DS1

Exercice 1

Partie A : Étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

1. a) Montrer : $\forall t \in \,]0,+\infty[,\ \dfrac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1)-\ln(t) \leqslant \dfrac{1}{t}$.

Démonstration.
Soit $t \in \,]0,+\infty[$.

- Soit $x \in [t, t+1]$.

$$\begin{array}{llllll} \text{Comme } t & \leqslant & x & \leqslant & t+1 & \\ \text{alors } \dfrac{1}{t} & \geqslant & \dfrac{1}{x} & \geqslant & \dfrac{1}{t+1} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \end{array}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($t \leqslant t+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_t^{t+1} \frac{1}{t}\,dx & \geqslant & \displaystyle\int_t^{t+1} \frac{1}{x}\,dx & \geqslant & \displaystyle\int_t^{t+1} \frac{1}{t+1}\,dx \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \big((t+1)-t\big)\,\dfrac{1}{t} & & & & \big((t+1)-t\big)\,\dfrac{1}{t+1} \end{array}$$

Enfin : $\displaystyle\int_t^{t+1} \frac{1}{x}\,dx = [\ \ln(x)\ ]_t^{t+1} = \ln(t+1)-\ln(t)$.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall t \in \,]0,+\infty[,\ \frac{1}{t+1} \leqslant \ln(t+1)-\ln(t) \leqslant \frac{1}{t}.}$$

□

b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln\big((n+1)+1\big)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\big(n+1\big)\right) \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) + \ln\big(n+1\big) - \ln\big(n+2\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \big(\ln\big(n+2\big) - \ln\big(n+1\big)\big) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (de droite) précédente en $t = n+1 > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{n+1} - \Big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\Big) \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\right) + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (de gauche) précédente en $t = n > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{n+1} - \Big(\ln(n+1) - \ln(n)\Big) \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n \leqslant 0. \text{ La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} - \ln(n)\right) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} - \ln(n+1)\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0}$$

On conclut des trois points précédents que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

$$\boxed{\text{Ainsi, les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes et de même limite notée } \gamma.}$$ □

2. Montrer alors : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le résultat de la question ***1.a)***, en $t = k > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient alors, par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big)}_{= \ln(n+1) - \cancel{\ln(1)}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(par sommation télescopique)

- L'inégalité de gauche permet alors d'obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ \ln\big(n+1\big) - \frac{1}{n+1}$$

L'inégalité de droite permet quant à elle d'obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \geqslant\ \ln\big(n+1\big)$$

Finalement :

$$\ln\big(n+1\big) \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ \ln\big(n+1\big) - \frac{1}{n+1}$$

- On en déduit, pour tout $n \geqslant 2$, en divisant par $\ln(n) > 0$:

$$\frac{\ln\big(n+1\big)}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \ \leqslant\ \frac{\ln\big(n+1\big) - \frac{1}{n+1}}{\ln(n)}$$

Or :

× $\dfrac{\ln\big(n+1\big)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\big(n\ (1+\frac{1}{n})\big)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

En effet : $\ln\big(1+\frac{1}{n}\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0.$

× $\dfrac{\ln\big(n+1\big) - \frac{1}{n+1}}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\big(n+1\big)}{\ln(n)} - \dfrac{1}{(n+1)\ \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1.$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Commentaire

Les questions précédentes illustrent le procédé classique de comparaison série-intégrale. Il est indiqué dans le programme officiel que « *les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas d'une fonction monotone* ». Rappelons rapidement le procédé.

- On considère une fonction $f :]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ continue sur $]0,+\infty[$.
- On suppose de plus que f est décroissante sur $]0,+\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \ \leqslant\ \int_{k}^{k+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ f(k)$$

On en déduit par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \ \leqslant\ \int_{1}^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

□

3. ***a)*** Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \dfrac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leqslant \dfrac{1}{2}\,(v_n - u_n)$.

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  - × convergente de limite γ.
  - × croissante.

  Ainsi : $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\ u_n$. En particulier, γ est un majorant de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \gamma$$

- De même, $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\ v_n$ est un minorant de la suite décroissante et convergente (v_n).

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n.}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} |\,v_n - u_n\,| & = & |\,v_n - u_n + \gamma - \gamma\,| & \\ & = & \big|\,(v_n - \gamma) - (u_n - \gamma)\,\big| & \\ & \geqslant & \big|\,|v_n - \gamma| - |u_n - \gamma|\,\big| & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ & = & \big|\,(v_n - \gamma) - (\gamma - u_n)\,\big| & \textit{(car } u_n - \gamma \leqslant 0 \textit{ et } v_n - \gamma \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \big|\,u_n + v_n - 2\,\gamma\,\big| & \end{array}$$

  Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \big|\,u_n + v_n - 2\,\gamma\,\big| \leqslant |\,v_n - u_n\,| = v_n - u_n$$

$$\boxed{\text{En multipliant par } \frac{1}{2}, \text{ on obtient : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leqslant \frac{1}{2}\,(v_n - u_n).}$$

Commentaire

- Rappelons que l'inégalité triangulaire peut s'écrire :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \big||a| - |b|\big| \leqslant \big|\,a \pm b\,\big| \leqslant |a| + |b|$$

- On applique dans cette question l'inégalité de gauche avec $a = v_n - \gamma$ et $b = u_n - \gamma$.

b) En déduire une fonction **Python** (que l'on nommera `approx`) qui prend pour argument une précision `eps` et qui renvoie une approximation du réel γ à `eps` près.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} \left| \dfrac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| & \leqslant & \dfrac{1}{2}\,(v_n - u_n) \\ & = & \dfrac{1}{2} \left(\left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}} - \ln(n) \right) - \left(\cancel{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}} - \ln(n+1) \right) \right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\ \big(\ \ln(n+1) - \ln(n)\ \big) \\ & = & \dfrac{1}{2} \left(\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \right) = \dfrac{1}{2}\ \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \end{array}$$

- On cherche ici à trouver un entier N tel que u_N est une valeur approchée de γ à `eps` près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$\left| \frac{u_N + v_N}{2} - \gamma \right| \leqslant \texttt{eps}$$
Dans ce cas, $\frac{u_N+v_N}{2}$ sera la valeur approchée recherchée.
- Or, d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \dfrac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leqslant \dfrac{1}{2} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\dfrac{1}{2} \ln\left(1 + \dfrac{1}{N}\right) \leqslant \texttt{eps}$.
Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :
$$\left| \frac{u_N + v_N}{2} - \gamma \right| \leqslant \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \leqslant \texttt{eps}$$
- On propose alors le programme suivant :

```python
import numpy as np
def approx(eps) :
  k = 1
  S = 1
  while 1 / (2 * np.log(1 + 1/k)) > eps :
    k = k + 1
    S = S + 1/k
  N = k
  g = S - np.log(N+1)/2 - np.log(N)/2
  return g
```

En fin de programme, la variable `g` contient la valeur $\dfrac{u_N + v_n}{2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{\ln(N+1)}{2} - \frac{\ln(N)}{2}$ où N est la valeur introduite ci-dessus.

Commentaire

- Lorsqu'on écrit une boucle `while`, il est préférable de s'assurer en amont de sa terminaison. C'est bien le cas ici. En effet, la suite $\left(\dfrac{1}{2} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)_{n \geqslant 1}$ est convergente de limite 0. Ce qui signifie :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left| \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 0 \right| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi, quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie au départ (ici `eps`), on est toujours en mesure de trouver un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel on aura : $\dfrac{1}{2} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \texttt{eps}$.
- On pouvait déterminer, sans utiliser de boucle, un entier N tel que u_N est une valeur approchée à `eps` près de γ. Pour ce faire, on remarque :
$$\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \texttt{eps} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 2\ \texttt{eps} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leqslant e^{2\,\texttt{eps}} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant e^{2\,\texttt{eps}} - 1$$
L'entier $N = \left\lceil \dfrac{1}{e^{2\,\texttt{eps}} - 1} \right\rceil$ convient.

$\square$

Partie B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x} \right)$ converge.

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 0$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \;=\; \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas, la série concernée est bien convergente.}}$$

- Si $x \neq 0$, remarquons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \;=\; \frac{(\cancel{k} + x) - \cancel{k}}{k\,(k+x)} \;=\; \frac{x}{k\,(k+x)}$$

  × $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k^2} \geqslant 0$
  × $\dfrac{x}{k\,(k+x)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{k^2}$
  × La série $\sum \dfrac{x}{k^2}$ est convergente en tant que série de Riemann (à multiplication près de son terme général par $x \neq 0$) d'exposant 2 (> 1).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Dans ce cas, par théorème de comparaison des séries à termes positifs,}\\ \text{la série } \sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x} \right) \text{ converge.}\end{array}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer que pour tout $x \in [0, +\infty[$ (même dans le cas $x = 0$) :

$$\frac{x}{k\,(k+x)} \;=\; \underset{k \to +\infty}{O} \left(\frac{1}{k^2} \right)$$

  Cette présentation permet d'éviter d'avoir à effectuer la disjonction de cas présente dans la réponse ci-dessus.

- Le point précédent illustre l'intérêt de la rédaction à l'aide du théorème de domination. Cela permet de s'abstraire des constantes multiplicatives et d'éviter en conséquence certaines discussions (sur la valeur de cette constante ou sur le fait que

□

On pose alors, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x} \right)$.

5. a) Calculer $S(0)$ et vérifier : $S(1) = 1$.

Démonstration.

- $S(0) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+0} \right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$

$$\boxed{S(0) = 0}$$

- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{(par sommation télescopique)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\boxed{S(1) = 1}$$

□

b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}}$.

En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \quad \text{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} &= \sum_{\substack{k \in [\![1, 2n+1]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k \in [\![1, 2n+1]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} + \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + 2 - 2\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\
&= 2 - 2\left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}}$$

- Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} &= 2 - \frac{2}{2n+1} - 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}}}$$

- Enfin :

  × $2 - \dfrac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$

  × $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\ dt$ où $f : t \mapsto \dfrac{2}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$. De plus :

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^1 \frac{2}{1+t}\ dt = 2\left[\ \ln\left(|1+t|\right)\ \right]_0^1 = 2\ \left(\ln(2) - \cancel{\ln(1)}\right)$$

$$\boxed{S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\ \ln(2).}$$

Commentaire

- On détaille ici une démonstration directe permettant de comprendre comment il est possible d'obtenir le résultat. Cela dit, le résultat étant fourni, il est tout à fait possible de raisonner par récurrence. C'est certainement plus simple et donc à privilégier pour cette question.
- Détaillons la rédaction de la première égalité.

  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$

  où $\quad \mathscr{P}(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = 2 - 2\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}$.

  ▸ **Initialisation** :

  – D'une part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

  – D'autre part : $2-2\displaystyle\sum_{k=1+1}^{2+1}\frac{1}{k} = 2-2\sum_{k=2}^{3}\frac{1}{k} = 2-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 2-2\,\frac{5}{6} = 2-\frac{5}{3} = \frac{1}{3}$.

  D'où $\mathscr{P}(1)$.

Commentaire

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
$$\left(\text{c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} \right)$$
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+\frac{1}{2}} \\ &= \left(2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+\frac{3}{2}} \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(2 - 2 \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} \right) - 2\,\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+3} \\ &= \left(2 - 2 \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+3} \\ &= \left(2 - 2 \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{k} \right) - \frac{2}{2n+2} - \frac{2}{2n+3} \\ &= 2 - 2 \sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} \end{aligned}$$
D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n).}$$

□

6. a) Montrer : $\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ S(y) - S(x) = (y-x) \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)\,(k+y)}$.

Démonstration.

- Dans la suite, notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \geqslant 0$:
$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+u} \right)$$
- Soit $(x,y) \in [0,+\infty[^2$. Remarquons tout d'abord :
$$\begin{aligned} S(x) - S(y) &= \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x) \right) - \left(\lim_{n\to+\infty} S_n(y) \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \Big(S_n(x) - S_n(y) \Big) \qquad \textit{(par linéarité de la limite de suites convergentes)} \end{aligned}$$

- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_n(x) - S_n(y) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y}\right) \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+y}\right) \qquad \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+y} - \frac{1}{k+x}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(\cancel{k}+x) - (\cancel{k}+y)}{(k+x)\,(k+y)}\right) \\
&= (x-y) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+x)\,(k+y)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)\,(k+y)}.}$$

Commentaire

Rappelons que la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. En conséquence, il n'est pas envisageable d'écrire :

$$\cancel{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+x}}$$

La principale difficulté de la question réside alors dans le fait d'effectuer le calcul à l'aide des sommes partielles.

□

b) En déduire que S est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in [0, +\infty[^2$. Supposons $x \leqslant y$. Alors :

× $y - x \geqslant 0$.

× comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{(k+x)\,(k+y)} \geqslant 0$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)\,(k+y)} \geqslant 0$.

Ainsi : $S(y) - S(x) \geqslant 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Finalement, pour tout } (x,y) \in [0,+\infty[^2 : x \leqslant y \ \Rightarrow\ S(x) \leqslant S(y).\\ \text{La fonction } S \text{ est donc croissante.}\end{array}}$$

Commentaire

- Il s'agit d'une question bilan qui ne présente pas de difficulté particulière. Cela illustre le fait qu'il n'y a pas forcément de progression croissante de la difficulté des questions dans les énoncés des épreuves de concours. En conséquence, même si on ne parvient pas à traiter plusieurs questions d'affilée, il ne faut pas pour autant passer toute l'exercice. Il faut au contraire s'atteler à essayer de traiter les questions qui suivent, ce qui permettra à terme de tomber sur une question dont la résolution est plus simple.

□

c) Montrer :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \forall h \in \mathbb{R},\ x+h \geqslant 0 \ \Rightarrow \left| \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2} \right| \leqslant |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$$

En déduire que S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et : $\forall x \in [0,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,+\infty[$ et soit $h \in \mathbb{R}$.
On suppose $x+h \geqslant 0$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
& \left| \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2} \right| \\
= & \left| \dfrac{1}{h} \left((\cancel{x}+h)-\cancel{x}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\big(k+(x+h)\big)\,(k+x)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2} \right| && \text{\textit{(en appliquant le résultat de la question \textbf{6.a)} en} } y = x+h \geqslant 0 \text{ \textit{et} } x = x \geqslant 0\text{)} \\
= & \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)\,\big((k+x)+h\big)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2} \right| \\
= & \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{(k+x)\,(k+x+h)} - \dfrac{1}{(k+x)^2} \right) \right| \\
= & \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(\cancel{k+x}) - (\cancel{k+x}+h)}{(k+x)^2\,(k+x+h)} \right| \\
\leqslant & \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \dfrac{-h}{(k+x)^2\,(k+x+h)} \right| && \text{\textit{(par inégalité triangulaire)}} \\
= & \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{|-h|}{\left| (k+x)^2\,(k+x+h) \right|} \\
= & \ |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2\,(k+x+h)} && \text{\textit{(car} } |-h| = |h| \text{ \textit{et} } (k+x)^2\,(k+x+h) \geqslant 0\text{)} \\
\leqslant & \ |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2 \times k} && \text{\textit{(car} } (k+x)^2 \geqslant k^2 \text{ \textit{et} } k+x+h \geqslant k\text{)}
\end{aligned}$$

- Ainsi, on obtient :

$$0 \ \leqslant \left| \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2} \right| \leqslant |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$$

Or :
× $0 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.
× $|h| \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ car $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}$ est un réel et $|h| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{h \to 0} \left(\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+x)^2} \right) = 0$$

ou encore :

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cela démontre que la fonction } S \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\text{ et :}\\ S'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}\end{array}}$$

□

On admet que S' est également continue sur $[0,+\infty[$.

7. a) Montrer : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ S(x+1) = S(x) + \dfrac{1}{x+1}$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- Par définition de S :

$$\begin{aligned}
& S(x+1) - S(x) \\
= \ & \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+(x+1)}\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \\
= \ & \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+(x+1)}\right) \right) - \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \right) \\
= \ & \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+(x+1)}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \right) \quad \textit{(par linéarité de la limite de suites convergentes)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+(x+1)}\right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \right) \\
= \ & \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+(x+1)} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) \\
= \ & \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1} \quad \textit{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$S(x+1) - S(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{1+x}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in [0,+\infty[,\ \ S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.}$$

Commentaire

La remarque faite en question ***6.a)*** s'applique ici aussi. Il faut prêter attention à l'existence des objets utilisés lors de leur manipulation. La linéarité d'une somme infinie ne peut être évoquée que si toutes les séries concernées sont convergentes. Dans le cas contraire, la somme (infinie) de la somme de 2 termes ne peut s'écrire comme somme de la somme (infinie) de chacun des 2 termes :

$$\cancel{\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+x}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+x+1}}$$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente appliquée en $x = k \geqslant 0$:

$$S(k+1) - S(k) = \frac{1}{k+1}$$

  On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(S(k+1) - S(k)\Big) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}$$

- Enfin :
  × $\sum_{k=0}^{n-1}\Big(S(k+1) - S(k)\Big) = S(n) - \cancel{S(0)}$.
  × $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ par décalage d'indice.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

Commentaire

Une nouvelle fois, le résultat étant donné, il est tout à fait possible de traiter cette question par récurrence. La rédaction ci-dessus permet de comprendre comment procéder pour trouver ce résultat.

c) En utilisant la croissance de la fonction S sur $[0, +\infty[$, montrer : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Démonstration.

- Pour tout $x > 0$, par définition de la partie entière (par défaut) :

$$\lfloor x \rfloor \ \leqslant\ x\ \leqslant\ \lfloor x \rfloor + 1 \qquad (*)$$

  Ainsi, par croissance de la fonction S sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{array}{ccccc} S(\lfloor x \rfloor) & \leqslant & S(x) & \leqslant & S(\lfloor x \rfloor + 1) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor}\frac{1}{k} & & & & \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor+1}\frac{1}{k} \end{array}$$

- On en déduit, en divisant par $S(\lfloor x \rfloor) = \sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \dfrac{1}{k} > 0$:

$$1 = \frac{S(\lfloor x \rfloor)}{S(\lfloor x \rfloor)} \leqslant \frac{S(x)}{S(\lfloor x \rfloor)} \leqslant \frac{S(\lfloor x \rfloor + 1)}{S(\lfloor x \rfloor)}$$

De plus :

$$\frac{S(\lfloor x \rfloor + 1)}{S(\lfloor x \rfloor)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k} + \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}}{\sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) \sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}}$$

- Or :
  × $1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
  × $1 + \dfrac{1}{\big(\lfloor x \rfloor + 1\big) \sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k}} = 1 + \dfrac{1}{\big(\lfloor x \rfloor + 1\big)\ S\big(\lfloor x \rfloor\big)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ car $S\big(\lfloor x \rfloor\big) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\big(\lfloor x \rfloor\big) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} S(\lfloor x \rfloor) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\big(\lfloor x \rfloor\big).}$$

- Il reste alors à démontrer : $\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)$.
En repartant de l'inégalité $(*)$, par croissance de la fonction ln :

$$\ln\big(\lfloor x \rfloor\big) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln\big(\lfloor x \rfloor + 1\big)$$

et en divisant par $\ln\big(\lfloor x \rfloor\big) > 0$ (en choisissant $x > 1$) :

$$1 \leqslant \frac{\ln(x)}{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)} \leqslant \frac{\ln\big(\lfloor x \rfloor + 1\big)}{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)}$$

Enfin :
× $1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
× $\dfrac{\ln\big(\lfloor x \rfloor + 1\big)}{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)} = \dfrac{\ln\big(\lfloor x \rfloor\ (1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor})\big)}{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)} = \dfrac{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big) + \ln\big(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\big)}{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)} = 1 + \dfrac{\ln\big(1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}\big)}{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

On en déduit, par théorème d'encadrement : $\dfrac{\ln(x)}{\ln\big(\lfloor x \rfloor\big)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\big(\lfloor x \rfloor\big) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x).}$$

□

8. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \, dx$, le réel u_n étant défini dans la **Partie A**.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{1}{k} \, dx - \int_0^1 \frac{1}{k+x} \, dx \right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \big[\ln(|k+x|) \big]_0^1 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \big(\ln(k+1) - \ln(k) \big) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k) \big) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \big(\ln(n+1) - \cancel{\ln(1)} \big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 S(x) \, dx - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 S(x) \, dx - u_n &= \int_0^1 S(x) \, dx - \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \int_0^1 \left(S(x) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \right) dx && \textit{(par linéarité de l'intégral} \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \right) dx
\end{aligned}$$

- Ensuite, pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{(\cancel{k}+x) - \cancel{k}}{k\,(k+x)} \leqslant \frac{x}{k^2} \qquad \textit{(car } k(k+x) \geqslant k^2\textit{)}$$

On en déduit par sommation :

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2}$$

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$0 \leqslant \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)\right) dx \leqslant \int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2}\right) dx$$

et :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2}\right) dx = \int_0^1 x \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) dx = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) \int_0^1 x\, dx = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) \frac{x^2}{2}$$

On obtient bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 S(x)\, dx - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

□

c) Conclure : $\displaystyle\int_0^1 S(x)\, dx = \gamma$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \int_0^1 S(x)\, dx - u_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

- Or :
  × $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
  × $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ en tant que limite du reste d'ordre n d'une série convergente.

On en déduit, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 S(x)\, dx - u_n = 0$ ou encore :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 S(x)\, dx$$

Finalement, par définition de γ : $\displaystyle\int_0^1 S(x)\, dx = \gamma$.

Commentaire

- On utilise dans la démonstration que la suite dont le terme général est le reste d'une série convergente est une suite qui converge vers 0.
- C'est un résultat classique sur les séries qu'il faut savoir démontrer. Étant donnée une série $\sum z_n$ convergente, de somme notée S et dont la suite des sommes partielles est notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} z_k}_{S} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} z_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k}_{R_n}$$

La quantité $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} z_k$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum z_n$.
La suite (R_n) ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$$

$\square$

Exercice 2

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple (x,y) de réels, on ait :

$$\left| \, f(x) - f(y) \, \right| \leqslant K \times \left| \, x - y \, \right| \qquad (*)$$

Démonstration.

- Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\, x$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| \, f(x) - f(y) \, \right| \;=\; \left| \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2}\, y \right| \;=\; \frac{1}{2} \left| \, x - y \, \right| \;\leqslant\; \frac{1}{2} \left| \, x - y \, \right|$$

$$\boxed{\text{En notant } K = \frac{1}{2}, \text{ on obtient bien : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \left| \, f(x) - f(y) \, \right| \leqslant K \times \left| \, x - y \, \right|.}$$

Commentaire

N'importe quelle fonction constante (notamment la fonction $x \mapsto 0$) convient car on a alors : $\left| \, f(x) - f(y) \, \right| = 0 \;\leqslant\; K \left| \, x - y \, \right|$ pour n'importe quel réel $K > 0$.

□

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après $(*)$:

$$0 \;\leqslant\; \left| \, f(x) - f(x_0) \, \right| \;\leqslant\; K \times \left| \, x - x_0 \, \right|$$

- Or :
  × $0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.
  × $\left| \, x - x_0 \, \right| \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$.

  On en conclut, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to x_0} \left| \, f(x) - f(x_0) \, \right| = 0$ ou encore :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } f \text{ est continue en } x_0. \\ \text{Autrement dit, la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

□

3. À l'aide de la relation $(*)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

Démonstration.

- On procède par l'absurde.
  On suppose que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions réelles distinctes notées a et b.
  En particulier : $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
- En appliquant $(*)$ en $x = a$ et $y = b$, on obtient :

$$\begin{array}{ccl} \left| \, f(a) - f(b) \, \right| & \leqslant & K \times \left| \, a - b \, \right| \\ \shortparallel & & \\ \left| \, a - b \, \right| & & \textit{(car } a \textit{ et } b \textit{ sont solutions de } f(x) = x\textit{)} \end{array}$$

  Comme $a \neq b$, alors $\left| \, a - b \, \right| > 0$. On obtient alors, en divisant par $\left| \, a - b \, \right|$: $1 \leqslant K$.

  Absurde ! (car par hypothèse $K \in \,]0,1[$)

$$\boxed{\text{On en conclut que l'équation } f(x) = x \text{ admet au plus une solution.}}$$

□

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\left| \, u_{n+1} - u_n \, \right| \leqslant K^n \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $\left| \, u_{n+1} - u_n \, \right| \leqslant K^n \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$.

- **Initialisation** :
  Comme $K^0 = 1$, alors $K^0 \left| \, u_1 - u_0 \, \right| = \left| \, u_1 - u_0 \, \right| \geqslant \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (c'est-à-dire : $\left| \, u_{n+2} - u_{n+1} \, \right| \leqslant K^{n+1} \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$).

$$\begin{aligned} \left| \, u_{n+2} - u_{n+1} \, \right| &= \left| \, f(u_{n+1}) - f(u_n) \, \right| \\ &\leqslant K \left| \, u_{n+1} - u_n \, \right| && \textit{(d'après } (*)\textit{)} \\ &\leqslant K \times K^n \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right| && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= K^{n+1} \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right| \end{aligned}$$

  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n).}$$

□

b) Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

Démonstration.

- D'après la question précédente :
  × $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left| \, u_{n+1} - u_n \, \right| \leqslant K^n \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$.
  × la série $\sum K^n$ converge en tant que série géométrique de raison $K \in \,]0, 1[$.
  Ainsi, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \left| \, u_{n+1} - u_n \, \right|$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum \left(u_{n+1} - u_n\right) \text{ est (absolument) convergente.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right) = u_n - u_0$$

  On en déduit :

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right)$$

  Comme la série $\sum \left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1} - u_k\right) \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Il en est donc de même de la suite (u_n).

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente (de limite } a = u_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(u_{k+1} - u_k\right)\text{).}}$$

□

c) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccl} u_{n+1} & = & f(u_n) & & \textit{(par définition)} \\ & & & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n \to +\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n \to +\infty} & & \\ & & & & \\ a & & f(a) & & \begin{array}{l}\textit{(car la suite } (u_n) \textit{ converge vers } a \textit{ et comme } f \\ \textit{continue sur } \mathbb{R}, \textit{ la suite } (u_n) \textit{ converge vers } f(a))\end{array} \end{array}$$

On en déduit que a est une solution de l'équation de $f(x) = x$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admettant au plus une solution, on en déduit que } a \text{ est l'unique solution de cette équation.}}$$

□

5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} \left| \, u_{i+1} - u_i \, \right| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$.

Démonstration.
D'après la question ***4.a)***, pour tout $i \in [\![n, n+p-1]\!]$:

$$\left| \, u_{i+1} - u_i \, \right| \leqslant K^i \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$$

$$\boxed{\text{En sommant les inégalités précédentes, on obtient : } \displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} \left| \, u_{i+1} - u_i \, \right| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \left| \, u_1 - u_0 \, \right|.}$$

□

b) En déduire l'inégalité :

$$\left| \, u_{n+p} - u_n \, \right| \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right|$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord, par télescopage : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} \big(u_{i+1} - u_i\big) = u_{n+p} - u_n$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \left| \, u_{n+p} - u_n \, \right| & = & \left| \displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} \big(u_{i+1} - u_i\big) \right| & \\ & \leqslant & \displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} \left| \, u_{i+1} - u_i \, \right| & \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ & \leqslant & \displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right| & \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \\ & \leqslant & \left| \, u_1 - u_0 \, \right| \displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i & \\ & = & \left| \, u_1 - u_0 \, \right| \dfrac{K^n - K^{n+p}}{1 - K} & \textit{(car } K \neq 1\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \left| \, u_{n+p} - u_n \, \right| \leqslant K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} \times \left| \, u_1 - u_0 \, \right|.}$$

□

c) Établir enfin l'inégalité suivante :

$$\mid a - u_n \mid \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times \mid u_1 - u_0 \mid$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × comme la suite (u_n) converge vers a : $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{p+n} = a$.
  - × comme $K \in \,]0, 1[$: $\lim\limits_{p\to+\infty} K^p = 0$.
- Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente :

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{p\to+\infty} \mid u_{n+p} - u_n \mid & \leqslant & \lim\limits_{p\to+\infty} \left(K^n \times \dfrac{1-K^p}{1-K} \times \mid u_1 - u_0 \mid \right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mid a - u_n \mid & & \dfrac{K^n}{1-K} \times \mid u_1 - u_0 \mid \end{array}$$

  L'égalité de gauche est obtenue par continuité de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mid a - u_n \mid \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times \mid u_1 - u_0 \mid.}$$

□

6. Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; f(t) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$, pour tout réel t.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car elle est l'inverse $f = \dfrac{1}{g}$ où la fonction $g : t \mapsto 1 + \mathrm{e}^t$:
  - × est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
  - × `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t + 1 > 0$).
- Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = -\frac{-g'(t)}{\big(g(t)\big)^2} = -\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \; f'(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\frac{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)^2 - \mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)\,2\,\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^4} \\ &= -\mathrm{e}^t\,(1+\mathrm{e}^t)\,\frac{(1+\mathrm{e}^t) - 2\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^4} \\ &= -\mathrm{e}^t\,\frac{1-\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \; f''(t) = \mathrm{e}^t\,\frac{\mathrm{e}^t - 1}{(1+\mathrm{e}^t)^3}}$$

□

b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \left| \ f'(t) \ \right| \leqslant \frac{1}{4}$$

Démonstration.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t > 0$ et $(1+\mathrm{e}^t)^3 > 0$ donc $f''(t) = \mathrm{e}^t \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{(1+\mathrm{e}^t)^3}$ est du signe de $\mathrm{e}^t - 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f''(t) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^t - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^t > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad t > 0 \qquad \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,1[\textit{)} \end{aligned}$$

- On en déduit le tableau de variations de f' suivant.

t	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Détaillons les éléments de ce tableau :

× $\mathrm{e}^t \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{(1+\mathrm{e}^t)^3} \underset{t \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^t \dfrac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t)^3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

× $\mathrm{e}^t \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{(1+\mathrm{e}^t)^3} \underset{t \to -\infty}{\sim} \mathrm{e}^t \dfrac{-1}{(1)^3} = -\mathrm{e}^t \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Tout d'abord, d'arpès le tableau de variations :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) \leqslant 0$$

- De plus, la fonction f' est :

  × (strictement) décroissante sur $]-\infty, 0[$.

  × (strictement) croissante sur $[0, +\infty[$.

  Elle admet donc un minimum en 0. Autrement dit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) \leqslant -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{4} \leqslant f'(t) \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{4} \ \text{ et donc } \left| \ f'(t) \ \right| \leqslant \frac{1}{4}.}$$

□

c) En déduire que f est $\dfrac{1}{4}$-contractante.

Démonstration.
Remarquons :

× f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

× $\forall t \in \mathbb{R}, \left|f'(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On en déduit, par inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left|\, f(x) - f(y) \,\right| \ \leqslant \ \frac{1}{4} \left|\, x - y \,\right|$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc bien } \frac{1}{4}\text{-contractante.}}$$

□

d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ étant } \frac{1}{4}\text{-contractante, la suite } (u_n) \text{ est convergente} \\ \text{d'après le résultat de la question } \textbf{\textit{4.b)}}\end{array}}$$

□

e) Écrire une fonction **Python** (on la nommera `suite`) qui, pour une valeur donnée de n, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 1 / (1 + np.exp(u))
    return u
```

□

f) En s'appuyant sur le résultat de la question ***5.c)***, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant \dfrac{2000}{3}$.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que u_N est une valeur approchée de a à 10^{-3} près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|\, u_n - a \,\right| \ \leqslant \ 10^{-3}$$

- Or, d'après la question ***5.c)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\, u_n - a \,\right| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times \left|\, u_1 - u_0 \,\right| \ = \ \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\ \frac{1}{4^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{4^n} \ \leqslant\ 10^{-3}$.

  Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$\left|\, u_N - a \,\right| \ \leqslant\ \frac{2}{3}\,\frac{1}{4^N} \ \leqslant\ 10^{-3}$$

- Remarquons enfin :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\,\frac{1}{4^N} \leqslant 10^{-3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\,4^N \geqslant 10^3 && \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad 4^N \geqslant \frac{2}{3}\,10^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Dès que } N \text{ vérifie } 4^N \geqslant \dfrac{2000}{3},\ u_N \text{ est une valeur approchée de } a \text{ à moins de } 10^{-3} \text{ près.}}$$

□

g) En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 4^n \geqslant \frac{2000}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad n \ln(4) \geqslant \ln\left(\frac{2000}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{2000}{3}\right)}{\ln(4)} \end{aligned}$$

L'entier $N = \left\lceil \dfrac{\ln\left(\frac{2000}{3}\right)}{\ln(4)} \right\rceil$ convient.
On propose alors le programme suivant :

```
import numpy as np
x = np.log(2000 / 3) / np.log(4)
N = int(np.ceil(x))
print('Une valeur approchée à 10**(-3) près de a est :', suite(N))
```

□

Exercice 3

Partie I : Étude d'une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1}$.
On suppose : $u_0 > 0$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 0$.
  - ▸ **Initialisation** :
    D'après l'énoncé : $u_0 > 0$.
    D'où $\mathscr{P}(0)$.
  - ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} > 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$.
    - Comme $u_n > 0$, alors $u_n^2 > 0$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$).
    - Comme de plus $n+1 > 0$ alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1} > 0$.

    D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on en conclut : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Comme $u_n > 0$, alors la quantité $\ln(u_n)$ est bien définie.
  - De plus, $2^n \neq 0$.

  On en déduit que la quantité $v_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (v_n) \text{ est bien définie.}}$$

Commentaire

- La question de bonne définition d'une suite est un classique de l'étude des suites récurrentes. Elle se traite généralement par récurrence. Plus généralement, on démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathscr{P}(n) : \textbf{la quantité } v_n \text{ est bien définie}$$

  Cela permet de conclure que `TOUS` les termes de la suite (v_n) sont bien définis c'est-à-dire que la suite (v_n) est elle-même bien définie.
- Dans la rédaction la question, on a écrit :

$$\mathscr{P}(n) : u_n > 0 \quad \text{en lieu et place de} \quad \mathscr{P}(n) : \textbf{la quantité } v_n \text{ est bien définie}$$

  Cela a du sens car :
  × la suite (u_n) est bien définie (sa définition ne fait pas apparaître de problème d'existence). On peut donc étudier le signe de n'importe quel terme u_n de cette suite.
  × la quantité v_n est bien définie si et seulement si $u_n > 0$.

□

2. a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans la suite, on note : $\sigma = -\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration. On a :

× $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{\ln(n)}{2^n} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

× $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En effet :

$$\frac{\frac{\ln(n)}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln(n)}{2^n}\, n^2 = \frac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n}\ \frac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\dfrac{\ln(n)}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{n^2}{(\sqrt{2})^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

× La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ converge.

□

Commentaire

- Le théorème des croissances comparées stipule que pour tout $b > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big(\ln(n)\big)^b}{q^n} = 0$$

On dit alors que la croissance logarithmique est plus faible que la croissance exponentielle. Dans cette question, il s'agit de démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\, \ln(n)}{2^n} = 0$$

Le numérateur n'est ni polynomial, ni logarithmique. En toute rigueur, il faut donc un argument supplémentaire avant de pouvoir utiliser le théorème des croissances comparées.

- Il faut avoir en tête : $n^2 \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(n^3\big)$. La croissance au numérateur est donc « au mieux polynomiale ». Il est donc logique que la croissance exponentielle au dénominateur l'emporte.

- Rappelons au passage la condition `NÉCESSAIRE` de convergence des séries :

$$\sum w_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette condition n'est pas suffisante : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \cancel{\Rightarrow} \quad \sum w_n$ converge.

(on peut illustrer ce point par la suite (w_n) définie par : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \frac{1}{n}$)

S'il est nécessaire que le terme général de la série tende vers 0, il faut de plus s'assurer que cette convergence se fait suffisamment rapidement. C'est ce que l'on fait dans le cas des séries à termes positifs : on s'assure que le terme général w_n tend vers 0 au moins aussi vite que le terme général d'une série convergente (on utilise les théorèmes de comparaisons).

C'est l'argument ici : $\dfrac{\ln(n)}{2^n}$ tend plus rapidement vers 0 que $\dfrac{1}{n^2}$ qui est un exemple classique de terme général de série convergente.

b) (i) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
Puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_k - v_{k-1} &= \frac{\ln(u_k)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{{u_{k-1}}^2}{(k-1)+1}\right)}{2^k} - \frac{\ln(u_{k-1})}{2^{k-1}} && \textit{(par définition de la suite } (u_n)\textit{)} \\
&= \frac{\ln\left({u_{k-1}}^2\right) - \ln(k)}{2^k} - \frac{2\ \ln(u_{k-1})}{2^k} \\
&= \frac{\cancel{2\ \ln(u_{k-1})} - \ln(k) - \cancel{2\ \ln(u_{k-1})}}{2^k} && \textit{(car } u_{k-1} > 0\textit{)} \\
&= -\frac{\ln(k)}{2^k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ v_k - v_{k-1} = -\frac{\ln(k)}{2^k}}$$

- On a vu dans la question précédente que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est convergente.
  On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par -1 ($\neq 0$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum\limits_{k \geqslant 1} (v_k - v_{k-1}) \text{ est convergente.}}$$

□

(ii) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$. Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) \; = \; v_n - v_{1-1} \; = \; v_n - v_0$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1}) + v_0 \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\downarrow_{n \to +\infty} \qquad \downarrow_{n \to +\infty}$$

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \qquad v_0 \qquad \textit{(car on a montré en question } \textbf{\textit{2.a}} \textit{ que la série } \sum\limits_{k \geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k} \textit{ est convergente)}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est convergente, de limite } \ell = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 = \sigma + v_0.}$$

□

3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) Déterminer le signe de ℓ.
On pourra distinguer les cas $u_0 > e^{-\sigma}$ et $u_0 < e^{-\sigma}$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\ell \ = \ \sigma + v_0 \ = \ \sigma + \ln(u_0)$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \ell > 0 & \Leftrightarrow & \sigma + \ln(u_0) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(u_0) > -\sigma & \\ & \Leftrightarrow & u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma} & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si : } u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma} \text{ alors : } \ell > 0.}$$

- De même :

$$\ell < 0 \ \Leftrightarrow \ u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si : } u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma} \text{ alors : } \ell < 0.}$$

□

b) En déduire la limite de $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, puis étudier le comportement en $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition :

$$\ln(u_n) \ = \ 2^n \ v_n$$

Deux cas se présentent :

× si $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell > 0$.
De plus : $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par produit de limites, que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Enfin : $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

× si $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$: alors la suite (v_n) est convergente de limite $\ell < 0$.
De plus : $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par produit de limites, que la suite } \big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } -\infty.}$$

Enfin : $u_n = \exp\big(\ln(u_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

□

4. On suppose dans cette question : $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$.

a) (i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{\ln(k)}{2^k}$.

Démonstration.

- Comme on a supposé $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$, on a :

$$v_0 \;=\; \ln(u_0) \;=\; -\sigma \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

- Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question ***2.b)(ii)*** :

$$\begin{aligned} v_n &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + v_0 \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \end{aligned}$$

  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}.}$$

□

(ii) Retrouver dans ce cas la valeur de la limite ℓ de la suite (v_n).

Démonstration.

- En question ***2.a)***, on a démontré que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{2^n}$ est convergente.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

  et ainsi :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \;=\; 0 \end{aligned}$$

- Rappelons qu'on a démontré en question ***2.b)(ii)*** :

$$\ell \;=\; \sigma + v_0 \;=\; \sigma + \ln(u_0) \;=\; \sigma + \ln\left(\mathrm{e}^{-\sigma}\right) \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{On retrouve le résultat de la question } \textbf{\textit{2.b)(ii)}} \text{ : la suite } (v_n) \text{ est convergente de limite nulle.}}$$

□

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= 2^n\, v_n \\ &= 2^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &= 2^n \left(\frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{2} + 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \\ &\geqslant \frac{\ln(n+1)}{2} && \textit{(car } \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \geqslant 0 \textit{ en tant que somme de réels positifs)} \end{aligned}$$

- On en déduit, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$:

$$u_n \geqslant \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{2}\right)$$

Or : $\dfrac{\ln(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition : $\exp\left(\dfrac{\ln(n+1)}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

□

Partie II : Approximation de σ

5. a) Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \ln(x) \leqslant x - 1$.

Démonstration.
La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ se situe donc sous ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= g(1) + g'(1)\,(x-1) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}\,(x-1) \ = \ x - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \,]0, +\infty[,\ \ln(x) \leqslant x - 1.}$$

Commentaire

- Le membre droit de l'inégalité souhaitée est un polynôme de degré 1. Sa représentation graphique est une droite. C'est ce constat qui doit faire penser à une inégalité de convexité.
- Si on ne pense pas à utiliser une propriété de convexité, on peut aussi résoudre cette question en étudiant le signe de la fonction $x \mapsto \ln(x) - (x-1)$.

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^n}$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rrcl} & \ln(k) & \leqslant & k-1 \\ \text{donc} & \dfrac{\ln(k)}{2^k} & \leqslant & \dfrac{k-1}{2^k} \qquad \textit{(car } 2^k > 0\textit{)} \end{array}$$

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geqslant n+1$. En sommant les inégalités précédentes pour k variant de $n+1$ à m, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k-1}{2^k} \qquad (*)$$

- Considérons la partie de droite :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{m} (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ = & \sum_{k=1}^{m-n} (k+n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k && \textit{(par linéarité de la somme)} \end{aligned}$$

Or :

× la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée première de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

× la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \,]-1,1[$.
C'est donc une série convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(\frac{1}{2})^1 - (\frac{1}{2})^{m-n+1}}{1-\frac{1}{2}} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} (k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 4 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 2 + (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$

- On en déduit que le membre droit de l'inégalité $(*)$ admet une limite finie.
Par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+1}{2^n}}$$

□

6. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) &= \sigma + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} && \textit{(par définition de } \sigma\textit{)} \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) \\
&= -\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right) = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}
\end{aligned}$$

- On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| &= \left|-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}\right| \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} && \textit{(car } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} > 0 \textit{ en tant que somme d'une série à termes positifs)} \\
&\leqslant \frac{n+1}{2^n} && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}}$$

□

7. Écrire une fonction **Python** (que l'on nommera `approx`) qui, prenant en argument un réel ε strictement positif, renvoie une valeur approchée de σ à ε près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que $-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k}$ est une valeur approchée de σ à ε près.
Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

- Or, d'après la question ***6.***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{N+1}{2^N} \leqslant \varepsilon$.
En effet, par transitivité, on aura alors :

$$\left|\sigma - \left(-\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2^k}\right)\right| \leqslant \frac{N+1}{2^N} \leqslant \varepsilon$$

- On propose alors la fonction suivante :

```python
import numpy as np
def approx(eps) :
    k = 0
    S = 0
    while (k+1) / 2**k > eps :
      k = k + 1
      S = S + np.log(k) / 2**k
    sigma = -S
    return sigma
```

□