

## DS3 - A

### PROBLÈME 1 : Autour de la fonction sinus cardinal

#### Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour  $x > 0$ , on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt$$

1. Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t$ .

- 1 pt :  $\sin$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et :  $\forall x \in ]0, +\infty[, |\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$
- 1 pt :  $\forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[, |\sin(y) - \sin(x)| \leq 1 \times |y - x|$
- 1 pt : on applique l'inégalité (\*) en  $x = t$  et  $y = 0$

2. Montrer que les fonctions  $F, G$  et  $H$  sont bien définies sur  $]0, +\infty[$ .

- 2 pts : la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$  est définie sur  $]0, +\infty[$ 
  - × 1 pt :  $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et prolongeable par continuité en 0
  - × 1 pt :  $\left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \right| \leq e^{-xt} +$  théorème de comparaison des intégrales généralisées
  - 1 pt :  $|\sin(t) e^{-xt}| = \dots \leq e^{-xt} +$  théorème de comparaison ( $G$  définie sur  $]0, +\infty[$ )
  - 1 pt :  $|\cos(t) e^{-xt}| = \dots \leq e^{-xt} +$  théorème de comparaison ( $H$  définie sur  $]0, +\infty[$ )

3. Montrer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .

- 2 pts : Existence d'une limite finie - étude « en  $x$  »
  - × 1 pt : Pour tout  $t \in ]0, +\infty[, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} = 0$
  - × 1 pt : la fonction  $\ell : t \mapsto 0$  est continue (par morceaux) sur  $]0, +\infty[$ .
- 2 pts : Intégrabilité (par domination) - étude « en  $t$  »
  - × 1 pt : Pour tout  $x \in ]1, +\infty[,$  la fonction  $t \mapsto \underline{f}_t(x)$  est continue (p. m.) sur  $]0, +\infty[$ .
  - × 1 pt :  $\left| \underline{f}_t(x) \right| \leq e^{-t}$  et  $\varphi : t \mapsto e^{-t}$  intégrable sur  $]0, +\infty[$

4. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $F'$  à l'aide de la fonction  $G$ .

- 1 pt : Caractère  $\mathcal{C}^1$  - étude « en  $x$  »
  - × 1 pt : pour tout  $t \in ]0, +\infty[,$  la fonction  $\underline{f}_t : x \mapsto \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$
  - × 0 pt :  $\underline{f}'_t(x) = \frac{\sin(t)}{t} (-t e^{-tx}) = -\sin(t) e^{-tx}$

- 4 pts : Intégrabilité (par domination) - étude « en  $t$  »

× 1 pt : pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \underline{f}_t^{(0)}(x) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$  intégrable sur  $]0, +\infty[$

× 1 pt : pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \underline{f}_t'(x)$  est continue (p. m.) sur  $]0, +\infty[$

× 2 pts :  $\left| \underline{f}_t'(x) \right| = \left| -\sin(t) e^{-xt} \right| = | -1 | |\sin(t)| |e^{-xt}| = |\sin(t)| e^{-xt} \leq e^{-at}$   
et  $\varphi : t \mapsto e^{-at}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$

5. Trouver une expression simple pour  $G$  et pour  $H$ .

(on pourra calculer  $H(x) + iG(x)$ )

En déduire, pour  $\alpha \in ]0, +\infty[$ , la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$ .

• 1 pt :  $H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt = \frac{1}{i-x} [e^{it} e^{-xt}]_0^{+\infty}$

• 1 pt :  $|e^{it} e^{-xt}| = |e^{it}| |e^{-xt}| = e^{-xt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

• 1 pt :  $H(x) + iG(x) = \frac{x}{1+x^2} + i \frac{1}{1+x^2}$

• 1 pt : changement de variable  $u = \alpha t$  SOUS RÉSERVE DE CONVERGENCE

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt = \int_0^{+\infty} \cos(u) e^{-\frac{1}{\alpha} u x} \times \frac{1}{\alpha} du = \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

• 1 pt :  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \dots = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$

6. En déduire une expression simple pour  $F$ . Que vaut  $F(1)$  ?

• 0 pt :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'(x) = -G(x) = \frac{1}{1+x^2}$

• 1 pt : ainsi il existe  $c \in \mathbb{R}$  tq :  $\forall x > 0$ ,  $F(x) = -\arctan(x) + c$  et donc  $c = F(x) + \arctan(x)$

• 1 pt :  $c = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) + \arctan(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

• 1 pt : ainsi  $\forall x > 0$ ,  $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$  et  $F(1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} (= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} dt)$

## Partie II - Autour de la formule de Viète

7. Montrer que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

• 0 pt : Soit  $t > 0$ . Par réc :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$

• 1 pt : intialisation  $\frac{\sin(t)}{2^1 \sin\left(\frac{t}{2^1}\right)} = \frac{\sin\left(2 \frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

• 1 pt :  $\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$  par HR

• 1 pt :  $= \frac{\sin(t)}{2^n \times 2 \sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \cancel{\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}} \times \cancel{\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$

8. Montrer que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \left( \cos(a+b) + \cos(a-b) \right)$$

• 1 pt : initialisation  $\frac{1}{2^{1-1}} \sum_{k=1}^{2^{1-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1} t\right) = \frac{1}{2^0} \sum_{k=1}^1 \cos\left(\frac{2k-1}{2} t\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

• 1 pt :  $\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$  par HR

• 1 pt :  $= \dots = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left( \cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}} t\right) + \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}} t\right) \right)$

• 1 pt :  $\frac{1}{2^{(n+1)-1}} \sum_{k=1}^{2^{(n+1)-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right) = \frac{1}{2^n} \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right) \right)$

• 1 pt :  $= \frac{1}{2^n} \left( \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2(2j)-1}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{\ell=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2(\ell-1)-1}{2^{n+1}} t\right) \right)$

9. En déduire que pour tout  $t > 0$  :

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \right)$$

• 1 pt : en combinant les résultats précédents :  $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$

• 1 pt :  $\frac{\sin(t)}{2^n \times \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{2^n \times \frac{t}{2^n}} = \frac{\sin(t)}{t}$

10. Montrer que pour tout  $x > 0$  :

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} x \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} dt \right)$$

On pourra introduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}$$

• 0 pt : l'idée est d'écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$

• 2 pts : Existence d'une limite finie - étude « en  $n$  »

× 1 pt : pour  $t_0 > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t_0\right) \times e^{-t_0 x} \right) = \frac{\sin(t_0)}{t_0} \times e^{-t_0 x}$

× 1 pt : la fonction  $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \times e^{-tx}$  est continue (par morceaux) sur  $]0, +\infty[$

- 3 pts : Intégrabilité (par domination) - étude « en  $t$  »

× 0 pt : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

× 1 pt :  $|f_n(t)| = \left| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \times e^{-xt} \right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \times e^{-xt} \right|$

× 1 pt :  $= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left| \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \right| \times e^{-xt} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} e^{-xt} = \frac{1}{2^{n-1}} \left( \cancel{2^{n-1}} e^{-xt} \right)$

× 1 pt : la fonction  $t \mapsto e^{-xt}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  en tant qu'intégrale de référence de paramètre  $x > 0$

11. En déduire :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right)$$

• 1 pt :  $\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-t} dt = \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + 1^2} = \frac{(2^n)^2}{(2^n)^2 \left(\frac{(2k-1)^2}{(2^n)^2} + 1\right)} = \frac{2^{2n}}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$

• 1 pt : ainsi  $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-t} dt = 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}$

• 1 pt :  $\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-t} dt \right)$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

12. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \right)$$

en écrivant cette quantité à l'aide une somme de Riemann.

• 1 pt :  $2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{2^{n+1}}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2 + 1}$

• 0 pt : on définit pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 1}$  et la fonction  $h : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$

• 1 pt :  $h$  continue sur  $[0, 1]$ , donc  $(S_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  convergente et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} T_m = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$

• 1 pt :  $2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}} + T_{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$

13. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$  :

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

• 1 pt :  $\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| = \frac{|-4k+1|}{|4k^2 + 2^{2n}| |(2k-1)^2 + 2^{2n}|}$

• 1 pt :  $\leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{(4k^2 + 2^{2n}) ((2k-1)^2 + 2^{2n})}$

• 1 pt :  $\frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \leq \frac{1}{1 + 2^{2n}}$

14. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question 11.

- 1 pt :  $\left| 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) \right| \leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right|$
- 1 pt :  $\leq 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{(4k^2 + 2^{2n})(1 + 2^{2n})} = \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \left( 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \right)$
- 1 pt :  $\frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \left( 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi}{4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$
- 0 pt :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right)$
- 1 pt :  $2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} = \left( 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \right) - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{\pi}{4} - 0$

## PROBLÈME 2 : Les matrices de Kac

### Notations et définitions

- Dans toute la suite, on note  $\mathbb{K}$  pour désigner l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou l'ensemble  $\mathbb{C}$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  désigne l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices inversibles carrées de taille  $n$ .
- La lettre  $i$  désigne le nombre complexe usuel vérifiant  $i^2 = -1$ .  
On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage!
- On dit qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Plus précisément, une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si il existe  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tels que :  $A = P D P^{-1}$ . Dans le cas où  $D$  et  $P$  sont à coefficients réels, on dira que la matrice  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ ; on dira qu'elle est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  si l'une de ces deux matrices contient un coefficient qui n'est pas réel.
- On appelle spectre réel d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et on note  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$  l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = \det(X I_3 - A)$ . On définit de manière similaire l'ensemble  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ . Les éléments de  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$  (resp.  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ) sont appelées les valeurs propres réelles (resp. complexes) de  $A$ .
- On appelle **sous-espace propre** de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'ensemble :

$$E_{\lambda}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I_n) \times U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

On pourra par ailleurs utiliser le fait que pour toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$1 \leq \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda}(A)) \leq n$$

### Résultats admis

- Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on pourra utiliser les **conditions suffisantes** suivantes :
  - × si  $A$  est symétrique réelle, alors  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .
  - × si  $A$  possède exactement  $n$  valeurs propres dans  $\mathbb{K}$ , alors elle est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ .

- Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on pourra utiliser la **condition nécessaire et suffisante** suivante :

La matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K} \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda}(A)) = n$

On pourra enfin remarquer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \dim_{\mathbb{K}}(E_{\lambda}(A)) \leq n$ .

**15. Un petit résultat**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Démontrer que si  $B$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  alors  $A$  l'est aussi.

- **1 pt** :  $A$  et  $B$  sont semblables, il existe une matrice  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que :  $A = QBQ^{-1}$
- **1 pt** :  $B$  diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ , il existe  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  telle que :  $B = PDP^{-1}$
- **1 pt** :  $A = QBQ^{-1} = Q(P D P^{-1})Q^{-1} = (QP) D (QP)^{-1}$

**Partie I - La dimension 3**

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 16.** Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_A(X) = \det(X I_3 - A)$  de  $A$  et le décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

- **1 pt** :  $\chi_A(X) = \det(X I_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1) \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ 0 & -2+X^2 & -2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$
- **1 pt** :  $= (-1) \frac{1}{2} \times (-1)^{1+1} (-2) \times \begin{vmatrix} -2+X^2 & -2X \\ -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} -2+X^2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = X \left( ((-2+X^2) \times 1) - ((-1) \times (-2)) \right) = X(-4+X^2) = X(X-2)(X+2)$

- 17. a)** En déduire que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

- **1 pt** :  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, 0, 2\}$
- **1 pt** :  $A$  est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres réelles distinctes. Elle est donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$

- b)** Donner la liste des valeurs propres de  $A$  et la dimension des espaces propres correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de  $A$  dans cette question.

- **1 pt** : pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda}(A)) \geq 1$
- **1 pt** : par l'absurde, si l'un des sous-espaces propres de dimension  $> 1$ ,  $\dim_{\mathbb{R}}(E_{-2}(A)) + \dim_{\mathbb{R}}(E_0(A)) + \dim_{\mathbb{R}}(E_2(A)) \geq 2 + 1 + 1 = 4$ , absurde !

- 18. a)** Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_B$  de  $B$  et le décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .

- **1 pt** :  $\chi_B(X) = \det(X I_3 - B) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1) \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ 0 & 2+X^2 & 2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$

• **1 pt** :  $(-1)^{\frac{1}{2}} \times (-1)^{1+1} (-2) \times \begin{vmatrix} 2+X^2 & 2X \\ -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 2+X^2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$   
 $= X \left( (2+X^2) \times 1 - ((-1) \times 2) \right) = X (4+X^2) = X (X-2i)(X+2i)$

b) Vérifier :  $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$ .

• **1 pt** :  $i\chi_B(iX) = i \left( (iX)((iX)-2i)((iX)+2i) \right) = i \times (i \times i \times i) (X(X-2)(X+2)) = \chi_A(X)$

19. a) La matrice  $B$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ ? Est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ?

• **1 pt** :  $B$  est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres complexes distinctes. Ainsi  $B$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$

• **2 pts** :  $E_0(B) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

• **1 pt** :  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul et génératrice de  $E_0(B)$ . C'est donc une base de  $E_0(B)$  et  $\dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda}(B)) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 1$

• **0 pt** :  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(B)} \dim_{\mathbb{R}}(E_{\lambda}(B)) = \dim_{\mathbb{R}}(E_0(B)) = 1 \neq 3$  donc  $B$  non diagonalisable

b) Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de  $B$  et la dimension des espaces propres sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de  $B$  dans cette question.

• **1 pt** :  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$  et  $\dim_{\mathbb{R}}(E_0(B)) = 1$

• **1 pt** : comme déjà fait  $\dim_{\mathbb{C}}(E_0(B)) = \dim_{\mathbb{C}}(E_{-2i}(B)) = \dim_{\mathbb{C}}(E_{2i}(B)) = 1$

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

20. Exprimer  $D^{-1}AD$  à l'aide de la matrice  $B$ .

• **1 pt** :  $D^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

• **1 pt** :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$

• **1 pt** :

Soit  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

21. Calculer  $\Delta^{-1}A\Delta$ . En déduire à nouveau que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

• **1 pt** :  $\Delta^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

• **1 pt** :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

## Partie II - Étude d'un endomorphisme

### Objectifs

- Dans cette partie, on introduit la matrice  $B_n$  et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel fixé. Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x)$$

- On note  $V_n$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$$

22. a) Montrer que la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  est libre.

- 1 pt :
- 1 pt :
- 1 pt :

b) En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe  $V_n$ .

- 1 pt :
- 1 pt :
- 1 pt :

23. Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , montrer que  $f'_k \in V_n$ . En déduire :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\rightarrow V_n \\ f &\mapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

définit un endomorphisme de  $V_n$  et que sa matrice  $B_n$  dans la base  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$ .

24. Montrer :  $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = \left( \cos(x) + i \sin(x) \right)^k \left( \cos(x) - i \sin(x) \right)^{n-k}$ .

- 1 pt :
- 1 pt :
- 1 pt :

25. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g_k \in V_n$ .

- 1 pt :
- 1 pt :
- 1 pt :



26. Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , calculer  $g'_k$ . En déduire que  $\varphi_n$  est diagonalisable.

Donner la liste des valeurs propres complexes de  $\varphi_n$  et décrire les espaces propres correspondants.

• 1 pt :

• 1 pt :

• 1 pt :

27. Pour quelles valeurs de  $n$  l'endomorphisme  $\varphi_n$  est-il un automorphisme de  $V_n$  ?

• 1 pt :

• 1 pt :

• 1 pt :

28. Écrire la décomposition de  $g_n$  dans la base  $(f_0, \dots, f_n)$  et en déduire :

$$\text{Ker}(B_n - in I_{n+1}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \right)$$

où pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$ .

• 1 pt :

• 1 pt :

• 1 pt :