DS2 - Barème / 143

Problème : Intégrale de Gauss / 35

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, 2n]\!]$, $a_{k,n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \dbinom{2n}{k}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $I_m = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, dt$.

1. Montrer que la suite $\left(I_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, dt$ **est faussement impropre**
- **2 pts :** $\left(I_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ **est décroissante**
  - × **1 pt :** $\forall t \in [0,1[, \ f_m(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \geqslant \left(1-t^2\right)^{\frac{m+1}{2}} = f_{m+1}(t)$
  - × **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant,** $I_m \geqslant I_{m+1}$

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $I_{m+2} = \dfrac{m+2}{m+3} \, I_m$.

- **1 pt :** $I_{m+2} = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right) \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} dt = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} dt - \int_0^1 t^2 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} dt$
- **1 pt :** $-\displaystyle\int_0^1 t^2 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} dt = \frac{1}{2}\left(\left[t \times \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} dt \right)$
- **1 pt :** $I_{m+2} = I_m + \dfrac{1}{m+2} \left((0-0) - I_{m+2} \right)$ **donc :** $I_m = \left(1 + \dfrac{1}{m+2}\right) I_{m+2} = \dfrac{m+3}{m+2} I_{m+2}$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\, a_{n,n}}$ et $I_{2n-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}} \, a_{n,n}$.

- **4 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\, a_{n,n}}$
  - × **1 pt :** $I_2 = \dfrac{2}{3}$ **et** $a_{1,1} = \dfrac{\sqrt{2\times 1}}{2^{2\times 1+1}} \dbinom{2}{1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^3} \times 2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2^2}$ **donc** $\dfrac{\sqrt{2\times 1}}{2\,(2\times 1+1)\, a_{1,1}} = \dfrac{2}{3}$
  - × **1 pt :** $I_{2n+2} = \dfrac{2n+2}{2n+3} \times I_{2n} = \dfrac{2n+2}{2n+3} \times \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\, a_{n,n}} = \dfrac{1}{2\,(2n+3)} \times \dfrac{n+1}{2n+1} \times 2^{2n+2} \times \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$
  - × **1 pt :** $a_{n+1,n+1} = \dfrac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+3}} \dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+2}} \dfrac{\cancel{(n+1)}\,(2n+1)}{\cancel{(n+1)}\,(n+1)} \dbinom{2n}{n}$
  - × **1 pt :** $\dfrac{\sqrt{2n+2}}{2\,(2n+3)\, a_{n+1,n+1}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{2n+2}}}{2\,(2n+3) \dfrac{\cancel{\sqrt{2n+2}}}{2^{2n+2}} \dfrac{2n+1}{n+1} \dbinom{2n}{n}} = \dfrac{1}{2\,(2n+3)} \times \dfrac{2^{n+2}\,(n+1)}{2n+1} \times \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$
- **3 pts :**
  - × **1 pt :** $I_1 = \displaystyle\int_0^1 1 \times \sqrt{1-t^2} \, dt = (0-0) + \int_0^1 \frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$
  - × **1 pt :** $= -\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = -I_1 + \left[\arcsin(t) \right]_0^1 = -I_1 + \frac{\pi}{2}$ **donc** $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$
  - × **1 pt :** $I_{2n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \, I_{2n-1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} \, \dfrac{\pi}{\cancel{\sqrt{2n}}} \, \dfrac{\cancel{\sqrt{2n}}}{2^{2n+1}} \dbinom{2n}{n}$ **et** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2n+2}} \times a_{n+1,n+1} = I_{2n+1}$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$.

En déduire : $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi\left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1$.

- **1 pt :** $I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \leqslant I_{2n-2}$ **car la suite** $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est décroissante**
- **1 pt : la fonction** f_{2n} **est continue, positive et non nulle sur** $[0,1]$ **donc** $\displaystyle\int_0^1 f_{2n}(t)\ dt > 0$
- **1 pt :** $I_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}\ I_{2n-2}$
- **1 pt :** $\dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}\ a_{n,n} \times \dfrac{2\,(2n+1)\,a_{n,n}}{\sqrt{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n}\ 2\pi\ \left(a_{n,n}\right)^2$ **et** $\times\dfrac{2n}{2n+1}$

5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n\geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis :

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

- **1 pt : par théorème d'encadrement, la suite** $\left(2\pi\ \left(a_{n,n}\right)^2\right)$ **cnverge vers** 1
- **1 pt :** $a_{n,n} = \sqrt{\left(a_{n,n}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \sqrt{2\pi\ \left(a_{n,n}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{1}$
- **1 pt :** $I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\,a_{n,n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2\times 2n \times \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}} = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $u_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n & \textit{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss : $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\ dt$.

6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la 5 que la suite $\left(J_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

- **1 pt :** $\boxed{u = \sqrt{n}\ t}$ **donne** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\int_0^1 \left(1-\frac{\cancel{n}\times u^2}{\cancel{n}}\right)^n du = \sqrt{n}I_{2n}$
- **1 pt :** $J_n = \sqrt{n}\ I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{\sqrt{n}}\ \dfrac{1}{2}\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{\cancel{\sqrt{n}}}$

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, déterminer la limite la suite numérique $\left(u_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **1 pt : si** $n \geqslant n_0 = \lfloor {t_0}^2 \rfloor + 1$, $u_n(t_0) = \left(1-\dfrac{{t_0}^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ \ln\left(1-\dfrac{{t_0}^2}{n}\right)\right)$
- **1 pt :** $n \times \ln\left(1-\dfrac{{t_0}^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n} \times \dfrac{{t_0}^2}{\cancel{n}}$
- **1 pt : par composition de limites :** $u_n(t_0) = \exp\left(n\ \ln\left(1-\dfrac{{t_0}^2}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-{t_0}^2\right)$

8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1+x \leqslant e^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}$$

- **1 pt :** exp **est convexe sur** $\mathbb{R}$ **donc sa courbe représentative est située au-dessus de sa tangente point d'abscisse** 0**,** $y = 1+x$
- **1 pt : Si** $t > \sqrt{n}$ **alors** $u_n(t) = 0$
- **1 pt : Si** $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$ **alors** $1 \geqslant 1 - \dfrac{t^2}{n} \geqslant 0$
- **1 pt :** $0 \leqslant 1 + \left(\dfrac{-t^2}{n}\right) \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}}$ **en appliquant le résultat démontré en** $x = \frac{-t^2}{n}$
- **0 pt : croissance de la fonction élévation à la puissance** n **sur** $[0,1]$

9. `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

- **1 pt :** $e^{-\frac{t^2}{2}} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(e^{-t}\right)$ **donc par théorème de négligeabilité** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ **CV**
- **1 pt :** $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ **est paire sur donc** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ **et** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ **sont de même nature**
- **1 pt :** $\boxed{u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}}$ **donne** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$
- **0 pt : donc** $K = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$
- **2 pts :**
  - × **1 pt : la suite de fonctions** (u_n) **CS sur** $[0,+\infty[$ **vers la fonction** $u : t \mapsto e^{-t^2}$ **d'après 7**
  - × **1 pt :** $\forall t \in [0,+\infty[$**,** $\left|u_n(t)\right| \leqslant e^{-t^2}$ **et** $t \mapsto e^{-t^2}$ **est intégrable sur** $[0,+\infty[$
  - × **0 pt : par TCD, la fonction** u **est intégrable sur** $[0,+\infty[$ **et**
  $$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt\right) = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} u_n(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} u(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{n}} u_n(t)\,dt + \cancel{\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} u_n(t)\,dt} = J_n$
- **0 pt : donc** $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\,\pi}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \left(\lim_{n\to+\infty} J_n\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$

Exercice 1 / 47

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Questions de cours

10. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $e^{i\,\theta}$.

- **1 pt :** $e^{i\,\theta}$ **est de module** 1 **et d'argument** θ

11. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\,\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

- **1 pt :** $\sin\left(n\,\pi + t\right) = \sin\left(n\,\pi\right) \times \cos(t) + \sin(t) \times \cos\left(n\,\pi\right)$
- **1 pt :** $\sin\left(n\,\pi\right) = 0$ **et** $\cos\left(n\,\pi\right) = (-1)^n$

ou (sur 2 pts) : $\sin(n\,\pi + t) = \mathrm{Im}\left(e^{i\,(n\,\pi+t)}\right) = \mathrm{Im}\left((-1)^n\, e^{i\,t}\right) = (-1)^n\ \mathrm{Im}\left(e^{i\,t}\right) = (-1)^n \sin(t)$

12. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n\, a_n$ converge.

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$
- **1 pt : CSSA cité correctement (3 hypothèses présentes)**

b) Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant p} (-1)^n\, a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

- **1 pt : la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n\, a_n$ **est convergente**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=p}^{n} (-1)^k\, a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\, a_k - \sum\limits_{k=0}^{p-1} (-1)^k\, a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, a_k - \sum\limits_{k=0}^{p-1} (-1)^k\, a_k$

c) Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

- **1 pt :** $T_p = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ a_n + \sum\limits_{n=0}^{p-1} (-1)^n\ a_n \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ a_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ a_n$

d) Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

- **1 pt :** T_p **est du signe de** $(-1)^p\, a_p$ **: positif si** p **pair et négatif si** p **impair**

13. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- **1 pt :** f **est continue sur** $\mathbb{R}$ **donc admet primitive** F **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : la fonction** $F \circ \sqrt{\cdot}$ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $G'(x) = \big(F \circ h\big)'(x) = F'\big(h(x)\big) \times h'(x) = f\big(\sqrt{x}\big) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

* * * * *

14. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt$.

On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\,\phi'(x)\ \mathrm{e}^{i\,\phi(x)}$.

a) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = i\ \int_0^1 \mathrm{e}^{i\,x\,(1+t^2)}\ dt$$

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^1 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$

  × **1 pt : pour tout** $t \in [0,1]$**, la fonction** $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x}$ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$

  × **1 pt :** $\underline{h}_t{}'(x) = \dfrac{1}{1+t^2} \times i\,(1+t^2)\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x} = i\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x}$

- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **0 pt :** $t \mapsto \underline{h}'_t(x)$ **est continue (par morceaux) sur** $[0, 1]$.
  - × **1 pt :** $t \mapsto \dfrac{e^{ix\,(1+t^2)}}{1+t^2}$ **est intégrable sur** $[0, 1]$ **car continue sur le** `SEGMENT` $[0, 1]$
  - × **1 pt :** $\left| \underline{h}'_t(x) \right| = \left| i\ e^{i\,(1+t^2)\,x} \right| = |i| \times \left| e^{i\,(1+t^2)\,x} \right| = 1 \ \leqslant \ 1$
    et la fonction $\varphi : t \mapsto 1$ **est intégrable sur** $[0, 1]$

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$: $F'(x) = \dfrac{i\,e^{ix}}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{i\,u^2}\ du.$

- **1 pt :** $F'(x) \ = \ i\ e^{ix} \displaystyle\int_0^1 \ e^{i\left(\sqrt{x}\,t\right)^2}\ dt$
- **1 pt : changement de variable** $\boxed{u = \sqrt{x}\,t}$ **:** $\displaystyle\int_0^1 \ e^{i\left(\sqrt{x}\,t\right)^2}\ dt \ = \ \int_0^1 \ e^{i\,u^2}\ \frac{1}{\sqrt{x}}\ du$

15. **Convergence d'intégrales**

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\ du$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\ du$ convergent.

- **2 pts : convergence de l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\ du$
  - × **soit car elle est faussement impropre**
  - × **soit par théorème de comparaison des intégrales généralisées**
- **2 pts : convergence de l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\ du$

b) En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{i\,u}}{\sqrt{u}}\ du$ converge.

- **1 pt : sous réserve de CV :** $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} e^{i\,u}\ \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = \left[\ \frac{e^{i\,u}}{i} \frac{1}{\sqrt{u}}\ \right]_{\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{i\,u}}{i}\ \left(-\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}}\right)\ du$
- **1 pt :** $\left| \dfrac{e^{i\,u}}{i}\ \dfrac{1}{\sqrt{u}} \right| \ = \ \dfrac{\left| e^{i\,u} \right|}{|i|}\ \dfrac{1}{\sqrt{u}} \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{u}} \ \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow}$ **0 et le crochet est convergent**
- **1 pt :** $\left| \dfrac{e^{i\,u}}{u^{\frac{3}{2}}} \right| \ = \ \dfrac{\left| e^{i\,u} \right|}{u^{\frac{3}{2}}} \ = \ \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ **et** $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\ du$ **CV par critère de Riemann**

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{i\,u}}{\sqrt{u}}\ du$ converge.

- **1 pt : les intégrales** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\ du$ **et** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\ du$ **CV donc** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{i\,u}}{\sqrt{u}}\ du$ **CV**
- **1 pt : les intégrales** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{i\,u}}{\sqrt{u}}\ du$ **et** $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{i\,u}}{\sqrt{u}}\ du$ **sont convergentes donc l'intégrale doublement impropre** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{i\,u}}{\sqrt{u}}\ du$ **est convergente**

d) Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\ dv$ converge.

On pourra effectuer un changement de variables.

- **1 pt : sous réserve de convergence :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\ dv \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\,u}}{2\sqrt{u}}\ du$

16. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$ **CV déjà démontré**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$ **CV car** $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ **est continue sur le** `SEGMENT` $[n\,\pi, (n+1)\,\pi]$

b) On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n w_n$.
Prouver que α_n est un réel strictement positif.
On pourra effectuer sur w_n le changement de variables affine $t = u - n\,\pi$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_{n\,\pi}^{(n+1)\,\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du = \int_0^{\pi} \frac{\sin\big(t + n\,\pi\big)}{\sqrt{t + n\,\pi}}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{(-1)^n\ \sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}}\, dt$
- **1 pt :** $\forall t \in\ ]0, \pi]$, $\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}} \geqslant 0$ **donc** $\alpha_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}} \geqslant 0$

c) Prouver que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

- **1 pt :** $\dfrac{\sin(t)}{t + (n+1)\,\pi} \leqslant \dfrac{\sin(t)}{t + n\,\pi}$ **argumenté**
- **1 pt : donc** $\alpha_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t + (n+1)\,\pi}\, dt \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t + n\,\pi}\, dt = \alpha_n$ **par croissance . . .**

d) Prouver que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.
On pourra utiliser les questions de cours.

- **1 pt : CSSA (série alternée / suite décroissante / suite convergente de limite nulle)**
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{\sin(t)}{t + n\,\pi} \leqslant \dfrac{1}{n\,\pi}$ **donc** $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t + n\,\pi}\, dt \leqslant \frac{1}{n}$
- **1 pt : la somme de cette série est du signe de son premier terme** $(-1)^0\ \alpha_0 = \alpha_0 \geqslant 0$

e) Démontrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{(u)}}\, du$.

- **1 pt :** $\sum\limits_{n=0}^{N} w_n = \displaystyle\int_0^{(N+1)\,\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\,u}}{\sqrt{u}}\, du$ **CV donc** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$ **CV et** $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} w_n\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$

17. Montrer que, pour tout réel x positif : $F(x) = \dfrac{\pi}{4} + i \left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\,u^2}\, du\right)^2$.

- **1 pt :** $f : t \mapsto \mathrm{e}^{i\,t^2}$ **continue sur** $\mathbb{R}$, $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\, dt$ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt :** $R'(x) = i\ 2\ G'(x) \times \big(G(x)\big) = F'(x)$
- **1 pt :** $R - F$ **étant de dérivée nulle sur** $]0, +\infty[$**, elle est constante sur cet intervalle**
- **1 pt :** $c = R(0) - F(0) = \left(\dfrac{\pi}{4} + i \cancel{\left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{0}} \mathrm{e}^{i\,u^2}\, du\right)^2}\right) - \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^0}{1 + t^2}\, dt = \cancel{\frac{\pi}{4}} - \left(\cancel{\frac{\pi}{4}} - 0\right)$

18. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$. En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\ dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{i\,u^2}\ du$ **CV donc** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \mathbf{e}^{i\,u^2}\ du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{i\,u^2}\ du$
- **1 pt :** $\displaystyle 0 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{4} + i \left(\int_0^{\sqrt{x}} \mathbf{e}^{i\,u^2}\ du \right)^2 \right) = \frac{\pi}{4} + i \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{i\,u^2}\ du \right)^2$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{i\,u^2}\ du = \pm \sqrt{\frac{\pi}{4}}\ \mathbf{e}^{i\,\frac{\pi}{4}} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\ \left(1+i\right)$
- **1 pt : comme** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{i\,v^2}\ dv = \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{i\,u}}{2\sqrt{u}}\ du$**,** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(v^2\right)\ dv = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\ du \geqslant 0$

Exercice 2 /31

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty, -1]$.

19. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.

Justifier que F_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ **est** `LA` **primitive de** f **qui s'annule en** a

20. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^x f(t)\ dt$
- **1 pt : licite car** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ **ACV puisque** f **est intégrable sur** $]-\infty, -1]$
  et $\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\ dt$ **est bien définie car** f **continue sur le** `SEGMENT` $[-1, x]$
- **1 pt :** F **est, à une constante près,** `LA` **primitive de la fonction** f **qui s'annule en** -1

21. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k \mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

- **1 pt : les intégrales** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} t^k\ \mathbf{e}^t\ dt$ **et** $\displaystyle\int_1^{+\infty} u^k\ \mathbf{e}^{-u}\ du$ **sont de même nature**
- **2 pts :** $\left|\ u^k\ \mathbf{e}^{-u}\ \right| \ = \underset{u\to+\infty}{o}\left(e e^{-\frac{1}{2}\,u} \right)$ **et théorème de négligeabilité**

22. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)\ \mathrm{e}^t\ dt$$

- **1 pt :** $\displaystyle\Big(L(f)\Big)(x) = \mathbf{e}^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)\ \mathbf{e}^t\ dt$ **définie pour tout** x **puisque** $f(t)\ \mathbf{e}^t = \underset{t\to-\infty}{O}\Big(t^n\ \mathbf{e}^t\Big)$
- **2 pts :** $\displaystyle\left(L\left(\boxed{\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2} \right) \right)(x) = \lambda_1\ \mathbf{e}^{-x} \int_{-\infty}^x f_1(t)\ \mathbf{e}^t\ dt + \lambda_2\ \mathbf{e}^{-x} \int_{-\infty}^x f_2(t)\ \mathbf{e}^t\ dt$
  $= \Big(\lambda_1\ L(f_1) + \lambda_2\ L(f_2)\Big)(x)$ **(2**$^{\text{\bf ème}}$ **point accordé en fonction de la qualité de la rédaction)**

23. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

- **1 pt : g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit $g = h \times F$**
- **1 pt :** $g'(x) = h'(x) \times F(x) \ + \ h(x) \times F'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{e}^t\ dt + \cancel{\mathrm{e}^{-x}}\ \big(f(x)\ \cancel{\mathrm{e}^{x}}\big)$

24. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.

- **1 pt :** $\mathrm{Ker}(L)\ \supset\ \{0_{E_n}\}$
- **2 pts :** $\mathrm{Ker}(L) \subset \{0_{E_n}\}$ **car si** $f \in \mathrm{Ker}(L)$**,** $L(f) = 0_{E_n}$ **donc** $f = \big(L(f)\big)'\ +\ L(f) = 0_{E_n}$

25. *a)* Calculer $L\,(e_0)$.

- **1 pt :** $\big(L(e_0)\big)(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e_0(t)\ \mathrm{e}^t\ dt = 1$
- **1 pt : donc** $L(e_0) = e_0$

b) Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!], L\,(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L\,(e_k)$.

- **1 pt :** $\big(L(e_{k+1})\big)(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\ \mathrm{e}^t\ dt = \mathrm{e}^{-x}\left(\Big[\ t^{k+1}\ \mathrm{e}^t\ \Big]_{-\infty}^{x}\ -\ \int_{-\infty}^{x} (k+1)\ t^k\ \mathrm{e}^t\ dt\right)$
- **1 pt :** $= \mathrm{e}^{-x}\left(x^{k+1}\mathrm{e}^x - \left(\cancel{\lim_{t\to-\infty} t^{k+1}\mathrm{e}^t}\right)\right) - (k+1)\ \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e_k(t)\mathrm{e}^t\ dt = \Big(e_{k+1} - (k+1)\ L(e_k)\Big)(x)$

c) En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

- **0 pt : démontrons par récurrence** $\forall k \in [\![0, n]\!]$**,** $\mathscr{P}(k)$ **où** $\mathscr{P}(k)$ **:** $L(e_k) \in E_n$
- **1 pt :** $L(e_0) = e_0 \in \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, \ldots, e_n) = E_n$
- **1 pt :** $L(e_{k+1})\ =\ e_{k+1} - (k+1)\,L(e_k)$ **et par hypothèse de récurrence :** $L(e_k) \in E_n$
- **1 pt : rédaction correcte (récurrence non lue si récurrence mal écrite)**

26. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

- **1 pt :** L **est injective puisque** $\mathrm{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}$
- **1 pt :** E_n **est un espace vectoriel de dimension finie, et** L **est un endomorphisme de** E_n **donc injectivité équivaut à bijectivité**

27. `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Recherche des sous-espaces propres de L
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

a) Justifier que $\lambda \neq 0$.

- **2 pt : par l'absurde, on suppose** $\lambda = 0$**. Alors :** $L(f) = 0 \cdot f = 0_{E_n}$**.**
  Ainsi $f \in \mathrm{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}$ **mais comme** f **est un vecteur propre,** $f \neq 0_{E_n}$**.**

b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0 \quad (*)$.

- **1 pt : on reporte** $L(f) = \lambda \cdot f$ **dans** $\big(L(f)\big)' + L(f) = f$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (*).

- **1 pt : l'ensemble des solutions de cette équation est** $\{x \mapsto K\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\,x}\ |\ K \in \mathbb{R}\}$

d) Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle (*).

- **1 pt : si** $\lambda = 1$**, alors pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,** $\mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ x} = \mathrm{e}^0 = 1$ **et les fonctions solutions de** $(*)$ **sont les fonctions constantes**
- **1 pt : si** $\lambda \neq 1$ **la fonction** $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ x}$ **n'est pas polynomiale et la seule solution polynomiale est la fonction nulle**

e) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés. L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

- **1 pt :** $L(e_0) = 1 \cdot e_0$ **donc** 1 **est val p de** L **et** e_0 **vecteur propre donc** $\mathrm{Vect}\,(e_0) \subset E_1(L)$
- **1 pt :** $f \in E_n$ **est polynomiale et solution de** $(*)$ **donc** f **constante et** $\mathrm{Vect}\,(e_0) \supset E_1(L)$
- **1 pt :** 1 **est l'unique valeur propre de** L **car si** $\lambda \neq 1$ **est valeur propre alors tout** f **vecteur propre associé est une fonction polynomiale solution de** $(*)$ **donc nulle**
- **1 pt :** $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(L)} \dim\left(E_\lambda(L)\right) \dim\left(\mathrm{Vect}\,(e_0)\right) = 1 \neq n+1 = \dim\left(E_n\right)$ **donc** L **non diagonalisable**

Exercice 3 / 30

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J = \left]-1, +\infty\right[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}$$

28. **Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

a) Soit $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k\, f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

- **1 pt : écriture correcte de l'hypothèse :** $\forall x \in J,\ \sum\limits_{k=-1}^{p} a_k\, f_k(x) \ = \ 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ \ldots = a_{-1} = 0$

b) Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B})$.

- **1 pt : écriture correcte de l'hypothèse :** $\forall x \in J,\ \sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, f_k(x) \ = \ 0$
- **1 pt :** $a_0 = 0$ **par calcul de limite par exemple**
- **1 pt : « en procédant de manière itérative » ou énoncé d'une autre méthode convaincante**

c) En déduire la dimension de E.

- **0 pt : si pas de démonstration que la famille** $\mathscr{B}$ **est une base**
- **2 pts : libre + génératrice donc** $\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = p + 2$ **(1 pt si confusion** dim **et** Card**)**

29. On note u l'application qui à toute fonction de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall x \in J,\ g(x) = (1+x)\, f'(x)$$

a) Déterminer, pour $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.

- **1 pt :** $u(f_{-1}) = f_0$
- **1 pt :** $u(f_0) = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $\forall k \in [\![1, p]\!]$**,** $u(f_k) = (-k) \cdot f_k$

b) Vérifier que u est un endomorphisme de E.

- **1 pt : u est linéaire**
- **1 pt : u à valeurs dans E (en démontrant $\forall k \in [\![-1,p]\!],\ u(f_k) \in E$)**

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

- **1 pt :** $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(u(f_{-1}), u(f_0), u(f_1), \ldots, u(f_p)\right) = \mathrm{Vect}\left(f_0, \cancel{0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}}, -f_1, \ldots, (-p)\cdot f_p\right) = \mathrm{Vect}\left(f_0, -f_1, \ldots, (-p)\cdot f_p\right)$
- **1 pt :** $= \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, \ldots, f_p\right)$
- **1 pt : théorème du rang** $\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(u)\big)$
- **1 pt :** $\mathrm{rg}(u) = p+1$ **car** $(f_0, f_1, \ldots, f_p)$ **est une base de** $\mathrm{Im}(u)$
- **1 pt :** $u(f_0) = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$ **donc** $f_0 \in \mathrm{Ker}(u)$ **et** $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left(f_0\right)$

d) Préciser $u^{-1}\left(\{f_{-1}\}\right)$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

- **1 pt :** $h \in u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big) \Leftrightarrow u(h) \in \{f_{-1}\} \Leftrightarrow u(h) = f_{-1}$
- **1 pt : Supposons :** $u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big) \neq \varnothing$ **(par l'absurde) alors** $u(h_0) = f_{-1}$**. Ainsi :** $f_{-1} = u(h_0)$ **et** $f_{-1} \in \mathrm{Im}(u)$
- **1 pt :** f_{-1} **est combinaison linéaire de** f_0**,** f_1**, …,** f_p **donc la famille** $(f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_p)$ **est liée. Absurde !**

e) Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

- **2 pts :** $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & -k & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & -(p-1) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$

f) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

- **1 pt :** M **est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux donc** $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right) = \{0, -1, -2, \ldots, -p\}$
- **1 pt :** $\chi_u(X) = X^2\ \big(X+1\big)\ \big(X+2\big)\ \ldots\ \big(X+(p-1)\big)\ \big(X+p\big)$
- **1 pt :** $1 \leqslant \dim\big(E_{-k}(u)\big) \leqslant m_{-k}(u) = 1$ **donc** $\forall k \in [\![1,p]\!]$**,** $\dim\big(E_{-k}(u)\big) = 1$
- **1 pt :** $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim\big(E_0(u)\big) + \sum\limits_{k=1}^{p} \dim\big(E_{-k}(u)\big) = p+1$ **car** $\dim\big(\mathrm{Ker}\, u\big) = 1$

g) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
L'endomorphisme u^2 est il diagonalisable ?

- **2 pts :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u^2\big)$ **étant diagonale, elle est, en particulier, diagonalisable. Il en est donc de même de** u^2

30. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) : $f_{-1}\left(t\right) = \left(1+t\right) y'\left(t\right)$.

- **1 pt :** $t \mapsto \dfrac{1}{2}\big(\ln(1+t)\big)^2 + C$ **est une primitive de l'application** $t \mapsto \dfrac{\ln\left(1+t\right)}{1+t}$
- **1 pt : rigueur de l'écriture**