DS3 - B

Problème 1

Présentation générale

- L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phénomène de Gibbs.
- **Notations, rappels et théorème admis** :
  - × $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
  - × pour tout intervalle réel I et toute fonction $f : I \to \mathbb{C}$ **bornée** sur I, on pourra noter :

$$\|f\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} \left| f(x) \right|$$

On rappelle que $\sup_{x\in I} \left| f(x) \right|$ est la borne supérieure de l'ensemble $\{\left| f(x) \right| \mid x \in I\}$. En particulier, c'est un majorant de cet ensemble ce qui permet d'affirmer :

$$\forall x \in I, \left| f(x) \right| \leqslant \sup_{x\in I} \left| f(x) \right| = \|f\|_{\infty,I}$$

  - × on rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue sur un segment $[a, b]$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un couple de réels tel que $a < b$) est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. Une telle fonction f admet donc une borne supérieure sur $[a, b]$ qui vérifie : $\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} \left| f(x) \right|$.
  - × on rappelle, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la caractérisation séquentielle de la limite de f en un point $a \in \mathbb{R}$:

La fonction f admet la limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a	$\Leftrightarrow$	Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente de limite a, la suite $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

  - × on admet enfin le théorème de Weierstrass.

> Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ est un couple de réels tel que $\alpha < \beta$.
> Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$.
> On suppose que la fonction f est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$.
>
> Il existe alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui vérifie :
> - × il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, la fonction $f - f_n$ est bornée.
> - × $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{\infty,[\alpha,\beta]} = 0$.

Partie I - Résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\ dt = 0$$

1. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\;dt \right| \leqslant \dfrac{2\pi\,\|f'\|_{\infty,[0,2\pi]}}{n}$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\;dt \;=\; \left[\frac{\sin(nt)}{n}\;f(t) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\,\sin(nt)\;dt$
- **1 pt :** $\left[\dfrac{\sin(nt)}{n}\;f(t) \right]_0^{2\pi} = 0$
- **1 pt :** $\left| \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(t)\,\sin(nt)\;dt \right| \leqslant \dfrac{2\pi\,\|f'\|_{\infty,[0,2\pi]}}{n}$

b) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\;\cos(nt)\;dt = 0$$

- **1 pt : théorème d'encadrement écrit correctement**

2. On note $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\;dt$.

a) Montrer que la fonction Φ est 2π-périodique.

- **1 pt :** $\Phi(x+2\pi) = \displaystyle\int_0^{x+2\pi} \varphi(t)\;dt = \cancel{\int_0^{2\pi} \varphi(t)\;dt} + \int_{2\pi}^{x+2\pi} \varphi(t)\;dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{2\pi}^{x+2\pi} \varphi(t)\;dt = \int_0^x \varphi(u)\;du$

b) Quelle est la régularité de Φ sur $\mathbb{R}$? En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (comme primitive d'une fonction $\mathscr{C}^0$)**
- **1 pt : en particulier, Φ est de classe $\mathscr{C}^0$ et est bornée et atteint ses bornes sur le** `SEGMENT` $[0, 2\pi]$
- **1 pt : comme Φ est 2π-périodique, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$**

c) Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
En s'inspirant de la question ***1***, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\;\varphi(nt)\;dt = 0$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\;dt \;=\; \left[\frac{\Phi(nt)}{n}\;f(t) \right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\,\Phi(nt)\;dt$
- **1 pt :** $\left| \left[\dfrac{\Phi(nt)}{n}\;f(t) \right]_a^b \right| \leqslant \dfrac{\|\Phi\|_{\infty,[a,b]}}{n}\;(|f(a)| + |f(b)|)$
- **1 pt :** $\left| \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\Phi(nt)\;dt \right| \leqslant \dfrac{\|\Phi\|_{\infty,[a,b]}}{n}\displaystyle\int_a^b f'(t)\;dt$
- **0 pt : conclusion par théorème d'encadrement**

3. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$.

a) Démontrer :

$$\left| \int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\ dt \right| \leqslant M\,|\beta - \alpha|\,\|h - g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} + \left| \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\ dt \right|$$

- **1 pt : écrire** $h = (h - g) + g$
- **1 pt : majoration de** $\left| \displaystyle\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\ dt \right|$

b) En déduire, à l'aide du théorème de Weierstrass, que pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\ \varphi(nt)\ dt = 0$$

- **1 pt : on applique la question précédente pour** $h = f$ **et** $g = f_n$ **où** (f_n) **suite de fonctions polynomiales qui approche uniformément** f
- **1 pt : on conclut par théorème d'encadrement car** $\|f - f_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **et par la question** ***2.c)***

4. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
Déduire de ce qui précède :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)\ \sin^2(nt)\ dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\ dt$$

- **1 pt :** $\sin^2(nt) = \dfrac{1}{2}\ \big(1 - \cos(2\,nt)\big)$
- **0 pt :** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \sin^2(nt)\ dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\ dt - \frac{1}{2} \int_a^b \cos(2\,nt)\ f(t)\ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_a^b \cos(2\,nt)\ f(t)\ dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ **d'après ce qui précède**

Partie II - L'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ soit bornée.

5. Montrer que, pour tout réel $a > 0$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\ dt$ puis $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\ dt$ sont convergentes et :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\ dt = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\ dt - \frac{F(a)}{a}$$

- **2 pts :** $\dfrac{F(t)}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ **et théorème de comparaison écrit correctement**
- **1 pt : IPP sous réserve de convergence**
- **1 pt : levée de la réserve**

6. Montrer que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$ sont convergentes et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$$

- **3 pts :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ **convergente**
  - × **1 pt : en** 0**, l'intégrale est faussement impropre**
  - × **2 pts : en** $+\infty$**, on utilise la question précédente puisque** $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t)\, dt$ **est bornée**
- **1 pt :** $= \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ **et théorème de comparaison écrit correctement**

Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ soit absolument convergente.

7. Montrer que la fonction :

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^0 \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  Pour tout $t \in \,]0,+\infty[$**, la fonction** $\underline{h}_t : x \mapsto f(t)\, \mathrm{e}^{-t\,x}$ **est** $\mathscr{C}^0$ **sur** $[0,+\infty[$
- **3 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $x \in \,]0,+\infty[$**, la fonction** $t \mapsto \underline{h}_t^{(0)}(x)$ **est continue (p. m.) sur** $]0,+\infty[$
  - × **2 pts :** $\left|\underline{h}_t^{(0)}(x)\right| = \left|f(t)\, \mathrm{e}^{-t\,x}\right| \leqslant |f(t)|$
    et $\varphi : t \mapsto f(t)$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$

8. On suppose de plus que la fonction f est bornée.

a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
Pour ce faire, on démontre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]0,+\infty[$.

- **1 pt :** $\boxed{\textbf{Caractère } \mathscr{C}^k \textbf{ - étude « en } x \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $t \in \,]0,+\infty[$**, la fonction** $\underline{h}_t : x \mapsto f(t)\, \mathrm{e}^{-t\,x}$ **est** $\mathscr{C}^k$ **sur** $[0,+\infty[$
  - × **1 pt :** $\underline{h}_t{}^{(k)}(x) = (-t)^k\, f(t)\, \mathrm{e}^{-t\,x}$
- **4 pts :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout** $x \in \,]0,+\infty[$**, la fonction** $t \mapsto \underline{h}_t^{(j)}(x) = f(t)\, \mathrm{e}^{-x\,t}$ **intégrable sur** $]0,+\infty[$
  - × **1 pt : pour tout** $x \in [0,+\infty[$**, la fonction** $t \mapsto \underline{h}_t^{(k)}(x)$ **est continue (p. m.) sur** $]0,+\infty[$
  - × **2 pts :** $\left|\underline{h}_t'(x)\right| = \left|(-t)^k\, f(t)\, \mathrm{e}^{-t\,x}\right| \leqslant |f(t)|\ t^k\ \mathrm{e}^{-a\,t}$
    et $\varphi : t \mapsto t^k\, \mathrm{e}^{-a\,t}$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$

b) Démontrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.
On pourra penser à utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

- **0 pt : on introduit une suite x_n de limite $+\infty$ et pour tout n, $g_n : t \mapsto f(t)\ \mathrm{e}^{-x_n t}$**
- **2 pts :** $\boxed{\textbf{Existence d'une limite finie - étude « en } n \textbf{ »}}$
  - × **1 pt :** $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(t) = 0$
  - × **1 pt :** $t \mapsto 0$ **est cpm**
- **3 pt :** $\boxed{\textbf{Intégrabilité (par domination) - étude « en } t \textbf{ »}}$
  - × **1 pt : pour tout n, la fonction g_n est cpm**
  - × **2 pts :** $|\ g_n(t)\ | \ \leqslant\ |f(t)|\ \mathrm{e}^{-t}$ **et** $\varphi : t \mapsto |f(t)|\ \mathrm{e}^{-t}$ **est intégrable sur** $]0, +\infty[$

9. On note $f : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$

sur $]0, +\infty[$.

- **1 pt : d'après ce qui précéède** $\mathcal{L}(f)''(x) \ = \ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\, f(t)\, \mathrm{e}^{-x\,t}\ dt$
- **1 pt : donc** $\mathcal{L}(f)''(x) + \mathcal{L}(f)(x) \ = \ \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2+1)\, f(t)\, \mathrm{e}^{-x\,t}\ dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,t}\ dt$
- **1 pt :** $= \dfrac{1}{x}$

b) On cherche une solution particulière de (**E**) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifient :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$$

Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_1(t)\ dt$ et $\beta(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_2(t)\ dt$ où f_1 et f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt$ est une solution de l'équation (**E**) sur $]0, +\infty[$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

d) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \ \mathcal{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\ dt$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

10. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

11. ***a)*** Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \right) = 0.$

- **1 pt :** $\displaystyle\left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) = -\frac{x\,\sin(t)}{t\,(x+t)}$
- **1 pt :** $\displaystyle\left| -\frac{x\,\sin(t)}{t\,(x+t)} \right| \leqslant |x|\, \frac{1}{t^2}$
- **1 pt : croissance de l'intégrale et théorème d'encadrement**

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt.$

- **1 pt :** $\displaystyle\left| \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \right| \leqslant \int_0^1 \frac{x}{x+t}\, dt \;=\; x\, \big(\ln(x+1) - \ln(x) \big)$
- **1 pt : théorème d'encadrement**

12. Déduire des questions précédentes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

Problème 2 : Les matrices de Kac

Notations et définitions

- Dans toute la suite, on note $\mathbb{K}$ pour désigner l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles carrées de taille n.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !
- On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Plus précisément, une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que : $A = P\,D\,P^{-1}$. Dans le cas où D et P sont à coefficients réels, on dira que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$; on dira qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si l'une de ces deux matrices contient un coefficient qui n'est pas réel.
- On appelle spectre réel d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des racines réelles de son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\,I_3 - A)$. On définit de manière similaire l'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Les éléments de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ (resp. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$) sont appelées les valeurs propres réelles (resp. complexes) de A.
- On appelle **sous-espace propre** de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, l'ensemble :

$$E_\lambda(A) = \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda\,I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \;=\; \mathrm{Ker}\,\big(A - \lambda\,I_n\big)$$

  On pourra par ailleurs utiliser le fait que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$1 \;\leqslant\; \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \;\leqslant\; n$$

Résultats admis

- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser les **conditions suffisantes** suivantes :
  - × si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  - × si A possède exactement n valeurs propres dans $\mathbb{K}$, alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra utiliser la **condition nécessaire et suffisante** suivante :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) = n}$$

On pourra enfin remarquer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)} \dim_{\mathbb{K}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \leqslant n$.

20. **Un petit résultat**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Démontrer que si B est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ alors A l'est aussi.

- **1 pt : A et B sont semblables, il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A = QBQ^{-1}$**
- **1 pt : B diagonalisable sur $\mathbb{K}$, il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = PDP^{-1}$**
- **1 pt :** $A = QBQ^{-1} = Q\big(P\ D\ P^{-1}\big)Q^{-1} = \big(Q\,P\big)\ D\ \big(Q\,P\big)^{-1}$

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(X\,I_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- **1 pt :** $\chi_A(X) = \det\Big(X\,I_3 - A\Big) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\,\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & X & -2 \\ 0 & -2+X^2 & -2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$
- **1 pt :** $= \cancel{(-1)}\,\dfrac{\cancel{1}}{2} \times (-1)^{1+1}\,\cancel{(-2)} \times \begin{vmatrix} -2+X^2 & -2X \\ -1 & X \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} -2+X^2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = X\Big(\big((-2+X^2)\times 1\big) - \big((-1)\times(-2)\big)\Big) = X\Big(-4+X^2\Big) = X\,(X-2)\,(X+2)$

22. ***a)*** En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, 0, 2\}$
- **1 pt : A est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres réelles distinctes. Elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$**

b) Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.

- **1 pt : pour tout** $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim_{\mathbb{R}}\Big(E_\lambda(A)\Big) \geqslant 1$
- **1 pt : par l'absurde, si l'un des sous-espaces propres de dimension > 1,**
  $\dim_{\mathbb{R}}\Big(E_{-2}(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}}\Big(E_0(A)\Big) + \dim_{\mathbb{R}}\Big(E_2(A)\Big) \geqslant 2+1+1 = 4$, **absurde !**

23. ***a)*** Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.

- **1 pt :** $\chi_B(X) = \det\Big(X\,I_3 - B\Big) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ X & 1 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)\,\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & X & 2 \\ 0 & 2+X^2 & 2X \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$
- **1 pt :** $\cancel{(-1)\,\dfrac{1}{2}} \times (-1)^{1+1}\ \cancel{(-2)} \times \begin{vmatrix} 2+X^2 & 2X \\ -1 & X \end{vmatrix} = X\begin{vmatrix} 2+X^2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$
  $= X\Big(\big((2+X^2)\times 1\big)\ -\ \big((-1)\times 2\big)\Big) = X\left(4+X^2\right) = X\,(X-2i)\,(X+2i)$

b) Vérifier : $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

- **1 pt :** $i\chi_B(iX) = i\Big((iX)\big((iX)-2i\big)\big((iX)+2i\big)\Big) = \cancel{i\times(i\times i\times i)}\Big(X\big(X-2\big)\big(X+2\big)\Big) = \chi_A(X)$

24. ***a)*** La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

- **1 pt : B est carrée d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres complexes distinctes. Ainsi B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$**
- **2 pts :** $E_0(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre car uniquement constituée d'un vecteur non nul et génératrice de $E_0(B)$. C'est donc une base de $E_0(B)$ et** $\dim_{\mathbb{R}}\Big(E_\lambda(B)\Big) = \operatorname{Card}\big(\mathcal{F}\big) = 1$
- **0 pt :** $\displaystyle\sum_{\lambda\in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(B)} \dim_{\mathbb{R}}\Big(E_\lambda(B)\Big) = \dim_{\mathbb{R}}\Big(E_0(B)\Big) = 1 \neq 3$ **donc B non diagonalisable**

b) Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

- **1 pt :** $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$ **et** $\dim_{\mathbb{R}}\Big(E_0(B)\Big) = 1$
- **1 pt : comme déjà fait** $\dim_{\mathbb{C}}\Big(E_0(B)\Big) = \dim_{\mathbb{C}}\Big(E_{-2i}(B)\Big) = \dim_{\mathbb{C}}\Big(E_{2i}(B)\Big) = 1$

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$$

25. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

- **1 pt :** $D^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D^{-1}AD = -iB$

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

26. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt :** $\Delta^{-1}\,A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : A et $C = \Delta^{-1} A \Delta$ sont semblables et C diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car symétrique réelle. Donc A diagonalisable.**

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

- Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x)\ \sin^{n-k}(x)$$

- On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n \ = \ \operatorname{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n) \ = \ \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\ f_k \ \middle|\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$$

27. ***a)*** Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre.

- **1 pt : évaluation en 0 donne $\alpha_n = 0$**
- **1 pt : diviser par $\cos(x)$ pour pouvoir itérer le procédé**
- **1 pt : rédaction correcte**

b) En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

- **1 pt : famille libre et génératrice**
- **1 pt :** $\dim(V_n) = \operatorname{Card}(\mathcal{F}) = n + 1$

28. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n & : & V_n & \to & V_n \\ & & f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \mathrm{e}^{i(2k-n)x}$.

- **1 pt : linéarité de la dérivation**
- **2 pts :** $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$**,** $f_k' = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}$
- **1 pt :** $f_0' = n f_1$
- **1 pt :** $f_n' = -n f_{n-1}$

29. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^k \ \Big(\cos(x) - i\sin(x)\Big)^{n-k}$.

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{i(2k-n)x} = \mathbf{e}^{i(k-n)x} \times \mathbf{e}^{ikx} = \mathbf{e}^{i(n-k)\,(-x)} \times \mathbf{e}^{ikx}$
- **1 pt :** $\mathbf{e}^{i\,\theta} = \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$

30. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $g_k \in V_n$.

- **1 pt :** $\Big(\cos(x) + i\sin(x)\Big)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \dots$ **et** $\Big(\cos(x) - i\sin(x)\Big)^{n-k} = \sum\limits_{j=0}^{n-k} \dots$
- **1 pt :** $\dots \times \dots = \sum\limits_{i=0}^{k} \left(\sum\limits_{j=0}^{n-k} \dots\right)$
- **1 pt : on fait bien apparaître une combinaison linéaire d'éléments de V_n**

31. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable.
Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

32. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**

33. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire :

$$\mathrm{Ker}\,(B_n \;-\; in\, I_{n+1}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right)$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k} \dbinom{n}{k}$.

- **1 pt :**
- **1 pt :**
- **1 pt :**