DS3

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.
Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1 : Endomorphisme cyclique

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

- On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\big(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\big)$ soit une base de l'espace vectoriel E.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(f)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_\lambda(f) \ = \ \{\, x \in E \mid (f - \lambda\, \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \,\}$$

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable (*aucune connaissance sur ce terme n'est requise*) soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer $E_2(f)$ et $E_3(f)$.

3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{ld}_{\mathbb{R}^3}$.

5. ***a)*** Déterminer $E_{-1}(g)$ et $E_2(g)$.

b) Démontrer : $\mathbb{R}^3 = E_{-1}(g) \oplus E_2(g)$.

6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$

7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose également qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que :

× d'une part : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $v_k \neq 0_E$,

× d'autre part, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que : $h(v_k) = \lambda_k \cdot v_k$.

Soit $v \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p \cdot v_n$$

12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

13. On suppose dans cette question que les nombres complexes λ_1, …, λ_n sont deux à deux distincts.
Démontrer que l'endomorphisme h est cyclique.
Indication : on pourra considérer le vecteur $v = v_1 + \cdots + v_n$.

EXERCICE 2 : Un jeu de société

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu.

À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;

2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

Par exemple, si on considère la case $A = 10$, que $M = 10$ et que l'ordinateur génère successivement les numéros :

$$2,\ 3,\ 2,\ 0,\ 7,\ 1,\ 8, \dots$$

- la variable aléatoire X_1 prend la valeur 2, X_2 la valeur 3, X_3 la valeur 2, X_4 la valeur 0, X_5 la valeur 7, X_6 la valeur 1, X_7 la valeur 8, ... ;
- la variable aléatoire S_1 prend la valeur 2, S_2 la valeur 5, S_3 la valeur 7, S_4 la valeur 7, S_5 la valeur 14, S_6 la valeur 15, S_7 la valeur 23, ... ;
- la variable T prend la valeur 5.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Que modélisent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

15. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

16. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in\,]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $h_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $h_n : x \mapsto x^n$.
En admettant qu'on peut dériver successivement terme à terme la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} h_n$, démontrer :

$$\forall x \in\,]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n \;=\; \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

19. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

20. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $\{T = k\}$ en fonction des évènements $\{S_{k-1} = A - 1\}$ et $\{X_k = 1\}$. En déduire :

$$\mathbb{P}\big(\{T = k\}\big) \;=\; \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

21. Calculer $\mathbb{P}\big(\{T = 0\}\big)$.

Il.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} \mathbb{P}\big(\{T = k\}\big) x^k$ sur son intervalle de convergence.

22. `(5/2 UNIQUEMENT)`
Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} \mathbb{P}\big(\{T = k\}\big) x^k$ et démontrer :

$$\forall x \in\,]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A$$

23. `(5/2 UNIQUEMENT)`
En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $\mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} \;=\; \binom{n+1+k}{n+1}$$

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En considérant le système complet d'évènements $\Big(\{X_{n+1}=0\}, \dots, \{X_{n+1}=M-1\}\Big)$, démontrer :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{S_{n+1} \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k-\ell\}\big)$$

25. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad \mathbb{P}\big(\{S_n \leqslant k\}\big) = \frac{1}{M^n} \binom{n+k}{n}$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

26. **Un résultat préliminaire**
Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Supposons que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}\big(\{Z>n\}\big)$ converge.

a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}\big(\{Z=j\}\big) = \mathbb{P}\big(\{Z>j-1\}\big) - \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big)$$

b) Soit p un entier naturel non nul. Démontrer :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}\big(\{Z=j\}\big) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big) - p\,\mathbb{P}\big(\{Z>p\}\big)$$

c) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big)$$

d) Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}\big(\{Z=j\}\big)$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z>j\}\big)$.

e) En déduire que Z admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{Z>n\}\big)$$

27. Que peut-on dire des évènements $\{T>n\}$ et $\{S_n<A\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

EXERCICE 3 : Une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$f_n : x \mapsto \frac{n+2}{n+1}\,\mathrm{e}^{-n\,x^2} \cos\big(\sqrt{n}\,x\big)$$

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à déterminer.

2. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

4. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?