DS3 - A

Problème 1 : Autour de la fonction sinus cardinal

Objectifs

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie I** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie II** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie I** comme limite d'une suite d'intégrales.

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-tx}\, dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin(t)\, dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(t)\, dt$$

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
(on pourra calculer $H(x) + iG(x)$)
En déduire, pour $\alpha \in\ ]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \cos(\alpha t)\, dt$.

6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Partie II - Autour de la formule de Viète

7. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

8. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right)$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$$

9. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \right)$$

10. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \mathrm{e}^{-tx}\, dt \right)$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[,\ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}\, t\right) \mathrm{e}^{-tx}$$

11. En déduire :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} \left(2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right)$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

12. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \right)$$

en écrivant cette quantité à l'aide une somme de Riemann.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leqslant \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

14. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question ***11***.

Problème 2 : Les matrices de Kac

Notations et définitions

- Dans toute la suite, on note $\mathbb{K}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles carrées d'ordre n et $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales carrées d'ordre n
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !
- On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Plus précisément, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que : $A = P\,D\,P^{-1}$. Dans le cas où D et P sont à coefficients réels, on dira que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$; on dira qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si l'une de ces deux matrices contient un coefficient qui n'est pas réel.
- On appelle spectre réel d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\, I_3 - A)$. On définit de manière similaire l'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$) sont appelées les valeurs propres réelles (resp. complexes) de A.
- On appelle **sous-espace propre** de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble :

  $$E_\lambda(A) = \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda\, I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} = \mathrm{Ker}\left(A - \lambda\, I_n\right)$$

  On pourra par ailleurs utiliser le fait que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

  $$1 \leqslant \dim_{\mathbb{K}}\left(E_\lambda(A)\right) \leqslant n$$

Résultats admis

- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser les **conditions suffisantes** suivantes :
  - si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  - si A possède exactement n valeurs propres dans $\mathbb{K}$, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la **condition nécessaire et suffisante** suivante :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) = n}$$

On pourra enfin remarquer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \leqslant n$.

15. **Un petit résultat**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que A et B sont semblables.

Démontrer que si B est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors A l'est aussi.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\, I_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

17. ***a)*** En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.

18. ***a)*** Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Vérifier : $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

19. ***a)*** La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

b) Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$$

20. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

21. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

- Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x)\ \sin^{n-k}(x)$$

- On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n \ = \ \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \ldots, f_n) \ = \ \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\ f_k \ \middle|\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$$

22. ***a)*** Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

b) En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

23. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n & : & V_n & \to & V_n \\ & & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = \mathrm{e}^{i(2k-n)x}$.

24. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = \Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^k\ \Big(\cos(x) - i\sin(x)\Big)^{n-k}$.

25. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ g_k \in V_n$.

26. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable.
Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

27. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

28. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et en déduire :

$$\mathrm{Ker}\,(B_n \ - \ in\, I_{n+1}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right)$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k} \dbinom{n}{k}$.