

---

## DS2

---

### Exercice

#### Notations

- Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul.
- Étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , on note  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $a \leq k \leq b$ .
- Pour deux suites de nombres réels  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  et  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , la notation  $u_m = O_{n \rightarrow +\infty}(v_m)$  signifie qu'il existe une suite bornée  $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geq m_0, u_m = M_m v_m$$

- On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

#### A - Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que  $n$  désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

##### A.1)

1. Montrer :

$$I_n \geq \frac{1}{2^n}$$

2. Justifier l'existence de  $K_n$  et donner la valeur exacte de  $K_1$ .

3. Montrer :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

On pourra minorer  $1+t^2$  par un polynôme de degré 1.

4. En déduire :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n$$

5. Établir la relation de récurrence  $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$ .
6. En déduire un équivalent simple de  $I_n$  en  $+\infty$ .

**A.2)**

7. Justifier :

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^n} du$$

8. UNIQUEMENT POUR LES 5/2

À l'aide du théorème de convergence dominée, démontrer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

9. En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \quad \text{puis de} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Dans toute la suite, on posera pour tout  $x$  réel :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

**B - Comportement asymptotique de  $1 - \Phi$**

Soit  $x > 0$ .

10. En écrivant que  $\varphi(t) \leq \frac{t}{x} \varphi(t)$  pour tout  $t \geq x$ , montrer :

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

11. Dans cette question, on considère la fonction  $H : x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - \frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x)$ .

a) Démontrer que la fonction  $H$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et déterminer sa dérivée.

b) En déduire :

$$\frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$$

12. En déduire un équivalent simple de  $1 - \Phi(x)$  en  $+\infty$ .

**Problème 1 - Hyperplans de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  stables par multiplication**

- Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2, et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille  $n$ .
- On note  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- On note  $E_{i,j}$  la matrice carrée de taille  $n$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position  $(i, j)$  qui vaut 1. On rappelle que la famille  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , dite canonique.
- Pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on appelle **trace** de  $A$ , et on note  $\text{tr}(A)$ , la somme des coefficients diagonaux de  $A$  :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

- On rappelle que pour toutes matrices  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la matrice produit  $AB$  est définie par  $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  où :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

- En particulier, on rappelle :

$$\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell} = \begin{cases} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} & \text{si } j \neq k \\ E_{i,\ell} & \text{si } j = k \end{cases}$$

- Enfin, on rappelle qu'une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ , c'est-à-dire une application linéaire définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## Partie I - Préliminaires

### 13. Propriétés de la trace.

- Vérifier que l'application  $\text{tr} : M \mapsto \text{tr}(M)$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- En déduire que plus généralement, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto \text{tr}(AM) \end{aligned}$$

est encore une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Cette notation  $\varphi_A$  sera conservée dans toute la suite du problème.**

- Montrer :  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

### 14. Représentation des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Justifier qu'il existe une unique matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi = \varphi_A$ , c'est-à-dire telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{tr}(AM)$$

*Indication* : on pourra faire intervenir les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## Partie II - Détermination des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stables par multiplication

Dans cette partie, on considère un hyperplan  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et on suppose que  $\mathcal{H}$  est **stable par multiplication**, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (H_1, H_2) \in \mathcal{H}^2, H_1 \times H_2 \in \mathcal{H} \quad (*)$$

### 15. Un exemple.

Montrer que l'ensemble  $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$  des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2 est un hyperplan de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , et qu'il est stable par multiplication.

### 16. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{H}$ contient la matrice identité $I_n$ .

On raisonne par l'absurde et on suppose donc que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que  $I_n \notin \mathcal{H}$ .

- Quelle est la dimension de  $\mathcal{H}$  ?
- Justifier alors :  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \text{Vect}(I_n)$ .
- En considérant la décomposition d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans la somme directe précédente, montrer que si  $M^2 \in \mathcal{H}$ , alors  $M \in \mathcal{H}$ .

- d) En déduire que  $\mathcal{H}$  contient toutes les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$  avec  $i \neq j$ .
- e) En déduire que  $\mathcal{H}$  contient toutes les matrices élémentaires  $E_{i,i}$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- f) Aboutir à une contradiction et conclure.

17. Justifier qu'il existe une matrice non nulle  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$ .  
Y a-t-il unicité d'une telle matrice  $A$  ?

**Dans toute la suite,  $A$  désigne une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\mathcal{H} = \text{Ker}(\varphi_A)$ .**

On note alors  $f : X \mapsto AX$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $A$ , et on considère un élément non nul  $Y_1$  dans  $\text{Im}(f)$ , que l'on complète en une base  $\mathcal{B} = (Y_1, \dots, Y_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On note enfin  $P$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à la base  $\mathcal{B}$ .

18. Soient  $B \in \mathcal{H}$ , et  $g : X \mapsto BX$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $B$ .

a) Montrer que  $\mathcal{H} \subset \text{Ker}(\varphi_{BA})$ . En déduire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $BA = \lambda A$ .

b) Justifier que la matrice  $B'$  de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  a pour première colonne  $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

c) Quelle relation relie les matrices  $B$ ,  $B'$ , et  $P$  ?

19. On considère désormais l'application suivante :

$$\begin{aligned} c : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto P^{-1}MP \end{aligned}$$

a) Montrer que  $c$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

b) Montrer que la restriction de  $c$  à  $\mathcal{H}$  est à valeurs dans un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de dimension  $n^2 - n + 1$ .

c) En déduire que  $n = 2$  et que  $\mathcal{H}$  est isomorphe, via l'application  $c$ , au sous-espace vectoriel  $\mathcal{T}_2^+(\mathbb{R})$  des matrices réelles triangulaires supérieures de taille 2.

## Problème 2 - indice de cyclicité d'un endomorphisme

- Dans tout le problème,  $E$  désigne un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
On note  $n$  sa dimension, et on suppose que  $n \geq 2$ .
- Pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$ , on note  $\det(f)$  son déterminant et  $\text{tr}(f)$  sa trace. En notant  $\text{id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ , on définit  $f^0 = \text{id}$  et, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $f^{k+1} = f \circ f^k$ .
- On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme de degré  $r \in \mathbb{N}$ , alors il existe  $(a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$  tel que :  
 $P(X) = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ . Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , on note alors  $P(f)$  l'endomorphisme de  $E$  définie par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^r a_k f^k = a_0 f^0 + a_1 f^1 + \dots + a_r f^r$$

Par exemple, si  $P(X) = 2 - X + 5X^2$  alors :  $P(f) = 2 \text{id}_E - f + 5f^2$ .

(attention, formellement :  $P(X) = 2 - X + 5X^2 = 2X^0 - X^1 + 5X^2$  et donc  $P(f) = 2f^0 - f^1 + 5f^2$ )

Étant donné un vecteur non nul  $u$  et un endomorphisme  $f$  de  $E$ , on définit un entier  $r(f, u)$  à partir des itérées du vecteur  $u$  par l'endomorphisme  $f$  (définition à suivre). Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme  $f$ , liées à la valeur de l'entier  $r(f, u)$ .

20. Soient  $u$  un vecteur non nul de  $E$ , et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

a) Montrer qu'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que la famille de vecteurs  $(u, f(u), \dots, f^k(u))$  soit liée.

Dans toute la suite du problème, on note  $r(f, u)$  le plus petit de ces entiers :

$$r(f, u) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid (u, f(u), \dots, f^k(u)) \text{ est liée}\}$$

b) Justifier l'encadrement :  $1 \leq r(f, u) \leq n$ .

21. Étude d'un exemple.

Dans cette question, on considère l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^4$  représenté dans la base canonique  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  par la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer  $g(e_1)$ ,  $g^2(e_1)$  et  $g^3(e_1)$ .

b) Montrer que la famille  $(e_1, g(e_1), g^2(e_1))$  est libre.

c) Déterminer trois réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $g^3(e_1) = \alpha \cdot g^2(e_1) + \beta \cdot g(e_1) + \gamma \cdot e_1$ . En déduire  $r(g, e_1)$ .

On reprend le cas général où  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n \geq 2$ , où  $f$  un endomorphisme de  $E$ , et où  $u$  un vecteur non nul de  $E$ .

22. Étude du cas où  $r(f, u) = 1$ .

a) Montrer que  $r(f, u) = 1$  si et seulement si la droite  $\text{Vect}(u)$  est stable par  $f$ .

b) On considère à nouveau l'exemple de l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^4$  défini en question 21.

(i) Montrer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\det(g - \lambda \text{id}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$ .

On pourra envisager les opérations élémentaires  $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$  puis  $L_4 \leftarrow L_4 + L_1 - L_3$ .

(ii) Déterminer les noyaux  $\text{Ker}(g - \text{id})$  et  $\text{Ker}(g - 2\text{id})$ .

(iii) En déduire tous les vecteurs non nuls  $v$  de  $\mathbb{R}^4$  tels que  $r(g, v) = 1$ .

23. On suppose dans cette question, et dans cette question seulement, que  $r(f, u) = n$ .

a) Montrer qu'alors la famille  $\mathcal{B}(u) = (u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$  est une base de  $E$ .

b) Déterminer la matrice  $M_{\mathcal{B}(u)}(f)$  de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $\mathcal{B}(u)$ , en fonction des coordonnées  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  de  $f^n(u)$  dans la base  $\mathcal{B}(u)$ .

c) Calculer  $\det(f)$  et  $\text{tr}(f)$  en fonction de  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ .

24. On note  $\mathcal{P}(f, u)$  l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que l'endomorphisme  $P(f)$  vérifie  $P(f)(u) = 0_E$ .

a) Montrer que  $\mathcal{P}(f, u)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  non réduit à  $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ , et vérifiant de plus la propriété suivante :  $\forall P \in \mathcal{P}(f, u), \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in \mathcal{P}(f, u)$ .

b) On désigne par  $B(f, u)$  un polynôme non nul de  $\mathcal{P}(f, u)$  et de degré minimal parmi les polynômes non nuls de  $\mathcal{P}(f, u)$ .

(i) Montrer que  $\mathcal{P}(f, u)$  est l'ensemble des multiples de  $B(f, u)$ .

On pourra considérer la division euclidienne d'un polynôme  $P$  de  $\mathcal{P}(f, u)$  par  $B(f, u)$ .

(ii) Montrer que le polynôme  $B(f, u)$  est de degré  $r(f, u)$ .

c) Déterminer l'ensemble  $\mathcal{P}(g, e_1)$ , dans le cas où  $g$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  défini en question 21, et où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

d) Déterminer l'ensemble  $\mathcal{P}(f, u)$  dans le cas où  $r(f, u) = n$ , en fonction des coordonnées  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  de  $f^n(u)$  dans la base  $\mathcal{B}(u)$ , comme définies en question 23.