DS2

Problème : Intégrale de Gauss

Partie I – Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, on pose $a_{k,n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \dbinom{2n}{k}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $I_m = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, dt$.

1. Montrer que la suite $\left(I_m \right)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N}$.

- La fonction $f_m : t \mapsto \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} = \exp\left(\dfrac{m}{2} \ln\left(1-t^2\right)\right)$ est continue sur l'intervalle $[0, 1[$.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, dt$ est donc impropre seulement en 1.
  Or, comme : $\displaystyle\lim_{t\to 1} \exp\left(\dfrac{m}{2} \ln\left(1-t^2\right)\right) = \lim_{u\to -\infty} \exp(u) = 0$, la fonction f_m est prolongeable par continuité en posant $f_m(1) = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \, dt$ est donc faussement impropre.

Commentaire

- Il faut faire attention à l'intégrande. Il fait apparaître une élévation à une puissance non entière qui est généralement définie par la forme exponentielle logarithme. Cela peut poser un problème de définition dans le cas où la fonction ln est évaluée en 0 comme c'est le cas dans la question.
- L'énoncé aurait pu opter pour une présentation légèrement différente. Plus précisément, on pourrait définir la fonction f comme suit :

$$\forall t \in [0,1], \ f_m(t) = \left(\sqrt{1-t^2} \right)^m$$

  Cette fonction f_m est continue sur le `SEGMENT` $[0, 1]$ et l'intégrale I_m est donc bien définie. Il est à noter qu'elle coïncide avec la définition donnée dans le point précédent sur l'intervalle $[0, 1[$.
- Enfin, on peut aussi se rendre compte que la fonction f_m est une fonction polynomiale dès que l'entier m est pair. Dès lors, la fonction f_m est continue sur le `SEGMENT` $[0, 1]$ et l'intégrale I_m est donc bien définie.

- Soit $t \in [0, 1[$.

	$\frac{m}{2}$	$\leqslant$	$\frac{m}{2} + \frac{1}{2}$	
donc	$\frac{m}{2} \ln\left(1-t^2\right)$	$\geqslant$	$\frac{m+1}{2} \ln\left(1-t^2\right)$	*(comme $t \in [0,1[$, $1-t^2 \in \,]0,1]$ et donc $\ln\left(1-t^2\right) \leqslant 0$)*
donc	$\exp\left(\frac{m}{2} \ln\left(1-t^2\right)\right)$	$\geqslant$	$\exp\left(\frac{m+1}{2} \ln\left(1-t^2\right)\right)$	*(par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$)*

$$\boxed{\forall t \in [0,1[, \ f_m(t) = \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \ \geqslant \ \left(1-t^2\right)^{\frac{m+1}{2}} = f_{m+1}(t)}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$I_m \;=\; \int_0^1 \; f_m(t)\; dt \;\geqslant\; \int_0^1 \; f_{m+1}(t)\; dt \;=\; I_{m+1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } \left(I_m\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ est bien décroissante.}}$$

□

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$: $I_{m+2} = \dfrac{m+2}{m+3}\; I_m$.

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
I_{m+2} &= \int_0^1 \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m+2}{2}} \; dt \\
&= \int_0^1 \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \; dt \\
&= \int_0^1 \; \left(1-t^2\right) \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \; dt \\
&= \int_0^1 \; \left(\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} - t^2 \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \right) \; dt \\
&= \int_0^1 \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \; dt \;-\; \int_0^1 \; t^2 \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \; dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= I_m \;+\; \frac{1}{2} \int_0^1 \; t \times \left((-2t) \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}} \right) \; dt \\
&= I_m \;+\; \frac{1}{2} \left(\left[\, t \times \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} \, \right]_0^1 \;-\; \int_0^1 \; \frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1} \; dt \right) \\
&= I_m \;+\; \frac{1}{\cancel{2}} \; \frac{\cancel{2}}{m+2} \left(\left[\, t \times \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \, \right]_0^1 \;-\; \int_0^1 \; \left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}+1} \; dt \right) \\
&= I_m \;+\; \frac{1}{m+2} \; \left(\, (0-0) \;-\; I_{m+2} \, \right)
\end{aligned}$$

- On en déduit, en réordonnant :

$$I_m \;=\; I_{m+2} + \frac{1}{m+2}\; I_{m+2} \;=\; \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) \; I_{m+2} \;=\; \frac{m+3}{m+2} \; I_{m+2}$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N},\; I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} \; I_m}$$

□

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\,a_{n,n}}$ et $I_{2n-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}\ a_{n,n}$.

Démonstration.

- Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n)$: $I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\,a_{n,n}}$.
  - **Initialisation** :
    - × D'une part :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{2}{2}}\ dt \\ &= \int_0^1 \left(1-t^2\right)\ dt \\ &= \int_0^1 1\ dt\ -\int_0^1 t^2\ dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= 1 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3}\,(1^3-0) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

    - × D'autre part :

$$a_{1,1} = \frac{\sqrt{2\times 1}}{2^{2\times1+1}}\binom{2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2^3}\times 2 = \frac{\sqrt{2}}{2^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{2\times 1}}{2\ (2\times1+1)\ a_{1,1}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{6\ \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2^2}} = \frac{2^2}{6} = \frac{2\times \cancel{2}}{3\times \cancel{2}}$$

    D'où $\mathscr{P}(1)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

    Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ $\left(\text{c'est-à-dire } I_{2n+2} = \dfrac{\sqrt{2n+2}}{2\,(2n+3)\,a_{n+1,n+1}}\right)$.
    - × Tout d'abord :

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &= \frac{2n+2}{2n+3}\times I_{2n} && \textit{(en utilisant le résultat de la question précédente en } m=2n\textit{)} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\,a_{n,n}} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{2\,(2n+3)}\times\frac{(2n+2)\ \cancel{\sqrt{2n}}}{(2n+1)\ \frac{\cancel{\sqrt{2n}}}{2^{2n+1}}\ \binom{2n}{n}} \\ &= \frac{1}{2\,(2n+3)}\times\frac{2n+2}{2n+1}\times 2^{2n+1}\times\frac{1}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{1}{2\,(2n+3)}\times\frac{n+1}{2n+1}\times 2^{2n+2}\times\frac{1}{\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

× Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
a_{n+1,n+1} &= \frac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+3}} \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+3}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\ \big((2n+2)-(n+1)\big)!} \\
&= \frac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+3}} \frac{(2n+2)\ (2n+1)\ (2n)!}{(n+1)\ n! \times (n+1)\ n!} \\
&= \frac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+3}} \frac{2\,(n+1)\ (2n+1)}{(n+1)\ (n+1)} \frac{(2n)!}{n! \times n!} \\
&= \frac{\sqrt{2n+2}}{2^{2n+2}} \frac{\cancel{(n+1)}\ (2n+1)}{\cancel{(n+1)}\ (n+1)} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

× On en conclut :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2n+2}}{2\,(2n+3)\,a_{n+1,n+1}} &= \frac{\cancel{\sqrt{2n+2}}}{2\ (2n+3)\ \frac{\cancel{\sqrt{2n+2}}}{2^{2n+2}}\ \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n}} \\
&= \frac{1}{2\,(2n+3)} \times \frac{2^{n+2}\ (n+1)}{2n+1} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}} \\
&= \frac{1}{2\,(2n+3)} \times \frac{2^{n+2}\ (n+1)}{2n+1} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}} \\
&= I_{2n+2}
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\,a_{n,n}}$.

Commentaire

- C'est généralement une bonne idée de repérer les questions qui se traitent par récurrence. Deux raisons à cela : le résultat à démontrer est stipulé dans l'énoncé et le mécanisme de démonstration est simple.
- Cela ne signifie pas que toutes les récurrences sont faciles à mener. Cette première récurrence donne lieu à un développement calculatoire plutôt long pour obtenir le résultat et il faut avoir un peu de courage pour la mener jusqu'au bout. Ne pas réussir à la terminer n'est pas grave pour autant. Le résultat est donné dans l'énoncé et il est donc possible de l'utiliser pour les questions qui suivent.

- Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$ où $\mathscr{P}(n) : I_{2n-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}\, a_{n,n}$.

  - **Initialisation** :

    × D'une part :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt \\
&= \int_0^1 1 \times \sqrt{1-t^2}\, dt \\
&= \Big[\, t\, \sqrt{1-t^2}\, \Big]_0^1 - \int_0^1 t \times \frac{-2\,t}{2\,\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&= (0-0) - \int_0^1 \frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&= -\int_0^1 \frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&= -\int_0^1 \left(\frac{(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt \\
&= -\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \\
&= -I_1 + [\ \arcsin(t)\ ]_0^1 \\
&= -I_1 + \big(\arcsin(1) - \arcsin(0)\big) \\
&= -I_1 + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)
\end{aligned}$$

    En réordonnant : $2\,I_1 = \dfrac{\pi}{2}$ donc $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

    × D'autre part :

$$a_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{\sqrt{2\times 1}}\, a_{1,1} = \frac{\pi}{\cancel{\sqrt{2\times 1}}}\, \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2^2}$$

    D'où $\mathscr{P}(1)$.

  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Supposons $\mathscr{P}(n)$ et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$ $\left(\text{c'est-à-dire } I_{2n+1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n+2}}\, a_{n+1,n+1}\right)$.

    × Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2}\, I_{2n-1} && \textit{(en utilisant le résultat de la question précédente en } m = 2n-1\textit{)} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}\, \frac{\pi}{\sqrt{2n}}\, a_{n,n} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}\, \frac{\pi}{\cancel{\sqrt{2n}}}\, \frac{\cancel{\sqrt{2n}}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

× Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sqrt{2n+2}} \times a_{n+1,n+1} &= \frac{\pi}{\cancel{\sqrt{2n+2}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{2n+2}}}{2^{2n+2}} \, \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n} && \textit{(comme vu dans la récurrence précédente)} \\
&= \frac{2n+1}{n+1} \, \frac{\pi}{2 \times 2^{2n+1}} \binom{2n}{n} \\
&= I_{2n+1}
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n-1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2n}} \, a_{n,n}$.

Commentaire

Afin de déterminer I_1, on aurait aussi pu poser le changement de variable $\boxed{u = \arcsin(t)}$ (c'est-à-dire la fonction $\varphi : u \mapsto \sin(u)$ afin de faire apparaître $1 - \big(\sin(u)\big)^2$.
Plus précisément :

$$\left| \begin{array}{l}
u = \arcsin(t) \quad \text{donc} \quad t = \sin(u) \qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto \sin(u)\textit{)} \\
\qquad\qquad\qquad \hookrightarrow dt = \cos(u)\, du \\
\bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \arcsin(0) = 0 \\
\bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}
\end{array} \right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \big(\sin(u)\big)^2}\, \cos(u)\, du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\big(\cos(u)\big)^2}\, \cos(u)\, du && \textit{(car } \big(\cos(u)\big)^2 + \big(\sin(u)\big)^2 = 1\textit{)} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big|\cos(u)\big|\, \cos(u)\, du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(u)\big)^2\, du && \textit{(car } \cos(u) \geqslant 0 \textit{ si } u \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - \cos(2u)\big)\, du && \textit{(car } \cos(2u) = 1 - 2\,\big(\cos(u)\big)^2\textit{)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)\, du \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \big(\cancel{\sin(\pi)} - \cancel{\sin(0)} \big) \right)
\end{aligned}$$

□

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}}$.

En déduire : $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi\left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \leqslant I_{2n-2} \qquad \textit{(car la suite } \left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \textit{ est décroissante)}$$

$$\text{donc} \quad \frac{I_{2n}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}} \qquad \textit{(en multiplier de part et d'autre par } \frac{1}{I_{2n}} > 0\textit{)}$$

Pour ce dernier argument, remarquons que :
× la fonction f_{2n} est continue sur $[0,1]$,
× la fonction f_{2n} est positive sur $[0,1]$,
× la fonction f_{2n} est non identiquement nulle sur $[0,1]$.
On en déduit, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) : $\displaystyle\int_0^1 f_{2n}(t)\,dt > 0$.
(de manière encore plus simple, on peut remarquer : $\dfrac{1}{I_{2n}} = \dfrac{2\,(2n+1)\,a_{n,n}}{\sqrt{2n}} > 0$*)*

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leqslant \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.}$$

- Démontrons maintenant la deuxième inégalité.

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-2)+2}{(2n-2)+3}\, I_{2n-2} && \textit{(d'après le résultat de la question 2 pour } m = 2n-2\textit{)} \\ &= \frac{2n}{2n+1}\, I_{2n-2} \end{aligned}$$

Ainsi : $\dfrac{I_{2n-2}}{I_{2n}} = \dfrac{2n+1}{2n}$.
Par ailleurs, d'après la question précédente :

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}}\, a_{n,n} \times \frac{2\,(2n+1)\,a_{n,n}}{\sqrt{2n}} = \frac{2n+1}{2n}\, 2\pi\, \left(a_{n,n}\right)^2$$

En reportant ces deux résultats dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$1 \leqslant \frac{2n+1}{2n}\, 2\pi\, \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant \frac{2n+1}{2n}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{\frac{2n+1}{2n}} \leqslant \frac{\frac{2n+1}{2n}}{\frac{2n+1}{2n}}\, 2\pi\, \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant \frac{\frac{2n+1}{2n}}{\frac{2n+1}{2n}} \qquad \textit{(en multipliant de part et d'autre par } \frac{1}{\frac{2n+1}{2n}} > 0\textit{)}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi\, \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 2\pi\, \left(a_{n,n}\right)^2 \leqslant 1.}$$

□

5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n\geqslant 1}$ lorsque n tend l'infini, puis :

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Démonstration.

- Remarquons :
  × $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,
  × $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $\left(2\pi\ (a_{n,n})^2\right)$ admet une limite et :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\pi\ (a_{n,n})^2 = 1$$

- Enfin, comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n,n} \geqslant 0$ (comme produit de nombres positifs) :

$$a_{n,n} \ = \ \sqrt{(a_{n,n})^2} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi\ (a_{n,n})^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } \left(a_{n,n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente, de limite } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} I_{2n} \ &= \ \frac{\sqrt{2n}}{2\,(2n+1)\,a_{n,n}} && \textit{(d'après la question 3)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \ \frac{\sqrt{2n}}{2\times 2n\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} && \textit{(car } 2n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n \textit{ et } a_{n,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ & && \textit{d'après ce qui précède)} \end{aligned}$$

  Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sqrt{2n}}{2\times 2n\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \ = \ \frac{\sqrt{2n}\ \sqrt{2\pi}}{2\times 2n} \ = \ \frac{\cancel{2}\times\sqrt{n}\times\sqrt{\pi}}{\cancel{2}\times 2n} \ = \ \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

Commentaire

- Il est assez fréquent que les dernières questions d'un paragraphe soient des questions bilan dans lesquelles il s'agit d'utiliser les résultats démontrés dans le paragraphe. C'est le cas dans cet énoncé.
- Ces questions sont généralement assez simples car la partie la plus difficile a souvent été traitée en amont. Le candidat attentif tentera de traiter ces questions même s'il a passé certaines questions précédentes. On retiendra que même si on laisse de côté 1, 2, voire 3 questions, rien n'empêche d'essayer de faire la suivante. Le découpage en paragraphe doit aider à comprendre à quel type de questions on a affaire. Celles de début (qui sont souvent des manipulations simples sur un nouvel objet que l'on introduit) et celle des fin de paragraphe doivent particulièrement être étudiées car elles sont souvent les plus abordables.
- On retiendra que même si un énoncé est conçu pour être globalement de difficulté progressive, le découpage en sous-questions a tendance à produire des questions simples tout au long du sujet qu'il est important de savoir repérer.

□

Partie II – Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, dt$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, dt$$

6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la 5 que la suite $\left(J_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On effectue le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{n}\ t}$.
  Plus précisément :

$$\left| \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\, t \quad \text{donc} \quad t = \sqrt{n}\, u \qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto \sqrt{n}\, u\textit{)} \\ \qquad\qquad\qquad \hookrightarrow dt = \sqrt{n}\, du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \dfrac{0}{\sqrt{n}} = 0 \\ \bullet\ t = \sqrt{n} \ \Rightarrow\ u = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1 \end{array} \right.$$

  On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt &= \int_0^1 \left(1 - \frac{\left(\sqrt{n}\ u\right)^2}{n}\right)^n \sqrt{n}\, du \\ &= \sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - \frac{\cancel{n} \times u^2}{\cancel{n}}\right)^n du \\ &= \sqrt{n}\, I_{2n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \sqrt{n}\, I_{2n}.}$$

- Enfin, d'après la question précédente :

$$J_n = \sqrt{n}\, I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \cancel{\sqrt{n}}\ \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{\sqrt{n}}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } \left(J_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente, de limite } \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

□

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, déterminer la limite la suite numérique $\big(u_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration.
Soit $t_0 \in \ [0, +\infty[$.

- Pour n suffisamment grand :

$$u_n(t_0) \ = \ \left(1 - \frac{{t_0}^2}{n}\right)^n \ = \ \exp\left(n \ \ln\left(1 - \frac{{t_0}^2}{n}\right)\right)$$

  Il suffit pour cela de choisir n vérifiant : $\sqrt{n} \geqslant t_0$, autrement dit : $n \geqslant {t_0}^2$.
  En posant : $n_0 = \lfloor {t_0}^2 \rfloor + 1$, on obtient que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout $n \geqslant n_0$.

- Or, comme $\dfrac{{t_0}^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\ln\left(1 - \frac{{t_0}^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{{t_0}^2}{n} \qquad \textit{(vrai aussi si } t_0 = 0\textit{)}$$

$$\text{donc} \qquad n \times \ln\left(1 - \frac{{t_0}^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n} \times \frac{{t_0}^2}{\cancel{n}}$$

  On en déduit, par composition de limites : $u_n(t_0) = \exp\left(n \ \ln\left(1 - \frac{{t_0}^2}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-{t_0}^2\right)$.

Finalement, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite numérique $\big(u_n(t_0)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite $\mathrm{e}^{-t_0^2}$.

Commentaire

- On a noté ici le réel positif t_0 en lieu et place du t proposé dans l'énoncé pour une visée pédagogique. Il importe de comprendre que ce t_0 est fixé une bonne fois pour toute en début de résolution et que sa valeur ne peut dépendre de n. En revanche, comme on cherche la limite de la suite $\big(u_n(t_0)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on peut choisir une valeur de n aussi grande que l'on souhaite (éventuellement en rapport avec la valeur de t_0).
- L'énoncé a été légèrement modifié afin que cette question soit accessible même si l'on n'a pas traité le chapitre sur les suites et séries de fonctions. Ici, on s'intéresse en réalité à la suite de **fonctions** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on cherche sa **limite simple** (ce vocabulaire sera précisé dans le chapitre Suites et séries de fonctions). Plus précisément, on cherche s'il existe une fonction u telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(t)$$

  On a démontré que cette fonction existe et n'est autre que $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.
- Il existe d'autres modes de convergence d'une suite de **fonctions**. Cela sera abordé plus tard dans l'année.
- Concernat les manipulation d'équivalents, rappelons que l'on ne peut pas composer de part et d'autre d'un équivalent.

$\square$

8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leqslant e^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}$$

Démonstration.

- La fonction $h = \exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
  Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Cette droite a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= h(0) + h'(0)\ (x - 0) \\ &= e^0 + e^0\ x \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, +\infty[$.
  Deux cas se présentent.
  × Si $t > \sqrt{n}$ alors $u_n(t) = 0$.
  Dans ce cas, on a bien : $0 \leqslant 0 \leqslant e^{-t^2}$.
  × Si $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$ alors $u_n(t) = \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n$.

$$\begin{array}{lccccc} & 0 & \leqslant & t^2 & \leqslant & n \\ \text{donc} & \dfrac{0}{n} & \leqslant & \dfrac{t^2}{n} & \leqslant & \dfrac{n}{n} \\ \text{donc} & 0 & \geqslant & -\dfrac{t^2}{n} & \geqslant & -1 \\ \text{donc} & 1 & \geqslant & 1 - \dfrac{t^2}{n} & \geqslant & 0 \end{array}$$

(par croissance de l'élévation au carré sur $[0, +\infty[$)

Par ailleurs :

$$\begin{array}{lccccc} & 0 & \leqslant & 1 + \left(\dfrac{-t^2}{n}\right) & \leqslant & e^{-\frac{t^2}{n}} \\ \text{donc} & 0^n & \leqslant & \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \leqslant & \left(e^{-\frac{t^2}{n}}\right)^n \\ \text{donc} & 0 & \leqslant & u_n(t) & \leqslant & e^{-t^2} \end{array}$$

(en appliquant le résultat démontré en $x = \frac{-t^2}{n}$)

(car la fonction élévation à la puissance n est croissante sur $[0, 1]$)

$$\boxed{\text{On a bien démontré, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant e^{-t^2}.}$$

□

9. `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}\ dt$ est convergente.

  La fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$ est donc impropre à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.

× Démontrons tout d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente.

- ► $\forall t \in [0, +\infty[$, $e^{-t} \geqslant 0$
- ► $e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-t}\right)$
- ► L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre 1 (> 0).

Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ est convergente.

× La fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire sur l'intervalle (centré en 0) $]-\infty, +\infty[$.
On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ sont de même nature (en l'occurrence convergentes). De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

On ne change pas la nature d'une intégrale en multipliant son intégrande par un réel non nul.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } K \text{ est convergente.}}$$

- Afin de pouvoir exploiter pleinement les questions précédentes, il convient d'effectuer un changement de variable afin de faire apparaître la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ en lieu et place de la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. On effectue le changement de variable : $\boxed{u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}}$.

  Plus précisément :

  $$\left|\begin{array}{l} u = \dfrac{t}{\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad t = \sqrt{2}\, u \qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto \sqrt{2}\, u\textit{)} \\ \hookrightarrow dt = \sqrt{2}\, du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0 \\ \bullet\ t = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \end{array}\right.$$

  On obtient :

  $$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \sqrt{2}\, du \;=\; \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

  On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\, dt$ sont de même nature (en l'occurrence convergentes).

On en conclut :

$$\boxed{K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt}$$

- En question 7, on a démontré, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$.
On cherche maintenant à démontrer :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} u_n(t) \right)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$
ce qui permettra à terme d'obtenir la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ et donc de K.
Pour ce faire, on va appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $\left(u_n \right)$.

(i) Existence d'une limite finie - étude « en n »

  - En question 7 on a démontré que, pour tout $t_0 \in [0, +\infty[$, la suite **numérique** $\left(u_n(t_0) \right)$ est convergente, de limite :
  $$u(t_0) \ = \ \lim_{n \to +\infty} u_n(t_0) \ = \ \mathrm{e}^{-t_0^2}$$
  Cela démontre que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$.
  - La fonction $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$.

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue **par morceaux** sur $[0, +\infty[$.
  - En question 8, on a démontré que pour $t \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:
  $$\left| u_n(t) \right| \ \leqslant \ \mathrm{e}^{-t^2}$$
  De plus, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
  Cette inégalité démontre donc au passage que la fonction u_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Finalement, par théorème de convergence dominée, la fonction u est intégrable sur $[0, +\infty[$ et :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt \right) \ = \ \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} u_n(t) \right)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} u(t)\, dt \ = \ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$
$$\boxed{\text{On en déduit : } K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \left(\lim_{n \to +\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt \right) \right)}$$

- Il reste maintenant à déterminer la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt \ &= \ \int_0^{\sqrt{n}} u_n(t)\, dt \ + \ \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} u_n(t)\, dt \\
&= \ \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n} \right)^n\, dt \ + \ \cancel{\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} 0\, dt} \qquad \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \\
&= \ J_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } K \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{\sqrt{2\,\pi}}\, dt \ = \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \left(\lim_{n \to +\infty} J_n \right) \ = \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ = \ 1.}$$ □

Exercice 1

Dans tout cet exercice, i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.

Questions de cours

10. Pour tout réel θ, donner le module et un argument du nombre complexe $e^{i\theta}$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Le nombre complexe } e^{i\theta} \text{ est de module 1 et d'argument } \theta.}$$

□

11. Pour tout entier naturel n et tout réel t, démontrer que $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :
$$\sin\left(n\pi + t\right) = \sin\left(n\pi\right) \times \cos(t) + \sin(t) \times \cos\left(n\pi\right)$$
- Or :
  × $\sin\left(n\pi\right) = \dfrac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2i} = \dfrac{\left(e^{i\pi}\right)^n - \left(e^{-i\pi}\right)^n}{2i} = \dfrac{(-1)^n - (-1)^n}{2i} = 0$
  × $\cos\left(n\pi\right) = \dfrac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2} = \dfrac{\left(e^{i\pi}\right)^n + \left(e^{-i\pi}\right)^n}{2} = \dfrac{(-1)^n + (-1)^n}{2} = \dfrac{2\,(-1)^n}{2} = (-1)^n$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin(t).}$$

Commentaire

On pouvait aussi tout simplement remarquer : $e^{i(n\pi+t)} = e^{in\pi} \times e^{it} = \left(e^{i\pi}\right)^n \times e^{it} = (-1)^n\, e^{it}$.

$$\sin(n\pi + t) = \mathrm{Im}\left(e^{i(n\pi+t)}\right) = \mathrm{Im}\left((-1)^n\, e^{it}\right) = (-1)^n\, \mathrm{Im}\left(e^{it}\right) = (-1)^n \sin(t)$$

□

12. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, décroissante et de limite nulle.

a) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n\, a_n$ converge.

Démonstration.

- Comme la suite (a_n) est décroissante et convergente, sa limite (en l'occurrence 0) est sa borne inférieure. En particulier, c'est un minorant de la suite. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$$
- Les propriétés suivantes sont vérifiées :
  × la série $\sum (-1)^n\, a_n$ est une série alternée puisque la suite (a_n) est de signe constant,
  × la suite (a_n) est décroissante,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$$\boxed{\text{Par le critère spécial des séries alternées, la série numérique } \sum (-1)^n\, a_n \text{ est donc convergente.}}$$

□

b) Pour tout entier naturel p, justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant p} (-1)^n\, a_n$ converge.

Sa somme sera notée T_p.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- Si $p = 0$
  La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n \, a_n$ est convergente d'après la question précédente.

- Si $p \geqslant 1$
  On note (S_n) la suite des sommes partielles associée à la série $\sum (-1)^n a_n$.
  Alors, pour tout $n \geqslant p$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} (-1)^k a_k &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k a_k \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k a_k \qquad \textit{(car la série } \sum (-1)^n a_n \textit{ est convergente d'après la question précédente)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la série } \sum_{n\geqslant p} (-1)^n\, a_n \text{ est converge de somme } T_p = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k a_k.}$$

□

c) Justifier que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Démonstration.

- Avec les notations précédentes, pour tout $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, a_n &= \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n\, a_n + \sum_{n=p}^{+\infty} (-1)^n\, a_n \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n\, a_n + T_p\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}T_p &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, a_n + \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n\, a_n \\ &\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, a_n \qquad \textit{(d'après la question précédente)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (T_p) \text{ est convergente, de limite nulle.}}$$

Commentaire

- Si $\sum u_n$ est une série numérique convergente (de somme S), on note généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

  Cette quantité est appelée reste d'ordre n de la série $\sum u_n$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S = S_n + R_n$ et ainsi : $R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$.

- Dans cette question, on considère la suite (T_p) qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} = R_n$. On étudie donc la suite des restes à un décalage près. L'intérêt de ce décalage sera détaillé en question ***16.d)***.

□

d) Rappeler le signe de T_p suivant les valeurs de p.

Démonstration.
Par résultat du critère spécial des séries alternées, T_p (reste d'ordre $p-1$ de la série $\sum (-1)^n a_n$) est du signe de $(-1)^p a_p$ (premier terme de la somme) c'est-à-dire du signe de $(-1)^p$ puisque $a_p \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } T_p \text{ est positif si } p \text{ pair et négatif si } p \text{ impair.}}$$

□

13. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Justifier que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

On admet que le résultat reste valable pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Démonstration.

Notons $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\, dt$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x > 0$.
  $$G(x) \ = \ \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\, dt \ = \ [\ F(t)\ ]_0^{\sqrt{x}} \ = \ F\big(\sqrt{x}\big) - F(0)$$
  La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car elle s'écrit $G = F \circ h - F(0)$ (somme d'une composée et d'une constante) où :
  - × $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est :
    - ▸ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$,
    - ▸ telle que $h\big(\,]0, +\infty[\,\big) \ \subset \ \mathbb{R}$.
  - × F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- De plus, pour tout $x > 0$:
$$\begin{aligned} G'(x) &= \big(\, F \circ h\,\big)'(x) \\ &= F'\big(\, h(x)\,\big) \times h'(x) \\ &= f\big(\sqrt{x}\,\big) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \textit{(par définition de h)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } G \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et pour tout } x > 0 : G'(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.}$$ □

* * * * *

14. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

On rappelle que si ϕ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors la dérivée de la fonction complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{i\phi(x)}$ est la fonction $x \mapsto i\,\phi'(x)\ \mathrm{e}^{i\,\phi(x)}$.

a) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$F'(x) = i \int_0^1 \mathrm{e}^{i\,x\,(1+t^2)}\, dt$$

Démonstration.

Dans toute la suite :

- × on note $h : (x, t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ix\,(1+t^2)}}{1+t^2}$.
- × pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{x_0} : t \mapsto h(x_0, t)$.
- × pour tout $t_0 \in\,]0, +\infty[$, on note : $\underline{h}_{t_0} : x \mapsto h(x, t_0)$.

(i) Caractère $\mathscr{C}^1$ - étude « en x »

- Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $\underline{h}_t : x \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\underline{h}_t{}'(x) = \frac{1}{1+t^2} \times i\,(1+t^2)\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x} = i\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x}$$

(ii) Intégrabilité (par domination) - étude « en t »

- Intégrabilité (sans forcément dominer)

0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{ix\,(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ en tant que fonction continue sur le `SEGMENT` $[0,1]$.

- Intégrabilité par domination

1. ▶ La fonction $t \mapsto \underline{h}_t'(x)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1]$.

▶ Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.

$$\left|\, \underline{h}_t'(x)\, \right| = \left| i\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x} \right| = |i| \times \left| \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x} \right| = 1 \leqslant 1$$

la fonction $\varphi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,1]$.
(cela démontre en particulier que la fonction $t \mapsto \underline{h}_t'(x)$ est intégrable sur $[0,1]$ par domination)

Ainsi, par théorème de régularité des intégrales à paramètre, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- On en déduit de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^1 \underline{h}_t{}'(x)\ dt \\ &= \int_0^1 i\,\mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x}\ dt \end{aligned}$$

Finalement : $\forall x \in \,]0,+\infty[$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^1 i\ \mathrm{e}^{i\,(1+t^2)\,x}\ dt = i \int_0^1 \mathrm{e}^{ix\,(1+t^2)}\ dt.$ □

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$:

$$F'(x) = \frac{i\,\mathrm{e}^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\,u^2}\ du$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = i \int_0^1 \mathrm{e}^{ix\,(1+t^2)}\ dt = i \int_0^1 \mathrm{e}^{ix}\ \mathrm{e}^{ix\,t^2}\ dt = i\ \mathrm{e}^{ix} \int_0^1 \mathrm{e}^{ix\,t^2}\ dt = i\ \mathrm{e}^{ix} \int_0^1 \mathrm{e}^{i\left(\sqrt{x}\,t\right)^2}\ dt$$

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = \sqrt{x}\, t}$:

$$\left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x}\, t \quad \text{donc} \quad t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, u \qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, u\textit{)} \\ \qquad\qquad\qquad \hookrightarrow dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = \sqrt{x} \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est licite puisque la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le `SEGMENT` $[0, \sqrt{x}]$. On obtient :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{i\left(\sqrt{x}\, t\right)^2}\, dt \;=\; \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\, u^2}\, \frac{1}{\sqrt{x}}\, du$$

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x > 0 : F'(x) \;=\; i\, \mathrm{e}^{ix} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\, u^2}\, \frac{1}{\sqrt{x}}\, du \;=\; \frac{i\, \mathrm{e}^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{i\, u^2}\, du.}$$ □

15. **Convergence d'intégrales**

a) Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\, du$ convergent.

Démonstration.

- La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0, \pi]$.

  Par ailleurs, comme $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$ alors :

$$\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{u}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}$$

  Ainsi, $\dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction g est donc prolongeable par continuité en posant $g(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du \text{ est faussement impropre et est donc convergente.}}$$

- La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0, \pi]$.

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\, du$ est impropre seulement en 0.

- × $\forall u \in\ ]0, \pi]$

  × $\dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}} \underset{u \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{u}}$

  × L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en 0 et d'exposant $\frac{1}{2}$ (< 1).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par théorème d'équivalence des intégrales généralisées de} \\ \text{fonctions continues positives, l'intégrale } \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\, du \text{ est convergente.}\end{array}}$$

Commentaire

- Il était aussi possible de remarquer :
$$\left| \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} \right| = \frac{|\cos(u)|}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} \right| = \frac{|\sin(u)|}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u}}$$
et de conclure via le théorème de comparaison par inégalité.
- En exploitant la même idée, à savoir que les fonctions cos et sin sont bornées, on pouvait écrire :
$$\frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} = \underset{u \to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} = \underset{u \to 0}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$
et conclure par le théorème de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives.

□

b) En effectuant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du$ converge.

Démonstration.

- Sous réserve de convergence :
$$\int_{\pi}^{+\infty} e^{iu} \times \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \left[\frac{e^{iu}}{i} \frac{1}{\sqrt{u}} \right]_{\pi}^{+\infty} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{i} \times \left(-\frac{1}{2}\, u^{-\frac{3}{2}} \right) du \qquad (*)$$
- Or :
$$\left| \frac{e^{iu}}{i} \frac{1}{\sqrt{u}} \right| = \frac{|e^{iu}|}{|i|} \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{u}} \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
Ainsi, le crochet est convergent. On en conclut que les deux intégrales impropres de l'égalité $(*)$ sont de même nature.
- Par ailleurs :
$$\left| \frac{e^{iu}}{i\, u^{\frac{3}{2}}} \right| = \frac{|e^{iu}|}{|i|\, u^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$$
L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\, du$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ et d'exposant $\dfrac{3}{2}$ (> 1).
$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\, du \text{ est absolument convergente.}}$$
- Le crochet généralisé et l'une des deux intégrales étant convergents, la réserve de convergence est levée et on peut conclure que la dernière intégrale est convergente.
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du \text{ est convergente.}}$$

□

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ converge.

Démonstration.

- En question ***15.a)***, on a démontré que les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\,du$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$ sont convergentes. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ est convergente. De plus :

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^{\pi} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\,du + i \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$$

- Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ et $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du$ sont convergentes.

$$\boxed{\text{Ainsi, par définition, l'intégrale doublement impropre } \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,du \text{ est convergente.}}$$

□

d) Prouver enfin que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\,dv$ converge.

On pourra effectuer un changement de variables.

Démonstration.

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{v = \sqrt{u}}$:

$$\left|\begin{array}{l} u = v^2 \quad \text{donc} \quad v = \sqrt{u} \qquad\qquad \textit{(on note alors } \psi : u \mapsto \sqrt{u}\textit{)} \\ \hookrightarrow dv = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\,du \\ \bullet\ v = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \bullet\ v = +\infty \Rightarrow u = +\infty \end{array}\right.$$

On obtient, sous réserve de convergence :

$$\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\,dv = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}}\,du$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cette dernière intégrale étant convergente (d'après la question précédente), la} \\ \text{réserve est levée et l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iv^2}\,dv \text{ est convergente.}\end{array}}$$

□

16. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, w_n existe.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux cas se présentent.

- Si $n = 0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,du$ est convergente (d'après la question ***15.a)***).

- Si $n \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$ est bien définie car la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ est continue sur le `SEGMENT` $[n\,\pi, (n+1)\,\pi]$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du \text{ existe.}}$$

□

b) On pose, pour tout entier naturel n : $\alpha_n = (-1)^n\, w_n$.
Prouver que α_n est un réel strictement positif.
On pourra effectuer sur w_n le changement de variables affine $t = u - n\,\pi$.

Démonstration.

- On effectue alors le changement de variable $\boxed{t = u - n\,\pi}$:

$$\left|\begin{array}{l} t = u - n\,\pi \quad \text{donc} \quad u = t + n\,\pi \quad \textit{(on note alors } \psi : t \mapsto t + n\,\pi\textit{)} \\ \qquad\qquad\qquad \hookrightarrow du = dt \\ \bullet\ u = n\,\pi \ \Rightarrow\ t = 0 \\ \bullet\ u = (n+1)\,\pi \ \Rightarrow\ t = \pi \end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{n\,\pi}^{(n+1)\,\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\big(t + n\,\pi\big)}{\sqrt{t + n\,\pi}}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(-1)^n\ \sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}}\, dt \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11}}\textit{)} \end{aligned}$$

- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = (-1)^n \int_{n\,\pi}^{(n+1)\,\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du = (-1)^n \times (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}}\, dt$$

Or, pour tout $t \in [0, \pi]$, $\sin(t) \geqslant 0$. Ainsi :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}} \geqslant 0$$

$$\text{donc} \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + n\,\pi}} \geqslant 0 \qquad \textit{(par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \geqslant 0.}$$

□

c) Prouver que la suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{array}{rrcll} & t + (n+1)\,\pi & \geqslant & t + n\,\pi & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{t + (n+1)\,\pi} & \leqslant & \dfrac{1}{t + n\,\pi} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & \dfrac{\sin(t)}{t + (n+1)\,\pi} & \leqslant & \dfrac{\sin(t)}{t + n\,\pi} & \textit{(car } \sin(t) \geqslant 0 \textit{ puisque } t \in [0, \pi]\textit{)} \end{array}$$

On en déduit, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant \pi$) :

$$\alpha_{n+1} \;=\; \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t+(n+1)\,\pi}\,dt \;\leqslant\; \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t+n\,\pi}\,dt \;=\; \alpha_n$$

$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n. \text{ La suite } (\alpha_n) \text{ est donc décroissante.}}$

□

d) Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge et préciser le signe de sa somme.
On pourra utiliser les questions de cours.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(-1)^n \times \alpha_n \;=\; (-1)^n \times (-1)^n\, w_n \;=\; w_n$$

  Il s'agit donc de démontrer que la série $\sum\ (-1)^n\ \alpha_n$ est convergente.
- D'autre part :
  × la série $\sum\ (-1)^n\ \alpha_n$ est alternée puisque la suite (α_n) est positive (question ***16.b)***),
  × la suite (α_n) est décroissante (question ***16.c)***),
  × la suite (α_n) est convergente de limite nulle. Démontrons-le.
  Tout d'abord, comme pour tout $t \in\,]0,\pi]$, $\dfrac{1}{t+n\,\pi} \leqslant \dfrac{1}{n\,\pi}$ et $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$:

$$0 \;\leqslant\; \frac{\sin(t)}{t+n\,\pi} \;\leqslant\; \frac{1}{n\,\pi}$$

  On en déduit, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$0 \;\leqslant\; \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t+n\,\pi}\,dt \;\leqslant\; \int_0^\pi \frac{1}{n\,\pi}\,dt \;=\; \frac{\pi}{n\,\pi} \;=\; \frac{1}{n}$$

  Or :
  × $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
  × $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite (α_n) est convergente de limite nulle.

$\boxed{\text{Par critère spécial des séries alternées, la série } \sum\ (-1)^n\ \alpha_n \text{ est convergente.}}$

- De plus, comme vu en ***12.a)***, la somme de cette série est du signe de son premier terme $(-1)^0\ \alpha_0 = \alpha_0$.

$\boxed{\text{La somme de la série } \sum\ (-1)^n\ \alpha_n \text{ est une quantité positive.}}$

□

e) Démontrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$.

Démonstration.
Soit $N \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} w_n &= \sum_{n=0}^{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du \\ &= \int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du \qquad \textit{(par relation de Chasles)}\end{aligned}$$

- Par ailleurs, on a démontré en question ***15.b)*** que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du$ est convergente.

  On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\, du$ sont convergentes en tant que partie réelle et partie imaginaire de l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\, du$.

  On en conclut :

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\int_0^{(N+1)\pi} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} w_n \right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\, du}$$

□

17. Montrer que, pour tout réel x positif : $F(x) = \dfrac{\pi}{4} + i \left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\, du \right)^2$.

Démonstration.

- Notons $f : t \mapsto e^{it^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (puisque les fonctions $t \mapsto \cos\left(t^2\right)$ et $t \mapsto \sin\left(t^2\right)$ le sont) et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

  La fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\, dt$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (d'après la question ***13***).

- Notons alors : $R : x \mapsto \dfrac{\pi}{4} + i \left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\, du \right)^2$.

  La fonction R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ car s'écrit $R = \dfrac{\pi}{4} + i\, G^2$ et que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}R'(x) &= i\ 2\ G'(x) \times \left(G(x) \right) \\ &= i\ \cancel{2}\ \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\cancel{2}\sqrt{x}} \times \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\, du \\ &= i\ \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \times \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2}\, du \\ &= F'(x) \qquad \textit{(d'après la question 14.b))}\end{aligned}$$

- La fonction $R - F$ étant de dérivée nulle sur $]0, +\infty[$, elle est constante sur cet intervalle. Il existe donc $c \in \mathbb{C}$ telle que :
$$R - F \ = \ c$$
Par ailleurs, la fonction F étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (d'après la question ***14.a)***), elle est notamment continue en 0. On peut démontrer que c'est aussi le cas de la fonction R (en reprenant l'étude de l'intégrale fonction de ses bornes qui apparaît dans la définition de R). On en déduit alors :
$$\begin{aligned} c &= R(0) - F(0) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + i \cancel{\left(\int_0^{\sqrt{0}} e^{i\,u^2} \, du \right)^2} \right) - \int_0^1 \frac{e^0}{1+t^2} \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\arctan(t) \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(\arctan(1) - \arctan(0) \right) \\ &= \cancel{\frac{\pi}{4}} - \left(\cancel{\frac{\pi}{4}} - 0 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in [0, +\infty[, \ F(x) = R(x) = \frac{\pi}{4} + i \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{i\,u^2} \, du \right)^2.}$$
□

18. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \, dx = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

*On pourra utiliser la question **15**.*

Démonstration.

- D'après la question ***15***, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{i\,u^2} \, du$ est convergente.
On peut donc en conclure :
$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{i\,u^2} \, du \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{i\,u^2} \, du$$
- Par hypothèse, la fonction F admet pour limite 0 en $+\infty$. On en déduit :
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \to +\infty} F(x) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\pi}{4} + i \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{i\,u^2} \, du \right)^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + i \left(\int_0^{+\infty} e^{i\,u^2} \, du \right)^2 \end{aligned}$$
Ainsi : $i \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{i\,u^2} \, du \right)^2 = -\dfrac{\pi}{4}$.
$$\boxed{\left(\int_0^{+\infty} e^{i\,u^2} \, du \right)^2 = -\frac{1}{i} \, \frac{\pi}{4} = \cancel{-} \frac{i}{\cancel{i^2}} \, \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \, e^{i \frac{\pi}{2}}.}$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{i\,u^2}\,du &= \pm\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}}\\ &= \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\ &= \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,(1+i)\end{aligned}$$

(chaque nombre complexe, hormis 0*, admet deux racines carrées distinctes - on utilise le symbole* $\pm$ *car on ne peut écarter l'une ou l'autre des expressions à ce stade)*

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(u^2\right)\,du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(u^2\right)\,du$ sont convergentes en tant que partie réelle et partie imaginaire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{i\,u^2}\,du$. On démontre ainsi :

$$\int_0^{+\infty}\cos\left(u^2\right)\,du=\int_0^{+\infty}\sin\left(u^2\right)\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\quad\text{ou}\quad\int_0^{+\infty}\cos\left(u^2\right)\,du=\int_0^{+\infty}\sin\left(u^2\right)\,du=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

- Il reste à sélectionner la bonne expression. En question ***15*** on démontre :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{i\,v^2}\,dv &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{i\,u}}{2\sqrt{u}}\,du\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du\;+\;i\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin\left(v^2\right)\,dv &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,du && \textit{(par égalité des parties imaginaires dans l'égalité ci-dessus)}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n && \textit{(d'après la question 16.e))}\\ &\geqslant 0 && \textit{(d'après la question 16.d))}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On peut donc finalement conclure : }\int_0^{+\infty}\cos\left(u^2\right)\,du=\int_0^{+\infty}\sin\left(u^2\right)\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.}$$ □

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $]-\infty, -1]$.

19. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$.

Justifier que F_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est `LA` primitive de f qui s'annule en a.

$$\boxed{\text{En particulier, la fonction } F_1 \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et vérifie : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_1'(x) = f(x).}$$

Commentaire

- Il est aussi possible, pour répondre à cette question, de mettre en place l'étude générale d'une intégrale fonction de ses bornes. La rédaction choisie ici correspond certainement plus à l'esprit de l'énoncé qui sollicite une justification plutôt qu'une démonstration.
- Rappelons que, de manière générale, la fonction :

$$x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)\ dt$$

`N`'est `PAS` la primitive de la fonction f qui s'annule en a. Elle l'est seulement lorsque la borne basse de l'intégrale ne dépend pas de x est que la borne haute est $v(x) = x$ (et pas $v(x) = 2x$ ou $v(x) = -x$ ou toute autre expression en x).

□

20. Justifier que la fonction F qui à tout x de $\mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\ dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par relation de Chasles

$$\int_{-\infty}^x f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt \ + \ \int_{-1}^x f(t)\ dt$$

Cette égalité est valable car :

× l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$ est (absolument) convergente puisque la fonction f est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

× l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\ dt$ est bien définie en tant qu'intégrale de la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur le `SEGMENT` $[-1, x]$.

- Ainsi, la fonction F est, à une constante additive près (en l'occurrence $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt$), `LA` primitive de la fonction f qui s'annule en -1.

$$\boxed{\text{En particulier, la fonction } F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et vérifie : } \forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x).}$$

□

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ la base canonique de E_n.

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n.

21. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k \, \mathrm{e}^t$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.

Démonstration.

- La fonction f_k est continue sur $]-\infty, -1]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f_k(t) \, dt$ est impropre seulement en $-\infty$.
- On effectue alors le changement de variable $\boxed{u = -t}$. Sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} t^k \, \mathrm{e}^t \, dt &= \int_{+\infty}^{1} \left(-u\right)^k \, \mathrm{e}^{-u} \, (-1) \, du \\
&= \int_{1}^{+\infty} \left(-u\right)^k \, \mathrm{e}^{-u} \, du \\
&= \left(-1\right)^k \int_{1}^{+\infty} u^k \, \mathrm{e}^{-u} \, du
\end{aligned}$$

  On en conclut que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} t^k \, \mathrm{e}^t \, dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} u^k \, \mathrm{e}^{-u} \, du$ sont de même nature.
- $\times$ $\forall u \in [-1, +\infty[$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2} u} \geqslant 0$
  $\times$ $\left| u^k \, \mathrm{e}^{-u} \right| \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2} u}\right)$
  $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} u} \, du$ est convergente en tant qu'intégrale de référence de paramètre $\frac{1}{2}$ (> 0).
  Ainsi, par théorème de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} u^k \, \mathrm{e}^{-u} \, du$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{-1} t^k \, \mathrm{e}^t \, dt \text{ est donc absolument convergente.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f_k \text{ est intégrable sur }]-\infty, -1].}$$

□

22. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{e}^t \, dt$$

Commentaire

- Le concepteur a décidé d'introduire la notation g certainement pour insister sur le fait que L est une application qui renvoie une fonction.
- Cependant, cette notation peut dérouter. La fonction obtenue comme image de la fonction f par l'application L n'est autre que la fonction $L(f)$ qui est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \big(L(f)\big)(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{e}^t \, dt$$

Démonstration.

- Il s'agit tout d'abord de démontrer que l'application L est bien définie sur E_n. Autrement dit, il faut démontrer que pour tout $f \in E_n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité :
$$\Big(L(f)\Big)(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{e}^{t}\ dt$$
est bien définie. C'est le cas si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{e}^{t}\ dt$ est convergente.
Comme $f \in E_n$, il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $f = a_0 \cdot e_0 + a_1 \cdot e_1 + \ldots + a_n \cdot e_n$, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) &= \big(a_0 \cdot e_0 + a_1 \cdot e_1 + \ldots + a_n \cdot e_n\big)(t) \\
&= a_0\ e_0(t) + a_1\ e_1(t) + \ldots + a_n\ e_n(t) && \textit{(par linéarité de l'évaluation en un point)} \\
&= a_0 + a_1\ t + \ldots + a_n\ t^n
\end{aligned}$$
Enfin :
× $\forall t \in\,]-\infty, x]$, $t^n\ \mathrm{e}^t \geqslant 0$
× $f(t)\ \mathrm{e}^t = \underset{t \to -\infty}{O}\Big(t^n\ \mathrm{e}^t\Big)$
× L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^n\ \mathrm{e}^t\ dt$ est convergente d'après la question ***21***.
Ainsi, par théorème de domination des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{e}^t\ dt$ est (absolument) convergente. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\Big(L(f)\Big)(x)$ est bien définie. Autrement dit, la fonction $L(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } f \in E_n, \text{ la fonction } L(f) \text{ est bien définie. Ainsi, la fonction } L \text{ est bien définie sur } E_n.}$$

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Soit $(f_1, f_2) \in E_n \times E_n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}
&\bigg(L\Big(\boxed{\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2}\Big)\bigg)(x) \\
=\ & \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \Big(\boxed{\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2}\Big)(t)\ \mathrm{e}^t\ dt \\
=\ & \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \Big(\lambda_1\ f_1(t) + \lambda_2\ f_2(t)\Big)\ \mathrm{e}^t\ dt && \textit{(par linéarité de l'évaluation)} \\
=\ & \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} \Big(\lambda_1\ f_1(t)\ \mathrm{e}^t + \lambda_2\ f_2(t)\ \mathrm{e}^t\Big)\ dt && \textit{(par distributivité de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\
=\ & \mathrm{e}^{-x} \left(\lambda_1 \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\ \mathrm{e}^t\ dt\ +\ \lambda_2 \int_{-\infty}^{x} f_2(t)\ \mathrm{e}^t\ dt\right) && \textit{(par linéarité de l'intégrale, les intégrales en présence étant convergentes)} \\
=\ & \lambda_1\ \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\ \mathrm{e}^t\ dt\ +\ \lambda_2\ \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{x} f_2(t)\ \mathrm{e}^t\ dt \\
=\ & \lambda_1\ L(f_1)(x)\ +\ \lambda_2\ L(f_2)(x) \\
=\ & \Big(\lambda_1\ L(f_1) + \lambda_2\ L(f_2)\Big)(x)
\end{aligned}$$

On a démontré : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Big(L\big(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2\big) \Big)(x) \ = \ \Big(\lambda_1 \ L(f_1) + \lambda_2 \ L(f_2) \Big)(x)$. Ainsi :

$$L\big(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2\big) \ = \ \lambda_1 \ L(f_1) + \lambda_2 \ L(f_2)$$

$$\boxed{\text{L'application } L \text{ est donc bien linéaire.}}$$

□

23. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.

Démonstration.

- Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \ = \ e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)\, e^{t} \ dt$$

La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit $g = h \times F$ où :

× $h : x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

× $F : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, e^{t} \ dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question 20.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) \ &= \ h'(x) \times F(x) \ + \ h(x) \times F'(x) \\ &= \ -e^{-x} \int_{-\infty}^{x} f(t)\, e^{t} \ dt \ + \ \cancel{e^{-x}} \ \big(f(x) \ \cancel{e^{x}} \big) \qquad \textit{(d'après la formule de dérivation obtenue en question 20)} \\ &= \ -g(x) \ + \ f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ est bien solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle : } y' + y = f(x).}$$

□

24. En déduire $\mathrm{Ker}(L)$.

Démonstration.
Démontrons : $\mathrm{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}$. On procède par double inclusion.

($\supset$) Tout d'abord : $L\big(0_{E_n}\big) = 0_{E_n}$ car l'application L est linéaire.

Ainsi : $\mathrm{Ker}(L) \ \supset \ \{0_{E_n}\}$.

($\subset$) Soit $f \in \mathrm{Ker}(L)$. Alors $L(f) = 0_{E_n}$.
Notons $g = L(f)$. D'après la question précédente : $g' + g = f$. On en déduit :

$$\begin{aligned} f \ &= \ \big(L(f)\big)' \ + \ L(f) \\ &= \ \big(0_{E_n}\big)' \ + \ 0_{E_n} \\ &= \ 0_{E_n} \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Ker}(L) \ \subset \ \{0_{E_n}\}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Ker}(L) \ = \ \{0_{E_n}\}.}$$

□

25. a) Calculer $L(e_0)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \big(L(e_0)\big)(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e_0(t)\ \mathrm{e}^{t}\ dt & \\ & = & \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t}\ dt & \textit{(car } e_0 : t \mapsto 1\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-x}\ \big[\ \mathrm{e}^{t}\ \big]_{-\infty}^{x} & \\ & = & \mathrm{e}^{-x} \times \left(\mathrm{e}^{x} - \left(\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{t}\right)\right) & \\ & = & \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x} & \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(L(e_0)\big)(x) = 1$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } L(e_0) = e_0.}$$

□

b) Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, n-1]\!]$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\ L(e_k)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \big(L(e_{k+1})\big)(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e_{k+1}(t)\ \mathrm{e}^{t}\ dt & \\ & = & \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^{k+1}\ \mathrm{e}^{t}\ dt & \textit{(car } e_{k+1} : t \mapsto t^{k+1}\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-x} \left(\big[\ t^{k+1}\ \mathrm{e}^{t}\ \big]_{-\infty}^{x} - \displaystyle\int_{-\infty}^{x} (k+1)\ t^{k}\ \mathrm{e}^{t}\ dt\right) & \textit{(par intégration par parties } (*)\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-x} \left(x^{k+1}\ \mathrm{e}^{x} - \left(\cancel{\displaystyle\lim_{t\to-\infty} t^{k+1}\ \mathrm{e}^{t}}\right)\right) - (k+1)\ \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e_k(t)\ \mathrm{e}^{t}\ dt & \\ & = & x^{k+1} \times \cancel{\mathrm{e}^{-x}}\ \cancel{\mathrm{e}^{x}} - (k+1)\ \big(L(e_k)\big)(x) & \textit{(par définition de } L\textit{)} \\ & = & e_{k+1}(x) - (k+1)\ \big(L(e_k)\big)(x) & \\ & = & \Big(e_{k+1} - (k+1)\ L(e_k)\Big)(x) & \end{array}$$

Revenons rapidement sur l'étape $(*)$. L'intégration par parties effectuées est licite puisque les deux intégrales en présence sont convergentes (car la fonction L est bien définie sur E_n comme explicité en question 22). Cela démontre de fait la convergence du crochet généralisé mais il reste à le calculer. En posant le changement de variable $\boxed{u = -t}$, on obtient :

$$\lim_{t\to-\infty} t^{k+1}\ \mathrm{e}^{t} = \lim_{u\to+\infty} (-u)^{k+1}\ \mathrm{e}^{-u} \lim_{u\to+\infty} (-1)^{k+1}\ \frac{u^{k+1}}{\mathrm{e}^{u}} = 0$$

On a démontré : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(L(e_{k+1})\big)(x) = \big(e_{k+1} - (k+1)\ L(e_k)\big)(x)$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)\ L(e_k).}$$

□

c) En déduire que L est un endomorphisme de E_n.

Démonstration.

- On a démontré en question *22* que l'application L est linéaire.
  Il reste à démontrer que L est à valeurs dans E_n.
- Il s'agit donc de démontrer : $L(E_n) \subset E_n$.
  Il suffit pour cela de démontrer : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $L(e_k) \in E_n$.

  Démontrons par récurrence $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ où $\mathscr{P}(k)$: $L(e_k) \in E_n$.

  ▸ **Initialisation** :
  D'après la question ***25.a)***, $L(e_0) = e_0 \in \text{Vect}\,(e_0, e_1, \ldots, e_n) = E_n$.
  D'où $\mathscr{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
  Supposons $\mathscr{P}(k)$ et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$ (c'est-à-dire $L(e_{k+1}) \in E_n$).
  D'après la question ***25.b)*** :

$$L(e_{k+1}) \;=\; e_{k+1} - (k+1)\, L(e_k)$$

  Or, par hypothèse de récurrence : $L(e_k) \in E_n$. Comme de plus : $e_{k+1} \in E_n$, $L(e_{k+1})$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteur de E_n.
  Comme E_n est un espace vectoriel, c'est un espace stable par combinaison linéaire.
  On en conclut que $L(e_{k+1})$ est un vecteur de E_n.
  D'où $\mathscr{P}(n+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$.

$$\boxed{\text{Finalement, l'application linéaire est à valeurs dans } E_n. \text{ Cette application est donc bien un endomorphisme de } E_n.}$$

Commentaire

On aurait éventuellement être plus précis et démontrer :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \; L(e_k) \in \text{Vect}\,(e_0, e_1, \ldots, e_k)$$

La démonstration se fait par récurrence. □

26. Prouver que L est un automorphisme de E_n.

Démonstration.

- D'après la question *24*, l'application L est injective puisque $\text{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}$.
- Comme :
  × E_n est un espace vectoriel de dimension finie,
  × L est un endomorphisme de E_n (d'après la question *25*),

  l'injectivité de L équivaut à sa bijectivité.

$$\boxed{\text{L'application } L \text{ est un endomorphisme de } E_n \text{ bijectif. C'est donc un automorphisme de } E_n.}$$ □

27. `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
Recherche des sous-espaces propres de L
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.

a) Justifier que $\lambda \neq 0$.

Démonstration.
On raisonne par l'absurde.
Supposons : $\lambda = 0$. Alors : $L(f) = 0 \cdot f = 0_{E_n}$.
Ainsi, $f \in \mathrm{Ker}(L) = \{0_{E_n}\}$ (d'après la question *24*).
Comme f est un vecteur propre, $f \neq 0_{E_n}$, ce qui contredit la ligne précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lambda \neq 0.}$$

□

b) Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\lambda\, y' + (\lambda - 1)\, y = 0 \quad (*)$.

Démonstration.

- D'après la question 23, la fonction $L(f)$ est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f$. Ainsi :
$$\big(L(f)\big)' + L(f) = f \tag{A}$$
- D'autre part, par hypothèse : $L(f) = \lambda \cdot f$.
En reportant cette égalité dans (A), on obtient :
$$\begin{aligned} & \big(\lambda \cdot f\big)' + \lambda \cdot f = f \\ \text{donc} \quad & \lambda \cdot f' + \lambda \cdot f = f \\ \text{donc} \quad & \lambda \cdot f' + (\lambda - 1) \cdot f = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } L(f) \text{ est bien solution de l'équation différentielle } \lambda \cdot y' + (\lambda - 1) \cdot y = 0.}$$

□

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(*)$.

Démonstration.
L'équation $y' + \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'ensemble des solutions de cette équation est donc :} \\ \{x \mapsto K\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\, x} \mid K \in \mathbb{R}\}.\end{array}}$$

□

d) Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle $(*)$.

Démonstration.
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{r} \text{La fonction } h \text{ est solution sur } \mathbb{R} \\ \text{de l'équation différentielle } (*) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Il existe } K \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = K\ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\, x} \end{array}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $\lambda = 1$, alors $\frac{\lambda-1}{\lambda} = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\boxed{\text{Dans ce cas, les seules fonctions solutions de } (*) \text{ sont les fonctions constantes. Ce sont bien des fonctions polynomiales.}}$$

× si $\lambda \neq 1$ alors la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ x}$ n'est pas polynomiale (si c'était le cas, il existerait $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{e}^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ x} \underset{x \to +\infty}{\sim} a\ x^r$, ce qu'on peut écarter par calcul de limite).

$$\boxed{\text{Dans ce cas, la seule fonction polynomiale solution de } (*) \text{ est la fonction nulle (cas où } K = 0).}$$

□

e) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés. L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***25.a)*** :

$$L(e_0) = 1 \cdot e_0$$

Cela démontre que le réel 1 est valeur propre de L et que e_0 est un vecteur propre associé à cette valeur propre. En particulier : $\mathrm{Vect}\,(e_0) \subset E_1(L)$.

Par ailleurs, si f est vecteur propre de L associé à la valeur propre 1, alors :

× par définition de L, $f \in E_n$ (en particulier, f est une fonction polynomiale),

× d'après la question ***27***, f est solution de l'équation différentielle $(*)$.

D'après la question précédente, seules les fonctions constantes vérifient ces deux propriétés.

$$\boxed{\text{On en conclut que 1 est valeur propre de } L \text{ de sous-espace propre associé } \mathrm{Vect}\,(e_0).}$$

- Démontrons maintenant que L ne possède pas d'autre valeur propre. On procède par l'absurde.

Supposons que L admette une valeur propre $\lambda \neq 1$.

Soit f un vecteur propre associé à cette valeur propre. Comme vu dans l'item précédent, f est alors une fonction polynomiale solution de $(*)$. On en conclut, d'après la question précédente : $f = 0_{E_n}$ ce qui est impossible puisque f est une valeur propre.

$$\boxed{\text{Ainsi, le réel 1 est l'unique valeur propre de } L.}$$

- Comme $\mathrm{Sp}(L) = \{1\}$:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(L)} \dim\left(E_\lambda(L)\right) \ = \ \dim\left(E_1(L)\right) \ = \ \dim\left(\mathrm{Vect}\,(e_0)\right) \ = \ 1 \neq n+1 \ = \ \dim\left(E_n\right)$$

(rappelons que $n \geqslant 2$ et donc $n + 1 \neq 1$)

$$\boxed{\text{On en conclut que } L \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Commentaire

Il est aussi possible de démontrer que l'endomorphisme L n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde. Pour ce faire, on suppose que L est diagonalisable.

Alors la matrice $N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(L)$ est diagonalisable. Il existe donc :

× $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice inverisble.

× $D \in \mathscr{D}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de N (présentes avec multiplicité).

telles que :

$$\begin{aligned} N &= P \times D \times P^{-1} \\ &= P \times I_{n+1} \times P^{-1} \qquad \textit{(car } \mathrm{Sp}(L) = \{1\}\textit{)} \\ &= P \times P^{-1} \\ &= I_{n+1} \end{aligned}$$

On en conclut : $L = \mathrm{id}_{E_n}$ ce qui est absurde puisque :

$$L(e_1) = e_1 - e_0 \quad \textit{(d'après la question } \textbf{25.c)}\textit{)}$$

et $e_1 - e_0 \neq e_1 = \mathrm{id}_{E_n}(e_1)$.

□

Exercice 3

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J = \,]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![-1, p]\!]$, on définit les fonctions f_k sur J par :

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \ \text{ et } \forall k \in [\![0, p]\!],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}$$

***28.* Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions**

a) Soit $(a_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ des réels tels que $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k\, f_k$ est la fonction nulle.
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la fonction $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k \cdot f_k$ est la fonction nulle, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=-1}^{p} a_k \cdot f_k = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$$

  Autrement dit :

$$\forall x \in J,\ \sum_{k=-1}^{p} a_k\, f_k(x) = 0$$

- Soit $x \in J$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{p} a_k\, f_k(x) &= a_{-1}\, f_{-1}(x) + a_0\, f_0(x) + a_1\, f_1(x) + \cdots + a_p\, f_p(x) \\ &= a_{-1} \ln(1+x) + a_0 \frac{1}{(1+x)^0} + a_1 \frac{1}{(1+x)^1} + \cdots + a_p \frac{1}{(1+x)^p} \\ &= a_{-1} \ln(1+x) + a_0 + a_0 \frac{1}{1+x} + \cdots + a_p \frac{1}{(1+x)^p} \end{aligned}$$

En divisant de part et d'autre par $\ln(1+x)$ ($\neq 0$ si $x \neq 0$), on obtient pour tout $x \in J \setminus \{0\}$:

$$a_{-1} + a_0 \, \frac{1}{\ln(1+x)} + a_1 \, \frac{1}{(1+x) \; \ln(1+x)} + \cdots + a_p \, \frac{1}{(1+x)^p \; \ln(1+x)} = 0$$

On détermine enfin la limite de cette expression en $+\infty$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{-1} & + & a_0 \, \dfrac{1}{\ln(1+x)} & + & a_1 \, \dfrac{1}{(1+x) \; \ln(1+x)} & + & \cdots & + & a_p \, \dfrac{1}{(1+x)^p \; \ln(1+x)} & = & 0 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x \to +\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x \to +\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x \to +\infty} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle x \to +\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x \to +\infty} \\ a_{-1} & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } a_{-1} = 0.}$$

Commentaire

- Lorsqu'il faut montrer la liberté d'une famille de fonctions (cette question en est la première étape), il est relativement usuel :
  - × d'effectuer un calcul de limite,
  - × d'évaluer l'expression en certains points d'intérêt (généralement, on évalue en des points qui permettent d'annuler une grande partie de l'expression).

  On peut aussi penser à procéder à des dérivations successives. Le choix d'une technique ou d'une autre est lié à la forme des fonctions en présence.
- Lorsqu'on procède à l'aide d'un calcul de limite, on va chercher le terme dominant de la somme. Autrement dit, on détermine un équivalent de la somme des fonctions. Pour rédiger correctement, il est conseillé de procéder par l'absurde.
- Détaillons cette manière de faire. On procède par l'absurde.
  Supposons : $a_{-1} \neq 0$.
  - × Comme $a_{-1} \neq 0$, on obtient :

  $$\sum_{k=-1}^{p} a_k \, f_k(x) \;=\; a_{-1} \, \ln(1+x) + a_0 + \cdots + a_p \, \frac{1}{(1+x)^p} \underset{x \to +\infty}{\sim} a_{-1} \, \ln(1+x)$$

  - × De plus, d'après l'énoncé : $\forall x \in J$, $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k \, f_k(x) = 0$. On en déduit :

  $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{k=-1}^{p} a_k \, f_k(x) \right) \;=\; 0$$

  Or : $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k \, f_k(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_{-1} \, \ln(1+x)$. Et comme $a_1 \neq 0$:

  $$\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=-1}^{p} a_k \, f_k(x) \;=\; \lim_{x \to +\infty} a_{-1} \, \ln(1+x) \;=\; \pm\infty$$

  Absurde !

  On en déduit : $a_{-1} = 0$.

□

b) Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]}$ est libre.
On note $E = \text{Vect}(\mathscr{B})$.

Démonstration.
Soit $(a_{-1}, a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+2}$.
Supposons : $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k \cdot f_k = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$ $(*)$.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $a_{-1} = 0$.

$$\boxed{a_{-1} = 0}$$

- En réinjectant dans $(*)$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \cdot f_k \ = \ 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$$

Rappelons que par définition de f_0, …, f_p, pour tout $x \in J$:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\, f_k(x) \ = \ a_0 \, \frac{1}{(1+x)^0} + a_1 \, \frac{1}{(1+x)^1} + \cdots + a_p \, \frac{1}{(1+x)^p} \ = \ a_0 + \frac{a_1}{1+x} + \cdots + \frac{a_p}{(1+x)^p}$$

Par hypothèse de l'énoncé, on obtient :

$$a_0 + \frac{a_1}{1+x} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{(1+x)^{p-1}} + \frac{a_p}{(1+x)^p} \ = \ 0$$

On en déduit, en multipliant l'égalité précédente par $(1+x)^p$:

$$a_0\,(1+x)^p + a_1\,(1+x)^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\,(1+x) + a_p \ = \ 0$$

$$\boxed{\forall x \in J,\ a_0\,(1+x)^p + a_1\,(1+x)^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\,(1+x) + a_p \ = \ 0}$$

- Or :

$$\begin{aligned} & \forall x \in J,\ a_0\,(1+x)^p + a_1\,(1+x)^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\,(1+x) + a_p \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_0\,(1+X)^p + a_1\,(1+X)^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(1+X) + a_p \ = \ 0_{\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

De plus, la famille $\big((1+X)^p, (1+X)^{p-1}, \ldots, 1\big)$ est une famille de polynômes :

× non nuls,

× échelonnée en degré.

C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. La seule relation de dépendance linéaire sur les éléments de cette base est la relation triviale.

$$\boxed{\text{Ainsi : } a_0 = a_1 = \cdots = a_p}$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} = (f_k)_{k\in[\![-1,p]\!]} \text{ est donc libre.}}$$

Commentaire

- Pour démontrer la liberté d'une telle famille, on pouvait aussi procéder de manière itérative en démontrant tout d'abord $a_0 = 0$ puis $a_1 = 0$ et ainsi de suite.

  Détaillons cette manière de procéder.

  × Comme $a_{-1} = 0$, alors d'après $(*)$: $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k \cdot f_k = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$. Ainsi, pour tout $x \in J$:

  $$a_0 + \frac{a_1}{1+x} + \cdots + \frac{a_p}{(1+x)^p} = 0$$

  puis par calcul de limite :

  $$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & \dfrac{a_1}{1+x} & + & \cdots & + & \dfrac{a_p}{(1+x)^p} & = & 0 \\ {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow & & & & {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow \\ a_0 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

  On obtient : $a_0 = 0$.

  × On en déduit, d'après $(*)$: $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k \cdot f_k = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$. Ainsi, pour tout $x \in J$:

  $$\frac{a_1}{1+x} + \frac{a_2}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{a_p}{(1+x)^p} \ = \ 0$$

  En multipliant cette égalité par $(1+x)$:

  $$a_1 + \frac{a_2}{(1+x)} + \cdots + \frac{a_p}{(1+x)^{p-1}} = 0$$

  puis par calcul de limite :

  $$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & \dfrac{a_2}{(1+x)} & + & \cdots & + & \dfrac{a_p}{(1+x)^{p-1}} & = & 0 \\ {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow & & & & {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow & & {\scriptstyle x \to +\infty}\big\downarrow \\ a_1 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

  On obtient : $a_1 = 0$.

  × En procédant de façon similaire pour les coefficients suivants, on obtient :

  $$a_2 \ = \ a_3 \ = \ \cdots \ = \ a_p \ = \ 0$$

- La rédaction précédente sera évidemment acceptée aux concours même s'il serait plus rigoureux de procéder par récurrence (il est sage d'y penser lorsqu'un procédé itératif apparaît). Pour éviter cette rédaction itérative un peu lourde, on peut aussi mettre en place une technique un peu plus subtile. Détaillons-la ci-après.

Commentaire

On procède par l'absurde. On suppose qu'il existe $i \in [\![0, p]\!]$ tel que $a_i \neq 0$.
Dans ce cas, l'ensemble $I = \{i \in [\![0, p]\!] \mid a_i \neq 0\}$ est un ensemble fini non vide.
Il possède donc un plus petit élément qu'on peut noter $i_0 = \min\,(I)$.
(cela signifie en particulier $a_0 = \ldots = a_{i_0-1} = 0$)

On en déduit : $\sum\limits_{k=i_0}^{p} a_k \cdot f_k = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$. Ainsi, pour tout $x \in J$:

$$\frac{a_{i_0}}{(1+x)^{i_0}} + \frac{a_{i_0+1}}{(1+x)^{i_0+1}} + \cdots + \frac{a_p}{(1+x)^p} \ = \ 0$$

En multipliant cette égalité par $(1+x)^{i_0}$:

$$a_{i_0} + \frac{a_{i_0+1}}{1+x} + \cdots + \frac{a_p}{(1+x)^{p-i_0}} = 0$$

puis par calcul de limite en $+\infty$: $a_{i_0} = 0$, ce qui est absurde par définition de i_0. □

c) En déduire la dimension de E.

Démonstration.
La famille $\mathscr{B}$ est :

× libre d'après la question précédente,

× génératrice de E (par définition, $E = \text{Vect}\,(\mathscr{B})$).

C'est donc une base de E.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(E) = \text{Card}(\mathscr{B}) = p + 2.}$$

□

29. On note u l'application qui à toute fonction de E associe la fonction g définie sur J par :

$$\forall x \in J, \ g\,(x) = (1+x)\, f'\,(x)$$

Commentaire

- Le concepteur a décidé d'introduire la notation g certainement pour insister sur le fait que u est une application qui renvoie une fonction.
- Cependant, cette notation peut dérouter. La fonction obtenue comme image de la fonction f par l'application u n'est autre que la fonction $u(f)$ qui est définie par :

$$\forall x \in J, \ \big(u(f)\big)(x) = (1+x)\, f'(x)$$

a) Déterminer, pour $k \in [\![-1, p]\!]$, les images de f_k par u.

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $x \in J$:

$$\Big(u(f_{-1})\Big)(x) \ = \ (1+x)\, f'_{-1}(x) \ = \ (1+x) \times \frac{1}{1+x} \ = \ 1 \ = \ f_0(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in J, \ \Big(u(f_{-1})\Big)(x) = f_0(x), \text{ ce qui signifie : } u(f_{-1}) = f_0.}$$

- Ensuite, pour tout $x \in J$:

$$\Big(u(f_0)\Big)(x) \;=\; (1+x)\, f_0'(x) \;=\; (1+x) \times 0 \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in J,\ \Big(u(f_0)\Big)(x) = 0, \text{ ce qui signifie : } u(f_0) = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}.}$$

- Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Soit $x \in J$.

$$\Big(u(f_k)\Big)(x) \;=\; (1+x)\, f_k'(x) \;=\; (1+x) \times (-k)\, \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \;=\; (-k)\, \frac{1}{(1+x)^k} \;=\; (-k)\, f_k(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1,p]\!],\ u(f_k) = (-k) \cdot f_k.}$$

□

b) Vérifier que u est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que u est linéaire.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $(h_1, h_2) \in E \times E$.
Pour tout $x \in J$:

$$\begin{aligned}
\Big(u\Big(\boxed{\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2}\Big)\Big)(x) &= (1+x)\Big(\boxed{\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2}\Big)'(x) \\
&= (1+x)\big(\lambda_1 \cdot h_1' + \lambda_2 \cdot h_2'\big)(x) && \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\
&= (1+x)\,\big(\lambda_1\, h_1'(x) + \lambda_2\, h_2'(x)\big) && \textit{(par linéarité de l'évaluation en } x\textit{)} \\
&= \lambda_1\,(1+x)\, h_1'(x) + \lambda_2\,(1+x)\, h_2'(x) \\
&= \lambda_1\, u(h_1)(x) + \lambda_2\, u(h_2)(x) \\
&= \Big(\lambda_1 \cdot u(h_1) + \lambda_2 \cdot u(h_2)\Big)(x)
\end{aligned}$$

On a démontré : $\forall x \in J,\ (u\,(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2))\,(x) = \Big(\lambda_1 \cdot u(h_1) + \lambda_2 \cdot u(h_2)\Big)(x)$. Ainsi :

$$u\,(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda_2 \cdot h_2) \;=\; \lambda_1 \cdot u(h_1) + \lambda_2 \cdot u(h_2)$$

$$\boxed{\text{L'application } u \text{ est donc bien linéaire.}}$$

- Démontrons : $u(E) \subset E$.
Comme $\mathscr{B} = (f_k)_{k \in [\![-1,p]\!]}$ est une base de E d'après la question ***28c***, il suffit pour cela de démontrer :

$$\forall k \in [\![-1,p]\!],\ \ u(f_k) \in E$$

D'après la question précédente :
  - × tout d'abord : $u(f_{-1}) = f_0$. Donc : $u(f_{-1}) \in E$.
  - × ensuite : $u(f_0) = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$. Donc : $u(f_0) \in E$.
  - × enfin, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$: $u(f_k) = (-k) \cdot f_k$. Donc : $u(f_k) \in E$.

$$\boxed{\text{Finalement, l'application linéaire } u \text{ est bien à valeurs dans } E. \text{ Cette application est donc bien un endomorphisme de } E.}$$

□

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $\mathrm{Im}(u)$.
Comme E est de dimension finie et $\mathscr{B}$ est une de ses bases d'après ***28c***, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\left(u(f_{-1}), u(f_0), u(f_1), \ldots, u(f_p)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(f_0, \cancel{0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}}, -f_1, \ldots, (-p)\cdot f_p\right) \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{29a}}\textit{)} \\
&= \mathrm{Vect}\left(f_0, -f_1, \ldots, (-p)\cdot f_p\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, \ldots, f_p\right)
\end{aligned}$$

La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_p)$ est donc :
× génératrice de $\mathrm{Im}(u)$, d'après ce qui précède,
× libre, car elle est une sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est une famille libre de E (puisque $\mathscr{B}$ est une base de E).
C'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

$$\boxed{\text{La famille } (f_0, f_1, \ldots, f_p) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(u).}$$

- Déterminons maitnenant $\mathrm{Ker}(u)$.
× Comme E est de dimension finie, par théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}(u)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(u)\right)$$

Or :
- d'après ***28c*** : $\dim(E) = p+2$,
- d'après le point précédent : $\dim\left(\mathrm{Im}(u)\right) = \mathrm{Card}\left((f_0, f_1, \ldots, f_p)\right) = p+1$.

Ainsi :

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(u)\right) = \dim(E) - \dim\left(\mathrm{Im}(u)\right) = (p+2)-(p+1) = 1$$

× De plus, d'après ***29a*** : $u(f_0) = 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$. Ainsi : $f_0 \in \mathrm{Ker}(u)$.
× La famille (f_0) est donc :
- une famille libre de $\mathrm{Ker}(u)$, car elle est constituée uniquement d'un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$,
- telle que : $\mathrm{Card}\left((f_0)\right) = 1 = \dim\left(\mathrm{Ker}(u)\right)$.

C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

$$\boxed{\text{La famille } (f_0) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(u).}$$

Commentaire

- Dans la première partie de la question, on démontre :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1, \ldots, f_p\right)$$

Dès lors, on répond à la question demandée à savoir déterminer $\mathrm{Im}(u)$. On démontre de plus que la famille $\left(f_0, f_1, \ldots, f_p\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Cela ne fait pas partie stricto sensu de l'objectif de la question mais est utile pour obtenir la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ ce qui permet de traiter plus efficacement la deuxième partie de la question.

- On peut faire une remarque similaire pour le noyau de u. On démontre : $f_0 \in \mathrm{Ker}(u)$ ce qui permet de conclure : $\mathrm{Vect}\left(f_0\right) \supset \mathrm{Ker}(u)$ et enfin $\mathrm{Vect}\left(f_0\right) = \mathrm{Ker}(u)$ par égalité des dimensions de ces deux espaces.

□

d) Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.

Commentaire

- Soit B un sous-ensemble de E. On rappelle que la notation $u^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de B par E et est l'ensemble défini par :
$$u^{-1}(B) \;=\; \{h \in E \mid u(h) \in B\}$$
Ainsi, pour tout $h \in E$:
$$h \in u^{-1}(B) \;\Leftrightarrow\; u(h) \in B$$
- Notons que l'application u n'a nul besoin d'être bijective pour que l'ensemble $u^{-1}(B)$ soit bien défini.
C'est d'ailleurs bien heureux pour l'application u définie dans cet exercice puisque, d'après la question précédente : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(f_0) \neq \{0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}\}$. Ainsi, l'application u n'est pas injective, et donc pas bijective.

Démonstration.

- Soit $h \in E$.
$$h \in u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big) \;\Leftrightarrow\; u(h) \in \{f_{-1}\} \;\Leftrightarrow\; u(h) = f_{-1}$$
- Démontrons en raisonnant par l'absurde : $u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big) = \varnothing$.
On procède par l'absurde.
Supposons : $u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big) \neq \varnothing$. Alors il existe $h_0 \in u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big)$.
  × D'après le point précédent : $u(h_0) = f_{-1}$. Ainsi : $f_{-1} = u(h_0)$ et $f_{-1} \in \mathrm{Im}(u)$.
  × Or, d'après la question précédente : $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_p)$. Ainsi :
$$f_{-1} \;\in\; \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_p)$$
Autrement dit, le vecteur f_{-1} est combinaison linéaire de f_0, f_1, ..., f_p. On en déduit que la famille $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_p)$ est liée.
Absurde ! (d'après ***28b***)

$$\boxed{\text{On en conclut : } u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big) = \varnothing.}$$

Commentaire

- Il est énoncé dans le cours le résultat suivant.
Si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et si $f \in \mathscr{L}(E,F)$:
$$G \text{ est un sous-espace vectoriel de } F \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(G) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$
Autrement dit, l'image réciproque d'un espace vectoriel par une application linéaire est un espace vectoriel.
- Dans cette question, on démontre que l'image réciproque $u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big)$ de l'ensemble $\{f_{-1}\}$ est l'ensemble vide, ce qui `N`'est `PAS` un espace vectoriel. Rappelons qu'un espace vectoriel est toujours un ensemble non vide car doit contenir l'élément neutre (ici $0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$). Le fait que $u^{-1}\big(\{f_{-1}\}\big)$ ne soit pas un espace vectoriel peut paraître surprenant au premier abord. Cependant, cela n'entre pas en contradiction avec le résultat du cours puisque l'ensemble $\{f_{-1}\}$ n'est lui-même pas un espace vectoriel (en effet : $0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})} \notin \{f_{-1}\}$). □

e) Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- D'après ***29a*** :

$$u(f_{-1}) \quad = \quad f_0 \quad = \quad 0 \cdot f_{-1} + 1 \cdot f_0 + 0 \cdot f_1 + \cdots + 0 \cdot f_p$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u(f_{-1})\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Toujours d'après ***29a*** :

$$u(f_0) \quad = \quad 0_{\mathcal{F}(J,\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u(f_0)\big) = 0_{\mathscr{M}_{p+2,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

- Enfin, d'après ***29a***, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$u(f_k) \quad = \quad (-k) \cdot f_k \quad = \quad 0 \cdot f_{-1} + 0 \cdot f_0 + \cdots + 0 \cdot f_{k-1} + (-k) \cdot f_k + 0 \cdot f_{k+1} + \cdots + 0 \cdot f_p$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1, p]\!] : \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u(f_k)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ (k+2)^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & -k & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & 0 & -(p-1) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.}$$

□

f) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- La matrice M est triangulaire (inférieure). Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right) = \{0, -1, -2, \ldots, -p\}.}$$

- Déterminons maintenant la dimension des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
  - × Rappelons tout d'abord que pour toute valeur propre λ de l'endomorphisme u :
$$1 \leqslant \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leqslant m_\lambda(u)$$
où $m_\lambda(u)$ est la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique $\chi_u(X)$.
De plus :
$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \chi_M(X) \\ &= \det\Big(X\ I_{p+2} - M\Big) \\ &= X^2\ (X+1)\ (X+2)\ \ldots\ \big(X+(p-1)\big)\ (X+p) \end{aligned}$$
On en déduit, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:
$$1 \leqslant \dim\big(E_{-k}(u)\big) \leqslant m_{-k}(u) = 1$$
$$\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!],\ \dim\big(E_{-k}(u)\big) = 1}$$
  - × Finalement :
$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) &= \sum_{k=0}^{p} \dim\big(E_{-k}(u)\big) \\ &= \dim\big(E_0(u)\big) + \sum_{k=1}^{p} \dim\big(E_{-k}(u)\big) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p} 1 \qquad \textit{(car } \dim\big(E_0(u)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}\, u\big) = 1 \textit{ comme démontré en question } \textbf{29c}\textit{)} \\ &= 1 + p \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Comme } \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = p+1 \neq p+2 = \dim(E), \\ \text{l'endomorphisme } u \text{ n'est pas diagonalisable.}\end{array}}$$

Commentaire

- On pouvait procéder de manière plus subtile. Détaillons cette autre méthode qui n'était pas dans l'esprit du sujet mais qui est intéressante en elle-même.
- On procède par l'absurde. On suppose u diagonalisable.
Comme $F = \mathrm{Vect}\,(f_{-1}, f_0)$ est stable par u, l'endomorphisme induit sur ce sous-espace vectoriel, noté $u_{||F}$, est lui-même diagonalisable (comme u est diagonalisable, cet endomorphisme admet un polynôme annulateur scindé à racines simples Q et on peut démontrer que Q est aussi un polynôme annulateur de $u_{||F}$). En notant $\mathscr{B}_F = \mathrm{Vect}\,(f_{-1}, f_0)$, on obtient :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(u_{||F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On démontre alors que cette matrice `N'est PAS` diagonalisable (si elle l'était elle serait semblable et donc égale à la matrice nulle). Absurde !

$\square$

g) `(UNIQUEMENT POUR LES 5/2)`
L'endomorphisme u^2 est il diagonalisable ?

Démonstration.
Remarquons :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u^2\big) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u \circ u\big) \\
& = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u\big) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u\big) \\
& = & \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & & & & & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
0 & 0 & & & 0 & k^2 & 0 & & & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & & & & & & 0 & (p-1)^2 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & p^2
\end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(u^2\big)$ étant diagonale, elle est, en particulier, diagonalisable. Il en est donc de même de u^2.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'endomorphisme } u^2 \text{ est bien diagonalisable.}}$$

$\square$

30. Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) : $f_{-1}\,(t) = (1+t)\, y'\,(t)$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que l'équation (ED) se réécrit sur $J = \,]-1, +\infty[$:

$$y'(t) \;=\; \frac{\ln\big(1+t\big)}{1+t}$$

Il s'agit donc uniquement de déterminer les primitives de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln\big(1+t\big)}{1+t}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } (ED) \text{ est } \left\{ t \mapsto \frac{1}{2}\Big(\ \ln(1+t)\ \Big)^2 + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}}$$

$\square$