DS2

Problème : Intégrale de Gauss

Partie I – Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose $a_{k,n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \dbinom{2n}{k}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $I_m = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, dt$.

1. Montrer que la suite $\left(I_m \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $I_{m+2} = \dfrac{m+2}{m+3} \, I_m$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\,a_{n,n}}$ et $I_{2n-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}} \, a_{n,n}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$.

En déduire : $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1$.

5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis :

$$I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & si\ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dt$$

6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la 5 que la suite $\left(J_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, déterminer la limite la suite numérique $\left(u_n(t) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

9. `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Questions de cours

10. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $\mathrm{e}^{i\,\theta}$.

11. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\,\pi + t) = (-1)^n \ \sin(t)$.

12. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \ a_n$ converge.

b) Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant p} (-1)^n \ a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

c) Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d) Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

13. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

*****

14. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\,\phi'(x)\ \mathrm{e}^{i\,\phi(x)}$.

a) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = i \int_0^1 \mathrm{e}^{i\,x\,(1+t^2)}\,dt$$

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$:

$$F'(x) = \frac{i\,\mathrm{e}^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\,u^2}\,du$$

15. **Convergence d'intégrales**

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\,du$ convergent.

b) En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\,u}}{\sqrt{u}}\,du$ converge.

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\,u}}{\sqrt{u}}\,du$ converge.

d) Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{iv^2}\,dv$ converge.

On pourra effectuer un changement de variables.

16. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

b) On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n\, w_n$.
Prouver que α_n est un réel strictement positif.
On pourra effectuer sur w_n le changement de variables affine $t = u - n\,\pi$.

c) Prouver que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

d) Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.
On pourra utiliser les questions de cours.

e) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$.

17. Montrer que, pour tout réel x positif : $F(x) = \dfrac{\pi}{4} + i\left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\,u^2}\, du\right)^2$.

18. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.
*On pourra utiliser la question **15**.*

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty, -1]$.

19. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$.
Justifier que F_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

20. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

21. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k \mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

22. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)\, \mathrm{e}^t\, dt$$

23. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

24. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.

25. ***a)*** Calculer $L(e_0)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!], L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.

c) En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

26. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

27. `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Recherche des sous-espaces propres de L
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

a) Justifier que $\lambda \neq 0$.

b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0 \quad (*)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (*).

d) Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle (*).

e) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

Exercice 3

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \ \text{ et } \forall k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}$$

28. **Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

a) Soit $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k\, f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

b) Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$.

c) En déduire la dimension de E.

29. On note u l'application qui à toute fonction de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall x \in J,\ g(x) = (1+x)\, f'(x)$$

a) Déterminer, pour $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.

b) Vérifier que u est un endomorphisme de E.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

d) Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

e) Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

f) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

g) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
L'endomorphisme u^2 est il diagonalisable ?

30. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) : $f_{-1}(t) = (1+t)\, y'(t)$.