_{k=n+1}^{n+2} (k\,\pi + x)\right)}{\left(\cancel{\prod\limits_{k=1}^{n-2} (k\,\pi - x)} \times \prod\limits_{k=n-1}^{n} (k\,\pi - x)\right) \times \left(\prod\limits_{k=1}^{2} (k\,\pi + x) \times \cancel{\prod\limits_{k=3}^{n} (k\,\pi + x)}\right)} \\
&= \frac{(-\pi - x)\,(-x) \times \big((n+1)\,\pi + x\big)\,\big((n+2)\,\pi + x\big)}{\big((n-1)\,\pi - x\big)\,\big(n\,\pi - x\big) \times (\pi + x)\,(2\,\pi + x)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\,\cancel{(\pi + x)}}{\cancel{(\pi + x)}\,(2\,\pi + x)} \times \frac{\big(\cancel{n\pi}\big) \times \big(\cancel{n\pi}\big)}{\big(\cancel{n\pi}\big) \times \big(\cancel{n\pi}\big)} \qquad \textit{(car } (n+1)\,\pi + x \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\pi\textit{)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \frac{T_n(x+2\,\pi)}{T_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2\,\pi + x}.}$$

□

9. En déduire que la fonction $x \mapsto x\,S(x)$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, est périodique de période 2π.

Démonstration.
Notons $h : x \mapsto x\,S(x)$.

- Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
S(y) &= \prod_{k=1}^{+\infty} s_k(y) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} s_k(y)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} V_n(y) && \textit{(par défintion de la suite } \big(V_n(y)\big)\textit{)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} V_{2n}(y) && \textit{(car toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et vers la même limite)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} T_n(y) && \textit{(si on suppose de plus } y \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}\textit{)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z},\ \lim_{n\to+\infty} T_n(y) = S(y)}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$ (cela implique : $x + 2\,\pi \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n(x+2\,\pi)}{T_n(x)} &= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x+2\,\pi)}{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)} && \textit{(à l'aide du point précédent et car } \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = S(x) \neq 0 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{7}}\textit{)}\\ &= \frac{S(x+2\,\pi)}{S(x)}\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$:

$$\frac{T_n(x+2\,\pi)}{T_n(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2\,\pi + x}$$

On déduit de ces deux points que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z}$: $\dfrac{S(x+2\,\pi)}{S(x)} = \dfrac{x}{2\,\pi + x}$, ce qui s'écrit :

$$\big(x + 2\,\pi\big)\ S(x+2\,\pi) = x\ S(x)$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbb{Z},\ h(x+2\,\pi) = h(x).}$$

- Il reste alors à traiter le cas où $x \in \pi\,\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} h(x+2\,\pi) &= \big(x+2\,\pi\big)\ S(x+2\,\pi) && \textit{(par définition)}\\ &= \big(x+2\,\pi\big) \times 0 && \textit{(car } S \textit{ est nulle en tout point de } \pi\,\mathbb{Z}\textit{)}\\ &= 0\end{aligned}$$

De même, comme $x \in \pi\,\mathbb{Z}$: $h(x) = x \times S(x) = x \times 0 = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \pi\,\mathbb{Z},\ h(x+2\,\pi) = h(x).}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ h(x+2\,\pi) = h(x). \text{ La fonction } h \text{ est bien périodique de période } 2\,\pi.}$$ □

10. On admet la propriété suivante :

$$\forall x \in\ ]-1,0[\ \cup\ ]0,1[,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \cos(xt) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{2x}{x^2-n^2}\ \cos(nt) \qquad (*)$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\cos(n\,\pi)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \cos(n\,\pi) = (-1)^n.}$$ □

b) En utilisant la propriété $(*)$, calculer pour tout $x \in\ ]-1,1[$ la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in\ ]-1,1[$. Deux cas se présentent.

- Si $x \neq 0$ alors, en utilisant la propriété $(*)$ en $t = \pi$, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(\pi\,x) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{2x}{x^2-n^2}\ \cos(n\,\pi)\\ &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{2x}{x^2-n^2}\ (-1)^n\end{aligned}$$

Comme $(-1)^n\,(-1)^n = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1$, on en déduit, en réordonnant l'égalité précédente :

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = \cos(\pi\,x) - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \left(\cos(\pi\,x) - \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right) \\ &= \pi\,\frac{\cos(\pi\,x)}{\sin(\pi\,x)} - \cancel{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}}\,\cancel{\frac{\sin(\pi x)}{\pi}}\,\frac{1}{x} \end{aligned}$$

- Si $x = 0$ alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

$$\boxed{\forall x \in\,]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} = \begin{cases} \pi\,\dfrac{\cos(\pi\,x)}{\sin(\pi\,x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

□

c) En déduire, pour tout $x \in\,]-\pi,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2\,\pi^2} = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

- Soit $x \in\,]-\pi,\pi[\, \setminus\{0\}$.
  En appliquant la relation précédente en $\dfrac{x}{\pi} \in\,]-1,1[\, \setminus\{0\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\times\frac{x}{\pi}}{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - n^2} &= \pi\,\frac{\cos\left(\pi\,\frac{x}{\pi}\right)}{\sin\left(\pi\,\frac{x}{\pi}\right)} - \frac{1}{\frac{x}{\pi}} \\ &= \pi\,\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\pi}{x} \\ &= \pi\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\pi}{x}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\times\frac{x}{\pi}}{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{\cancel{\pi}\,\frac{x^2}{\pi^{\cancel{2}}} - \pi\,n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{\frac{x^2-\pi\,n^2}{\pi}} \\ &= \pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-\pi\,n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in\,]-\pi,\pi[\, \setminus\{0\} :\ \cancel{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-\pi\,n^2}\right) = \cancel{\pi}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\pi}{x}\right).}$$

- Si $x = 0$, alors $\dfrac{2x}{x^2 - \pi\ n^2} = \dfrac{0}{-\pi\ n^2} = 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : pour tout } x \in \,]-\pi, \pi[\ : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\,\pi^2} = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

□

d) Montrer que, pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[$, la série $\sum \ \phi_n(x)$ est convergente, où on note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \phi_n(x) \ = \ \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$$

On note alors : $\phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \phi_k(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]-\pi, \pi[$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\phi_k(x) \ = \ \ln\left(1 - \frac{0}{n^2\,\pi^2}\right) \ = \ \ln(1) \ = \ 0$$

On en déduit que la série $\sum \ \ln\left(1 - \dfrac{0}{n^2\,\pi^2}\right)$ est convergente et de somme nulle.

- Si $x \neq 0$ alors :

$$\phi_n(x) \ = \ \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ -\frac{x^2}{n^2\,\pi^2} = -\frac{x^2}{\pi^2}\ \frac{1}{n^2}$$

× $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$

× $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) \ = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

× La série $\sum \ \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\sum \ \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$ est (absolument) convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \,]-\pi, \pi[, \text{ la série } \sum \ \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- On peut s'interroger sur la nécessité de traiter à part le cas $x = 0$. Si on ne le fait pas, on est amené à écrire :
$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{\pi^2}\,\frac{1}{n^2}$$
ce qui signifie, pour $x = 0$: $\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, ce qu'il est préférable d'éviter.
Soyons précis : l'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ n'est pas fondamentalement fausse mais :
  - × elle nécessite de connaître la définition correcte d'équivalent (exprimée « avec les ϵ »). Former le quotient n'a évidemment aucun sens avec un dénominateur nul !
  - × écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ signifie simplement que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang, ce qui rend l'étude de la suite (u_n) peu intéressant (c'est le cas dans cette question).
  - × elle amène souvent à des confusions. Notamment : $\frac{1}{n} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\sim}} 0$.
- On ne se sert nulle part ici du fait que le réel x est élément de $]-\pi,\pi[$. La démonstration est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

e) Calculer $\phi(0)$.

Démonstration.

Comme vu dans la question précédente, la série $\sum \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}\right)$ est convergente pour $x = 0$ et de somme 0. □

f) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`

Prouver que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et démontrer, pour tout $x \in]-\pi,\pi[$, $\phi'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \phi_k'(x)$.

Démonstration.

a) Caractère $\mathscr{C}^1$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction ϕ_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.
- De plus, pour tout $x \in]-\pi,\pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\phi_n'(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2\,\pi^2}} \times \frac{-2x}{n^2\,\pi^2} = \frac{1}{\frac{n^2\,\pi^2 - x^2}{n^2\,\pi^2}} \times \frac{-2x}{n^2\,\pi^2} = \frac{\cancel{n^2\,\pi^2}}{n^2\,\pi^2 - x^2} \times \frac{-2x}{\cancel{n^2\,\pi^2}}$$

b) Convergences successives

(0) La série $\sum \phi_n$ converge simplement sur $]-\pi,\pi[$ (d'après la question précédente).

(1) Démontrons que la série $\sum \phi_n'$ converge uniformément sur $]-\pi,\pi[$.
On démontre que la série $\sum \phi_n'$ converge normalement sur $]-\pi,\pi[$.
Pour tout $x \in]-\pi,\pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|\,\phi_n'(x)\,| = \left|\frac{-2x}{n^2\,\pi^2 - x^2}\right| = \frac{|-2x|}{|\,n^2\,\pi^2 - x^2\,|} = \frac{|-2| \times |x|}{|\,n^2\,\pi^2 - x^2\,|} = \frac{2 \times |x|}{|\,n^2\,\pi^2 - x^2\,|}$$

Or, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\begin{array}{lcccl} & -\pi < & x & < & \pi \\ \text{donc} & & x^2 & < & \pi^2 \\ \text{donc} & & -x^2 & > & -\pi^2 \\ \text{donc} & & n^2\,\pi^2 - x^2 & > & n^2\,\pi^2 - \pi^2 \\ \text{donc} & & \dfrac{1}{n^2\,\pi^2 - x} & < & \dfrac{1}{n^2\,\pi^2 - \pi^2} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & & \dfrac{2\,|x|}{n^2\,\pi^2 - x} & \leqslant & \dfrac{2\,|x|}{n^2\,\pi^2 - \pi^2} & \textit{(car } |x| \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

Finalement : $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $\left|\,\phi_n'(x)\,\right| \;=\; \dfrac{2 \times |x|}{n^2\,\pi^2 - x} \;\leqslant\; \dfrac{2\,\pi}{n^2\,\pi^2 - \pi^2}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \;\leqslant\; \|\,\phi_n'\,\|_{\infty,]-\pi,\pi[} \;\leqslant\; \dfrac{2\,\pi}{\left(n^2 - 1\right)\pi^2}.}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- $\|\,\phi_n'\,\|_{\infty,]-\pi,\pi[} \;=\; \underset{n \to +\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (ce qu'on démontre à l'aide de l'encadré précédent).
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann d'exposant 2 (> 1).

La série numérique $\sum \|\,\phi_n'\,\|_{\infty,]-\pi,\pi[}$ converge. Autrement dit, la série $\sum \phi_n'$ converge normalement sur $]-\pi, \pi[$.

Ainsi, par théorème de dérivation terme à terme, la fonction ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\phi'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{n^2\,\pi^2 - x}$$

□

g) En déduire, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, une expression de $\phi'(x)$ sans le symbole $\sum$.

Démonstration.

On en déduit que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\phi'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{n^2\,\pi^2 - x} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\,\pi^2} \;=\; \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

□

h) Déduire de ce qui précède la valeur de $\phi(x)$ pour tout $x \in\ ]-\pi,\pi[$.

Démonstration.

- Tout d'abord, rappelons : $\phi(0) = 0$ d'après la question ***10.e***).
- Par ailleurs, la fonction ϕ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$, on en déduit que la fonction ϕ' est de classe $\mathscr{C}^0$ sur $]-\pi,\pi[$.

  Ainsi, pour tout $x \in\ ]-\pi,\pi[$:

  $$\int_0^x \phi'(t)\ dt \ = \ \left[\ \phi(t)\ \right]_0^x \ = \ \phi(x) - \phi(0) \ = \ \phi(x)$$ *(car $\phi(0) = 0$ d'après la question **10.e)**)*

  Or, si $x \neq 0$, pour tout $A \in\ ]-\pi,\pi[\ \setminus\{0\}$:

  $$\begin{aligned} \int_A^x \phi'(t)\ dt \ &= \ \int_A^x \left(\frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \ \int_A^x \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\ dt \ - \ \int_A^x \frac{1}{t}\ dt \\ &= \ \left[\ \ln\left(|\sin(t)|\right)\ \right]_A^x \ - \ \left[\ \ln\left(|t|\right)\ \right]_A^x \\ &= \ \Big(\ \ln\left(|\sin(x)|\right) - \ln\left(|\sin(A)|\right)\ \Big) - \Big(\ \ln\left(|x|\right) - \ln\left(|A|\right)\ \Big) \\ &= \ \Big(\ \ln\left(|\sin(x)|\right) - \ln\left(|x|\right)\ \Big) - \Big(\ \ln\left(|\sin(A)|\right) - \ln\left(|A|\right)\ \Big) \\ &= \ \ln\left(\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \right) \ - \ \ln\left(\left|\frac{\sin(A)}{A}\right| \right) \\ &\underset{A\to 0}{\longrightarrow} \ \ln\left(\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \right) \end{aligned}$$

  (on a remplacé $\phi'(t)$ par sa valeur sur $]-pi,\pi[\ \setminus\{0\}$ car on intègre sur un intervalle qui ne contient pas 0)

  En effet, comme : $\dfrac{\sin(A)}{A} \underset{A\to 0}{\sim} \dfrac{A}{A} = 1$ alors : $\ln\left(\left|\dfrac{\sin(A)}{A}\right| \right) \underset{A\to 0}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

  $$\boxed{\begin{gathered}\text{Finalement, pour tout } x \in\ ]-\pi,\pi[\ \setminus\{0\} : \\ \phi(x) \ = \ \int_0^x \phi'(t)\ dt \ = \ \lim_{A\to 0} \int_A^x \phi'(t)\ dt \ = \ \ln\left(\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \right)\end{gathered}}$$

- Remarquons enfin que si $x \in\ ]-\pi,\pi[\ \setminus\{0\}$, alors x et $\sin(x)$ ont même signe.
  De ce fait :

  $$\forall x \in\ ]-\pi,\pi[\ \setminus\{0\}, \ \frac{\sin(x)}{x} \ > \ 0$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in\ ]-\pi,\pi[: \phi(x) \ = \ \begin{cases} \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.}$$

$\square$

i) En déduire le développement du sinus découvert par Léonhard Euler (1707-1783) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi x) \ = \ \pi\, x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Démonstration.

- Pour tout $x \in \,]-\pi, \pi[\, \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \phi_k(x) && \textit{(par définition de } \phi\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) && \textit{(par définition)} \\
&= \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \ln \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) && \\
&= \lim_{m \to +\infty} \left(\ln \left(\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) \right) && \textit{(par propriété de la fonction } \ln\textit{)} \\
&= \lim_{m \to +\infty} \left(\ln \left(\prod_{k=1}^{2m} s_k(x) \right) \right) && \textit{(démontré en question } \textbf{7.}\textit{)} \\
&= \lim_{m \to +\infty} \left(\ln \left(V_{2m}(x) \right) \right) && \textit{(par définition de la suite } \big(V_n(x)\big)\textit{)} \\
&= \ln \left(V(x) \right) && \begin{array}{l}\textit{(par convergence de la suite } \big(V_n(x)\big) \\ \textit{et par continuité de la fonction } \ln \textit{ en} \\ V(x)\textit{, quantité dans }]0, +\infty[\textit{ d'après} \\ \textit{la question } \textbf{7.}\textit{, car } x \notin \pi\,\mathbb{Z}\textit{)}\end{array} \\
&= \ln \left(\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) \right) && \textit{(par définition de } V(x)\textit{)}
\end{aligned}$$

Finalement, en composant à droite par la fonction exp :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right) &= \exp\left(\phi(x) \right) \\
&= \exp\left(\ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) \right) && \textit{(car } x \in \,]-\pi, \pi[\, \setminus \{0\}\textit{)} \\
&= \frac{\sin(x)}{x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \,]-\pi, \pi[\, \setminus \{0\} : \sin(x) \ = \ x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi} \right)^2 \right).}$$

Commentaire

- Rappelons que la fonction ln vérifie :

$$\forall a > 0, \forall b > 0,\ \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Cette propriété établit que l'image par la fonction ln d'un produit fini de termes est la somme des images par la fonction ln de chacun des termes.

Commentaire

- Il est alors légitime de se poser la question de la généralisation de cette propriété à un produit infini de termes. Plus précisément, on s'interroge sur l'ensemble des suites $(u_n) \in \,]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{+\infty} u_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(u_k)$$

Pour démontrer cette propriété, il faut déjà s'assurer que tous les termes existent (tous les termes de la suite (u_n) doivent être strictement positifs ; la série $\sum \ln(u_n)$ doit être convergente ; le produit $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ doit exister et être strictement positif). Sous ces hypothèses, une démonstration analogue à celle qui est faite dans la question permet de conclure.

$$\begin{aligned} \ln\left(\prod_{k=1}^{+\infty} u_k\right) &= \ln\left(\lim_{m\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{m} u_k\right)\right) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{m} u_k\right) \qquad (*) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \ln(u_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(u_k) \end{aligned}$$

Le point $(*)$ est le cœur de la démonstration. Il est vérifié car la fonction ln est continue au point $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} u_k > 0$ et que la suite $\left(\prod\limits_{k=1}^{m} u_k\right)_m$ converge vers ce point.

- Par ailleurs :
  - × l'égalité précédente est aussi vérifiée en 0 puisque $\sin(0) = 0$ et :

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\frac{0}{k\,\pi}\right)^2\right) = \lim_{m\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{m} 1\right) = \lim_{m\to+\infty} 1 = 1$$

  - × l'égalité précédente est aussi vérifiée en π puisque $\sin(\pi) = 0$ et :

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi}{k\,\pi}\right)^2\right) = \lim_{m\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) = \lim_{m\to+\infty} \left(0 \times \prod_{k=2}^{m}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) = \lim_{m\to+\infty} 0 = 0$$

  - × de la même manière, l'égalité précédente est aussi vérifiée en $-\pi$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in [-\pi, \pi] : \sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \left(\frac{x}{k\,\pi}\right)^2\right).}$$

- Par ailleurs, si $y \in \mathbb{R}$, alors il existe $j \in \mathbb{Z}$ et $x \in [-\pi, \pi]$ tels que : $y = x + j\,2\pi$. Alors, en reprenant la notation $h : x \mapsto x\,S(x)$:

$$\begin{array}{rcll} h(y) & = & h(x + j\,2\pi) & \\ & = & h(x) & \textit{(car la fonction } h \textit{ est périodique de période } 2\pi\textit{)} \\ & = & x\,S(x) & \\ & = & \sin(x) & \textit{(par l'égalité précédente)} \\ & = & \sin(x + j\,2\pi) & \textit{(car la fonction } \sin \textit{ est périodique de période } 2\pi\textit{)} \\ & = & \sin(y) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } y \in \mathbb{R} : \sin(y) \ = \ h(y) \ = \ y\,S(y) \ = \ y \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{y}{k\,\pi}\right)^2\right).}$$

$$\boxed{\text{En particulier, pour tout } x \in \mathbb{R} : \sin\left(\pi\,x\right) \ = \ \pi\,x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{\cancel{\pi}\,x}{k\,\cancel{\pi}}\right)^2\right).}$$

□

Partie V

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note g_n la fonction de la variable réelle x, définie pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier strictement négatif, par :

$$\forall x \notin \mathbb{Z}_-^*, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ g_n(x) \ = \ \frac{\exp\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + \frac{x}{n}}$$

11. Montrer que, pour tout $x \notin \mathbb{Z}_-^*$, $G(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ existe et vérifie : $G(x) \neq 0$.

Démonstration.
Pour tout $x \notin \mathbb{Z}_-^*$, on définit la suite $\big(G_n(x)\big)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ G_n(x) \ = \ \prod_{k=1}^{n} g_k(x)$$

- Soit $x_0 \notin \mathbb{Z}_-^*$. Remarquons que pout tout $n > -x_0$: $1 + \dfrac{x_0}{n} > 0$.
Pour n suffisamment grand ($n > \lceil -x_0 \rceil$) :

$$\begin{array}{rcl} G_n(x_0) & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{n} g_k(x_0) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{\lceil -x_0 \rceil} g_k(x_0) \times \prod_{\lceil -x_0 \rceil + 1}^{n} g_k(x_0) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{\lceil -x_0 \rceil} g_k(x_0) \times \exp\left(\ln\left(\prod_{\lceil -x_0 \rceil + 1}^{n} g_k(x_0)\right)\right) \\ & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{\lceil -x_0 \rceil} g_k(x_0) \times \exp\left(\sum_{k=\lceil -x_0 \rceil + 1}^{n} \ln\big(g_k(x_0)\big)\right) \end{array}$$

- Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=\lceil -x_0\rceil+1}^{n} \ln\big(g_k(x_0)\big) &= \sum_{k=\lceil -x_0\rceil+1}^{n} \ln\left(\frac{\exp\left(\frac{x_0}{k}\right)}{1+\frac{x_0}{k}}\right) \\ &= \sum_{k=\lceil -x_0\rceil+1}^{n} \left(\ln\left(\exp\left(\frac{x_0}{k}\right)\right) - \ln\left(1+\frac{x_0}{k}\right) \right) \\ &= \sum_{k=\lceil -x_0\rceil+1}^{n} \left(\frac{x_0}{k} - \ln\left(1+\frac{x_0}{k}\right) \right)\end{aligned}$$

- Comme $\dfrac{x_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\left(\frac{x_0}{n} - \ln\left(1+\frac{x_0}{n}\right) \right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x_0}{n}\right)^2$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- $\left(\dfrac{x_0}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x_0}{n}\right) \right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 (> 1). Elle est donc convergente.

Ainsi, par théorème de domination des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant\lceil -x_0\rceil+1} \left(\frac{x_0}{n} - \ln\left(1+\frac{x_0}{n}\right) \right)$ est convergente (et de somme $\displaystyle\sum_{k\geqslant\lceil -x_0\rceil+1}^{+\infty} \left(\frac{x_0}{n} - \ln\left(1+\frac{x_0}{n}\right) \right)$).

- Finalement, par composition de limites :

$$G_n(x_0) = \prod_{k=1}^{\lceil -x_0\rceil} g_k(x_0)\times\exp\left(\sum_{k=\lceil -x_0\rceil+1}^{n} \ln\big(g_k(x_0)\big)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=1}^{\lceil -x_0\rceil} g_k(x_0)\times\exp\left(\sum_{k=\lceil -x_0\rceil+1}^{+\infty} \ln\big(g_k(x_0)\big)\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x_0 \notin \mathbb{Z}_-^*,\ G(x_0) = \prod_{k=1}^{+\infty} g_k(x_0) \text{ existe.}}$$

- Enfin :

× $\displaystyle\prod_{k=1}^{\lceil -x_0\rceil} g_k(x_0) \neq 0$ puisque : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g_k(x_0) \neq 0$ (car $x_0 \notin \mathbb{Z}_-^*$)

× $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=\lceil -x_0\rceil+1}^{+\infty} \ln\big(g_k(x_0)\big)\right) > 0$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x_0 \notin \mathbb{Z}_-^*,\ G(x_0) = \prod_{k=1}^{+\infty} g_k(x_0) \neq 0.}$$

□

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $G_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} g_k(x)$. Montrer :

$$\ln\big(G_n(1)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$$

En déduire la suite $\left(\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)\right)$ tend vers une limite finie γ strictement positive lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $g_k(1) \;=\; \dfrac{\exp\left(\frac{1}{k}\right)}{1+\frac{1}{k}} > 0$.

  Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\ln\left(G_n(1)\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\exp\left(\frac{1}{k}\right)}{1+\frac{1}{k}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) && \textit{(par propriété de la fonction } \ln\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \left(\ln(n+1) - \cancel{\ln(1)}\right)
\end{aligned}$$

- Or :
  × $G(1) > 0$ d'après la question précédente puisque $1 \notin \mathbb{Z}_-^*$.
  × la fonction ln est continue en $G(1) > 0$.

  Ainsi, par composition de limites, $\ln\left(G_n(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(G(1)\right)$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \ln\left(G_n(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(G(1)\right)}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \left(\ln(n+1) - \ln(n+1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(G(1)\right) + \cancel{\ln(1+0)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)\right) \text{ converge vers } \gamma = \ln\left(G(1)\right).}$$

- Par ailleurs, par inégalité de convexité : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

  En utilisant cette propriété en $x = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, on obtient : $\dfrac{1}{k} - \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \geqslant 0$.

  La série $\sum \left(\dfrac{1}{k} - \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\right)$ est donc à termes positifs. On en déduit que la suite des sommes partielles associées (qui n'est autre que la suite $\left(\ln\left(G_n(1)\right)\right)$) est croissante. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(G_n(1)\right) \geqslant \ln\left(G_1(1)\right) = 1$$

$$\boxed{\text{Par passage à la limite : } \gamma = \ln\left(G(1)\right) \geqslant 1 > 0.}$$

□

13. Pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier négatif ou nul, on pose :

$$\Gamma(x) \ = \ \frac{e^{-\gamma x}}{x} \ G(x)$$

a) Calculer $\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$.

b) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14. Montrer que pour toute valeur de x qui n'est pas dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$G_n(x)\, G_n(-x) \ = \ \frac{1}{T_n(\pi\, x)}$$

15. En déduire la formule des compléments :

$$\forall x \notin \mathbb{Z}, \quad \Gamma(x)\, \Gamma(1-x) \ = \ \frac{\pi}{\sin(\pi\, x)}$$

16. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\, dt$.

1. Démontrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.

Dans toute la suite :

× on note $h : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$.

× pour tout $x_0 \in\ ]0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto h(x_0, t)$.

× pour tout $t_0 \in\ ]0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto h(x, t_0)$.

Soit $x_0 > 0$.

- La fonction $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto \dfrac{e^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}}\, dt$ est impropre en $+\infty$.
- Remarquons :
  × $\forall t \in\ ]0, +\infty[$, $e^{-x_0\, t} \geqslant 0$.
  × $\dfrac{e^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}} = \underset{t \to +\infty}{O}\left(e^{-x_0\, t}\right)$.
  En effet : $\dfrac{\frac{e^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}}}{e^{-x_0\, t}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  (en particulier, ce quotient est donc borné)
  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x_0\, t}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $x_0 > 0$.

Par critère de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0\, t}}{\sqrt{1+t}}$ est (absolument) convergente.

On en conclut, que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Commentaire

- Lorsque l'énoncé demande de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction, il faut mettre en place un raisonnement du type :

  La quantité $f(x)$ est bien définie $\Leftrightarrow$ Le réel x appartient à l'intervalle ...

- Ici, l'énoncé est différent : on demande de démontrer que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[$. Non seulement l'intervalle nous est fourni mais en plus on ne demande de résultat que sur cet intervalle et pas sur le reste des réels. On peut donc limiter l'étude à cet intervalle. □

2. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in\,]0,+\infty[$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\, \mathrm{e}^{-t\,x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A =]0,+\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in A$:

$$\underline{h}_t{}'(x) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,(-t)\,\mathrm{e}^{-t\,x} = \frac{-t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{e}^{-t\,x}$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

(0) Intégrabilité (sans forcément dominer)

Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (c'est le résultat de la question ***1.***).

(1) Intégrabilité par domination

Soit $(a,b) \in\,]0,+\infty[\, \times\,]0,+\infty[$. On suppose $a \leqslant b$.
Soit $(x,t) \in [a,b] \times\,]0,+\infty[$.

$$\left|\,\underline{h}_t'(x)\,\right| = \left|\frac{-t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{e}^{-t\,x}\right| = |-1|\,\left|\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right|\,\left|\mathrm{e}^{-x\,t}\right| = \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{e}^{-xt}$$

Or :

× comme $t > 0$, alors $t+1 > 1$ puis $\dfrac{1}{\sqrt{t+1}} < 1$ et enfin : $\dfrac{t}{t+1} < t$.

× comme $t > 0$ et $a \leqslant x \leqslant b$, alors $a\,t \leqslant x\,t \leqslant b\,t$ et $-a\,t \geqslant -x\,t \geqslant -b\,t$. Enfin :

$$\mathrm{e}^{-b\,t} \quad\leqslant\quad \mathrm{e}^{-x\,t} \quad\leqslant\quad \mathrm{e}^{-a\,t}$$ *(par croissance de la fonction* exp *sur* $\mathbb{R}$*)*

Finalement :

$$\left|\,\underline{h}_t'(x)\,\right| = \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{e}^{-xt} \;\leqslant\; t\,\mathrm{e}^{-a\,t}$$

Or, comme $a > 0$, la fonction $\varphi : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-a\,t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
(cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{h}_t'(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par domination)

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $A =]0, +\infty[$.

- On en déduit de plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} \underline{h_t}'(x)\ dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{-t}{\sqrt{t+1}}\ \mathrm{e}^{-t\,x}\ dt \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t}{\sqrt{t+1}}\ \mathrm{e}^{-t\,x}\ dt.$

Commentaire

- L'étape d'intégrabilité par domination consiste à exhiber une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ qui est intégrable sur le domaine d'intégration étudié et dont l'expression ne contient plus la variable x.
- Lorsqu'on utilise un théorème de régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre, la domination peut s'effectuer sur tout segment $[a, b]$ de l'intervalle de régularité A. Formellement, cela démontre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de l'intervalle A et ainsi qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A tout en entier.
- Au passage, notons que le réel b n'apparaît pas dans la domination. On aurait aussi pu démontrer la domination pour n'importe quel intervalle du type $[a, +\infty[$ ce qui permet de conclure au caractère $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ et donc au caractère $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. □

3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 dont f est la solution (*on pourra réaliser une IPP*).

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- On procède par Intégrations Par Parties (IPP). Sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \quad = \quad \left[\, 2\sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, \right]_0^{+\infty} + 2x \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt$$

Or : $\dfrac{\sqrt{1+t}}{\mathrm{e}^{x\,t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^{x\,t}} = \dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{(\,\mathrm{e}^{x}\,)^{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Le crochet généralisé est donc convergent. On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt$ sont de même nature, ce qui permet de lever la réserve de convergence puisque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt$ est convergente (d'après la question ***1.***).

- Finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(\lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\right) - \sqrt{1}\, \mathrm{e}^{0} \right) + 2x \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\ &= -2 + 2x \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{2x \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt = f(x) + 2}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned} -f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, \mathrm{e}^{-x\,t}\, dt \end{aligned}$$

(par linéarité de l'intégrale, toutes les intégrales en présence étant convergentes)

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
-2x\, f'(x) &= 2x \int_0^{+\infty} \sqrt{1+t}\ \mathrm{e}^{-x\,t}\ dt - 2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \mathrm{e}^{-x\,t}\ dt \\
&= \big(\, f(x) + 2 \,\big) - 2x\ (\, f(x)\,) \\
&= \big(\, 1 - 2x \,\big)\ f(x) + 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc solution de l'équation différentielle : } 2x\, y' + (1-2x)\, y + 2 = 0.}$$

□