DS2

Exercice 1

Notations et définitions

- On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0,1,2\}$.
- On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \big(|u_n|\big)$.
- On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

Étude de l'application σ

1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞.

- **2 pts : ℓ^∞ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.**
  - × **1 pt : $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell^\infty \neq \varnothing$ (car $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}} \in \ell^\infty$)**
  - × **1 pt : ℓ^∞ est stable par combinaison linéaire**
- **3 pts :**
  norme· **est une norme**
  - × **0 pt : à valeurs dans $\mathbb{R}_+$**
  - × **2 pts : homogénéité**
  - × **1 pt : séparation**
  - × **1 pt : inégalité triangulaire**

  0 pt si on raisonne directement à l'aide de sup **sans repasser par** $|\cdot|$

2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente. On note :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$$

- **2 pts : théorème de comparaison (par inégalité) des SATP**

3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire sur ℓ^∞.

- **2 pts : dont 1 pt pour l'argument de linéarité de la somme infini par convergence des 2 séries en présence**

4. Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $t_n \leqslant 2$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$

5. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau_n = 0 \qquad ; \qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau'_n = 2$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

- **1 pt :** $\sigma(\tau) = \dfrac{1}{3}$
- **1 pt :** $\sigma(\tau') = \dfrac{1}{3}$ **(calcul fait en question précédente)**
- **1 pt :** σ **n'est pas injective car** $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$ **et** $\tau \neq \tau'$

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0,1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n(x) = \lfloor 3^n\, x \rfloor - 3\ \lfloor 3^{n-1}\, x \rfloor$$

6. Démontrer que $t(x) \in T$.

- **1 pt : $\forall u \in \mathbb{R}$, $u - 1 < \lfloor u \rfloor \leqslant u$**
- **1 pt : inégalité précédente en $u = 3^n\, x$ et $v = 3^{n-1}\, x$**
- **1 pt : différence donne $-1 < \lfloor 3^n\, x \rfloor - 3\ \lfloor 3^{n-1}\, x \rfloor < 3$**
- **1 pt : $\forall n > 0$, $t_n(x)$ est un entier par différence d'entiers**

7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{3^n}$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} T & \to & [0,1] \\ u & \mapsto & \sigma(u) \end{array} \right.$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée développement ternaire propre de x.

- **3 pts : les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes**
  - × **1 pt : $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{3^n}\ \left(\lfloor 3^n\, x \rfloor - 3\ \lfloor 3^{n-1}\, x \rfloor\right)\ \geqslant\ 0$ car $t_n(x) \in \{0,1,2\}$**
  - × **1 pt : $y_{n+1} - y_n = \dfrac{1}{3^n}\ (t_n(x) - 2)\ \leqslant\ 0$**
  - × **1 pt : $x_n - y_n = \dfrac{1}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$**
- **2 pts : $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}$ (dont 1 pt pour le télescopage)**
- **1 pt : $x - \dfrac{1}{3^n} \leqslant \dfrac{\lfloor 3^n\, x \rfloor}{3^n} \leqslant x$ donc par théorème d'encadrement $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$**
- **2 pts : surjectivité de l'application**
  - × **1 pt : ce qui précède démontre que pour tout réel $x \in [0,1[$, il existe $(t_n(x))$ tel que $x = \sigma(t(x))$**
  - × **1 pt : le cas $x = 1$ est fourni par la suite constante égale à 2**

8. Écrire en langage **Python** une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel n et un flottant x et qui renvoie sous forme d'une liste les n premiers chiffres $t_1(x), \dots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x.

Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

- **3 pts :**

```
def flotVersTern(n, x) :
    L = [0] * n
    for i in range(n) :
        L[i] = np.floor((3**(i+1)) * x) - 3 * np.floor((3**i) * x)
    return L
```

Exercice 2

- Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1,+\infty[$.
- On note $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles.
  On note $\mathcal{E}_1 = \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs réelles.
- Dans tout le problème, a désigne un **réel strictement positif**.
- Pour tout f de $\mathcal{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - ay + f = 0 \qquad \left(E_a^f\right)$$

et on note $\mathscr{S}_a^f$ l'ensemble de ses solutions sur I.

Étude de l'équation $\left(E_a^f\right)$

1. Soient $f \in \mathcal{E}$ et $y \in \mathcal{E}_1$.
Montrer que y est solution de $\left(E_a^f\right)$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in I,\ y(x) = \mathrm{e}^{ax} \left(K - \int_1^x \mathrm{e}^{-at}\ f(t)\ dt\right)$$

- **2 pts : ($\Leftarrow$) calcul de $y' + a\,y + f$**
- **2 pts : ($\Rightarrow$)**
  - × **1 pt : $\big(y'(x) - a\,y(x)\big)\ \mathrm{e}^{-a\,x} - \mathrm{e}^{-a\,x}\ f(x) \ = \ 0$**
  - × **1 pt : la dérivée précédente étant nulle, sa primitive est constante (il existe donc K ...)**

2. Prouver que s'il existe une solution de $\left(E_a^f\right)$ qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.

- **1 pt : on procède par l'absurde en supposant qu'il existe deux solutions bornées y_1 et y_2**
- **1 pt : alors $(y_1 - y_2)' - a\ (y_1 - y_2) + 0 = 0$ et donc $y_1 - y_2$ est solution de (E_a^0)**
- **1 pt : d'après la question $y_1 - y_2 = K\ \mathrm{e}^{a\ \cdot}$. Impossible car la différence de deux bornées est bornée**

3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\ dt$ est convergente.

- **2 pts : théorème de comparaison (par inégalité) des intégrales généralisées de fonctions continues positives ($|\mathrm{e}^{-a\,t}\ f(t)| \leqslant M\ \mathrm{e}^{-a\,t}$)**

4. Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\ dt$ est l'unique solution de $\left(E_a^f\right)$ bornée sur I.

- **1 pt : c'est une solution (en prenant $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \ldots$)**
- **1 pt : elle est bornée car $\left|\displaystyle\int_x^B \ldots\right| \leqslant \displaystyle\int_x^B \mathrm{e}^{-at}\ |f(t)|\ dt \leqslant M \int_x^B \mathrm{e}^{-at}\ dt \leqslant \frac{M}{a}\ \mathrm{e}^{-ax}$**
- **1 pt : elle est unique d'après ce qui précède**

On définit ainsi une application U_a de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à toute fonction f de $\mathcal{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

Étude de quelques propriétés de U_a

5. Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.

- **1 pt :** $U_a(\mathbb{1})(x) = \mathrm{e}^{ax} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} = \mathrm{e}^{ax} \frac{1}{-a} \left(-\mathrm{e}^{-ax}\right) = \frac{1}{a}$

6. Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- **2 pts : U_a est à valeurs dans $\mathcal{E}$ ($U_a(f)$ continue et $U_a(f)$ bornée)**
- **1 pt : U_a est linéaire**

7. ***a)*** L'endomorphisme U_a est-il injectif ?

- **1 pt : pour tout** $f \in \mathcal{E}$ **:** $f \in \mathrm{Ker}(U_a) \Leftrightarrow \forall x \in I, \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\,t} f(t)\, dt = 0$
- **1 pt : en dérivant** $-\mathrm{e}^{-a\,x} f(x) = 0$ **donc** $f(x) = 0$
- **1 pt : ainsi** $\mathrm{Ker}(U_a) = \{0_{\mathcal{E}}\}$ **donc** U_a **injectif**

b) Montrer que pour tout f élément de $\mathcal{E}$, $U_a(f) \in \mathcal{E}_1$.

- **2 pts : intégrale fonction de ses bornes à détailler (de même si déjà fait en question *6*))**

c) L'endomorphisme U_a est-il surjectif ?

- **1 pt : on a démontré** $U_a\big(\mathcal{E}\big) \subset \mathcal{E}_1$
- **1 pt :** $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1 \neq \varnothing$**. Ainsi toute fonction continue mais pas** $\mathscr{C}^1$ **n'est jamais atteinte**
- **1 pt : exemple de fonction non atteinte comme** $x \mapsto \sqrt{x-1}$

8. **On suppose dans cette question et uniquement dans cette question que** $a = 1$.

a) Montrer que le sous-espace de $\mathcal{E}$: $F = \mathrm{Vect}\,(\sin, \cos)$ est stable par U_1. En donner une base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $\sin$ **et** $\cos$ **sont continues et bornées donc** $\mathrm{Vect}\,(\cos, \sin) \subset \mathcal{E}$
- **3 pts : calcul de** $U_1(\cos)$ **et** $U_1(\sin)$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\, dt + i \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(t)\, dt = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-1)\,t}\, dt$
  - × **1 pt :** $= \ldots = \dfrac{i+1}{2}\, \mathrm{e}^{-x} \big(\cos(x) + i\, \sin(x)\big)$
  - × **1 pt :** $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\, dt = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \big(\cos(x) - \sin(x)\big)$ **et** $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \sin(t)\, dt = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \big(\cos(x) + \sin(x)\big)$
- **1 pt :** $U_1(\cos) = \dfrac{1}{2} (\cos - \sin) \in F$ **et** $U_1(\sin) = \dfrac{1}{2} (\cos + \sin) \in F$
- **1 pt :** $(\sin, \cos)$ **est une base de** F **car famille génératrice et libre (OK pour « les deux fonctions ne sont pas colinéaires »)**

b) Écrire la matrice M de la restriction de U_1 à F dans cette base.

- **1 pt :** $U_1(\cos) = \dfrac{1}{2} (\cos - \sin)$ **et** $U_1(\sin) = \dfrac{1}{2} (\cos + \sin)$
- **1 pt : donc** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(U_1) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Une autre expression de $U_a(f)$

9. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathcal{E}$:

$$\forall x \in I,\ U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(x+t)\ dt$$

- **2 pts : changement de variable $u = t - x$ donne**

$$\mathbf{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \mathbf{e}^{-at}\ f(t)\ dt = \mathbf{e}^{ax} \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-a(u+x)}\ f(u+x)\ du$$

Une autre famille de fonctions

10. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathcal{E}$ définie par : $g_k(x) = \mathrm{e}^{-x}\ x^k$ et on note $G_k = U_a(g_k)$.

Pour tout entier naturel p, on note $F_p = \mathrm{Vect}\,(g_0, \ldots, g_p)$.

a) Donner une base $\mathscr{B}_p$ de F_p.

- **1 pt : la famille $\mathscr{B}_p = (g_0, \ldots, g_p)$ est génératrice de F**
- **2 pts : elle est aussi libre**
  - × **1 pt : rédaction**
  - × **1 pt : si $(*)$ est vérifié alors $\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k\ x^k\ \mathbf{e}^{-x} = 0$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k\ x^k = 0$**
    Un polynôme est nul seulement si tous ses coefficients le sont.

b) Vérifier que F_p est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ stable par U_a.

- **2 pts : pour vérifier que pour tout k, $g_k \in \mathcal{E}$ (essentiel au vu de la définition de U_a)**
  Par étude de fonction par exemple
- **3 pts : $\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)\ U_a(g_k) = \dfrac{1}{a}\ g_k + \dfrac{k}{a}\ U_a(g_{k-1})$**
  - × **1 pt : $g_k' = kg_{k-1} - g_k$ + intégration par parties**
  - × **2 pts : récurrence propre pour conclure**

c) Calculer le déterminant de l'endomorphisme induit par U_a sur F_p.

- **1 pt : d'après ce qui précède $U_a(g_k) = \dfrac{1}{1+a}\ g_k$ + élément de F_{k-1}**
- **1 pt : on en déduit que la matrice représentative de U_a dans $\mathscr{B}_p$ est de la forme :**

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+a} & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & \frac{1}{1+a} \end{pmatrix}$$

- **1 pt : on en déduit** $\det(U_a) = \det(M) = \dfrac{1}{(1+a)^p}$

Positivité de U_a

11. Prouver que l'on a : $\forall f \in \mathcal{E}$, $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

- **1 pt : question *9* + inégalité triangulaire**

12. Soit f dans $\mathcal{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

- **1 pt : oui par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

13. Soit f dans $\mathcal{E}$ décroissante. Prouver que : $a\, U_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

- **1 pt :** $U_a(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ f(x+t)\ dt \ \leqslant\ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ f(x)\ dt$ **car** f **décroissante**
- **1 pt : ainsi** $U_a(f)(x) \leqslant \dfrac{1}{a}\ f(x)$
- **1 pt : si** $x_1 \leqslant x_2$**, par croissance de l'intégrale et décroissance de** f**,** $U_a(f)(x_2) \leqslant U_a(f)(x_1)$

Commutation de U_a avec la dérivation

14. On note :

× $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et tels que f' est bornée sur I.

× D l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}$.

Soit $f \in \mathcal{H}$.

a) Montrer que l'on a : $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

- **1 pt :** $U_a(f')(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ f'(x+t)\ dt = \Big[\ \mathrm{e}^{-at}\ f(x+t)\ \Big]_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ f(x+t)\ dt$
- **1 pt : rédaction correcte (2 des objets convergent)**

b) En déduire que U_a et D commutent dans $\mathcal{H}$.

- **1 pt :** $U_a(f)$ **est, par définition, solution de** (E_a^f) **donc :** $U_a(f)' - a\, U_a(f) + f = 0$
- **1 pt : d'après ce qui précède :** $U_a(f') - a\, U_a(f) + f = 0$**. On en conclut :** $U_a(f') = U_a(f)'$

15. Soit $f \in \mathcal{E}$. Vérifier que pour tout entier naturel n, $U_a^{n+1}(f)$ est la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{ax} \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-at}\ f(t)\ dt$$

On pourra procéder par intégration par parties.

- **0 pt : par récurrence !**
- **1 pt : Initialisation**
- **3 pts : Hérédité (dont intégration par parties)**

Exercice 3

- Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.
- On note $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathscr{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Pour tout f de $\mathscr{E}$, on note $U(f) : \forall x \in \mathbb{R},\ U(f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(t)\ dt$.

1. Soit $f \in \mathscr{E}$, T-périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\ dt = \int_0^T f(t)\ dt$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^T f(t)\ dt = \int_0^a f(t)\ dt + \int_a^{a+T} f(t)\ dt + \int_{a+T}^T f(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^a f(t)\ dt = \int_T^{a+T} f(u-T)\ du$ **par changement de variable** $u = t + T$

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si f est T-périodique, il en est de même pour f'.

Montrer que la réciproque est fausse.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$
- **1 pt : en dérivant :** $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+T) = f'(x)$
- **1 pt : notons** $f : t \mapsto t$**. Alors** $f' : t \mapsto 1$ **est** T**-périodique mais** f **ne l'est pas**

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

- **2 pts : intégrale fonction de ses bornes**
- **1 pt :** $\big(U(f)\big)'(x) = f(x) - f(x-1)$

4. Montrer que l'application U qui à $f \in \mathscr{E}$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

- **1 pt : à valeurs dans** $\mathscr{E}$
- **1 pt : linéarité**

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.

a) Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n.

- **0 pt : linéarité déjà faite**
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $U(P_k)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} t^k\ dt = \frac{1}{k+1}\ \left(x^{k+1} - (x-1)^{k+1}\right)$
  - × **1 pt : comme** $(x-1)^{k+1} = x^{k+1} +$ **(polynôme de degré** k**) alors** $U(P_k)$ **est un polynôme de degré** k

b) Écrire la matrice de U_n dans la base $\mathscr{B}_n$.

- **2 pts :** $U(P_k)(x) = \dfrac{1}{k+1}\ \left(x^{k+1} - (x-1)^{k+1}\right) = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}\ (-1)^{k-j}\ x^j$

c) L'endomorphisme U_n est-il bijectif ?

- **1 pt :** U_n **bijectif si sa matrice représentative est inversible**
- **1 pt : la matrice représentative est inversible car triangulaire à coeff diagonaux tous non nuls**

6. Justifier que, si f, élément de $\mathscr{E}$, est dans $\text{Ker}(U)$, alors :

(i) $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0$.

(ii) f est périodique de période 1.

- **1 pt : si** $f \in \text{Ker}(U)$ **alors** $U(f) = 0_{\mathscr{E}}$ **et en particulier** $U(f)(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0$
- **2 pts :**
  - × **1 pt :** $U(f)(x) = F(x) - F(x-1) = 0$ **donc** $F(x-1) = F(x)$ **et** F **est** 1**-périodique**
  - × **1 pt : donc** $f = F'$ **est** 1**-périodique**

7. A-t-on : $\text{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathscr{E},\ \text{périodique de période 1 et telle que } \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = 0 \right\}$?

- **1 pt :** $\subset$ **par rapport à la question précédente**
- **2 pts :** $\supset$ **si** $f \in \{\dots\}$ **alors en utilisant** ***1*** **avec** $a = x-1$**, on obtient** $U(f)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{(x-1)+1} f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = 0$

8. Donner explicitement une fonction f non nulle, élément de $\text{Ker}(U)$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $[-1, 2]$.

- **2 pts : pour tout représentation graphique d'une fonction** 1**-périodique et d'intégrale nulle sur** $[0, 1]$

9. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

- **2 pts : non. Il s'agit de trouver une application continue mais pas de classe** $\mathscr{C}^1$

10. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \text{e}^{at}$.

a) Déterminer $F_a = U(f_a)$.

- **2 pts :** $U(f_a)(x) = \dfrac{1}{a}\ \mathbf{e}^{a\,(x-1)}\ \big(\mathbf{e}^a - 1\big)$

b) Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \dfrac{\text{e}^x - 1}{x}$.

- **3 pts : étude de la fonction**
  - × **1 pt :**$g'(x) = \dfrac{x\,\mathbf{e}^x - (\mathbf{e}^x - 1)}{x^2} = \dfrac{\mathbf{e}^x\ (x-1) + 1}{x^2}$
  - × **1 pt :** $\mathbf{e}^x\ (x-1) + 1 > 0 \ \Leftrightarrow\ -\mathbf{e}^{-x} < x + 1$
  - × **1 pt : étude de la fonction** $h : x \mapsto -\mathbf{e}^{-x}$ **(concave)**